Funciones polinómicas

Estas funciones están definidas para todos los números reales, y constituyen una de las familias de funciones que representan la mayor cantidad de fenómenos naturales.

Te recomiendo visitar los siguientes sitios:

argentina.aula365.com/permalink/curso/**Funciones-polinomicas**-268148.aspx - 143k –

w3.cnice.mec.es/Descartes/Analisis/**Funciones_polinomicas**/**Funciones_polinomicas**.htm –

¿Para qué sirven estas funciones?

En la Física...

Sabemos que al suspender un peso de un resorte, este se alarga, ¿podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en función del tiempo.

En la Química...

En el laboratorio de Química, ¿podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en **función** del tiempo.

En la Economía...

Un investigador suele expresar: el consumo en **función** del ingreso, también la oferta en **función** del precio, o el costo total de una empresa en **función** de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables.

En la Biología...

Cuando se trata se precisar: el crecimiento de una población animal o vegetal en **función** del tiempo, el peso de un bulbo en **función** del diámetro del mismo, el consumo de oxígeno en **función** del trabajo realizado, etc.

Tanto en años anteriores como en la etapa anterior estudiamos las siguientes funciones:

$f(x) = b$, función constante.
$f(x) = mx + b$, función lineal.
$f(x) = ax^2 + bx + c$, donde **a** es diferente de cero, función cuadrática.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde **a** es diferente de cero, función cúbica.

Ahora abordaremos la definición de funciones polinómicas.

Definición:

La función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
donde a_n es diferente de cero,
se conoce como una **función polinómica de n ésimo grado**.

Los números $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ se llaman los **coeficientes de la función**.

Nota: una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero, una función lineal es un polinomio de primer grado, una función cuadrática es un polinomio de segundo grado. La función $P(x) = 0$ se considera como un polinomio pero no se le asigna ningún grado.

Las operaciones que podemos realizar con estas funciones, es decir con los polinomios son las vistas en la etapa anterior.

Operaciones en funciones polinómicas		
Propiedades	**Suma**	**Producto**
Conmutativa	$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$	$f(x) . g(x) = g(x) . f(x)$
Asociativa	$[f(x) + g(x)] + h(x) =$ $f(x) + [g(x) + h(x)]$	$f(x) . [g(x) . h(x)] =$ $[f(x) . g(x)] . h(x)$
E. neutro	$f(x) + N(x) = N(x) + f(x) = f(x)$, siendo $N(x) = 0$	$f(x). I(x) = I(x). f(x) = f(x)$, siendo $I(x) = 1$
E. simétrico	$f(x) + [-f(x)] =$ $[-f(x)] + f(x) = 0$	No se cumple

Distributiva	f(x) . [g(x) + h(x)] = f(x) . g(x) + f(x). h(x)

Definición de raíz:

Un número **r** es **raíz o solución de una función polinómica** si P(r) = 0.

Las raíces o ceros de una función polinómica se obtienen utilizando el método de Gauss, Ruffini, etc., métodos vistos en la etapa 1.

Para recordar:
Las raíces son las soluciones de la ecuación asociada a esas funciones y el orden de multiplicidad de una raíz es la cantidad de veces que se repite.

Un poquito más de historia…

La determinación de las raíces de los polinomios "resolver ecuaciones algebraicas", está entre los problemas más viejos de la matemática. Algunos polinomios, como $f(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna raíz en los números reales. Sin embargo, si el conjunto de las raíces posibles se extiende a los números complejos, todo polinomio (no constante) tiene una raíz: ese es el enunciado del teorema fundamental del álgebra.
Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas cerradas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta 4 grado desde el siglo XVI. Pero las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron esquivas para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró el resultado de que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de grado 5 o mayores en términos de sus coeficientes (ver el teorema de Abel-Ruffini). Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se encarga de un estudio detallado de las relaciones entre las raíces de los polinomios.
La máquina diferencial de Charles Babbage fue diseñada para crear grandes tablas de valores de funciones logarítmicas y diferenciales automáticamente, evaluando aproximaciones polinomiales en muchos puntos usando el método de las diferencias de Newton.

Te recordamos los pasos para hallar las raíces:

1) Se escribe una lista con todos los divisores del término independiente (que son candidatos a raíces del polinomio).
2) Se determina cuáles de estos divisores son raíces del polinomio, aplicando a cada uno de ellos la regla de Ruffini y seleccionando aquellos cuyo resto sea cero.
3) Se toma el polinomio resultante de dividir el original por el binomio con la primera raíz, y se repiten los dos pasos anteriores

4) Cuando se llega a una situación en que ninguno de los divisores es raíz (real) del polinomio, este se considera **irreducible.**
5) Se escribe el polinomio original como el producto del polinomio irreducible final por todos los binomios del tipo $(x - a_i)$, siendo ai cada una de las raíces obtenidas.

   6) $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) P_{\text{irreducible}}(x)$

Veamos un ejemplo, siguiendo esos pasos:

El polinomio $\mathbf{p(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90}$

1) Buscá los divisores de **90**, antes de seguir leyendo.

2) Para determinar cuáles te sirven, usá el teorema del resto con cada uno de ellos.

3) Cuando encontraste uno que dé cero dividí usando la regla de Ruffini.

4) Repetí el procedimiento hasta llegar a un polinomio de segundo grado con el que podrás usar la fórmula resolvente.

5) Expresá el polinomio en forma factorizada.

A partir del resultado que obtengas deducí cuáles son las soluciones de la ecuación $\mathbf{x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90 = 0}$ y los puntos de intersección de la función $\mathbf{f(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90}$ con los ejes.

Te debería haber quedado como:

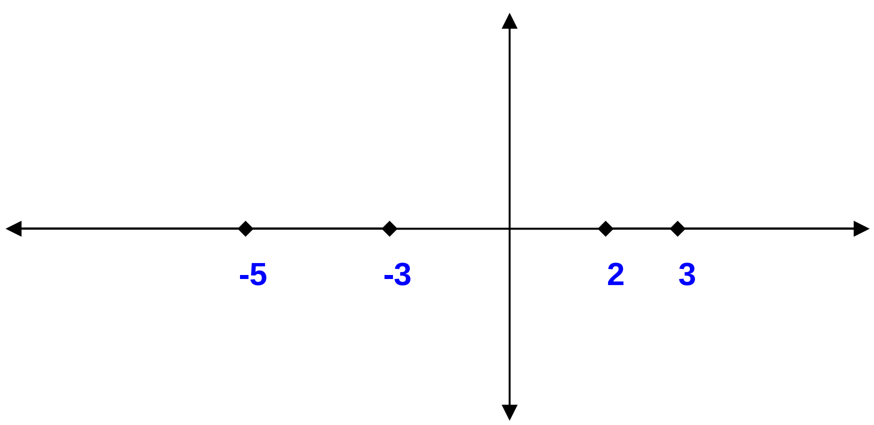
$$\mathbf{f(x) = (x+5).(x+3).(x-2).(x-3)}$$

Las raíces o soluciones de la ecuación son **-5, -3, 2 y 3,** todas son de orden simple, ya que están elevadas a la uno, por lo tanto el gráfico “cruza” el eje x.

Te invito a que lo grafiques primero a mano y luego podrás comprobarlo con Excel.

Para graficar a mano los pasos sugeridos son los siguientes:

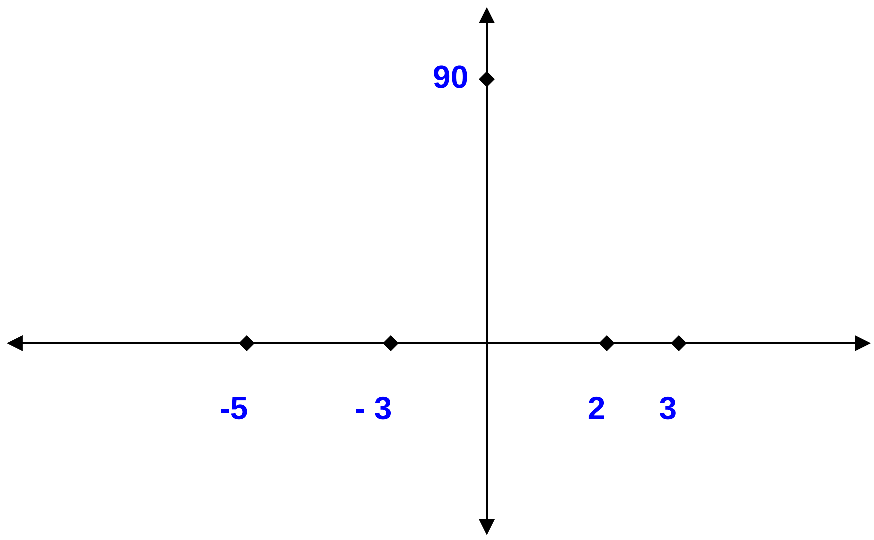
1ª) Marcá sobre el eje de las abscisas (x) las raíces **-5, -3, 2 y 3,**



2ª) Buscá la ordenada al origen, que es buscar el valor de la función cuando la x=0. Reemplazá la x por 0, y calculá:

$f(0)=(0+5).(0+3).(0-2).(0-3) = 90$

¡Sí! Es "siempre" el término independiente.



3ª) Para trazar "aproximadamente" el gráfico te sugiero que determines los intervalos de positividad, f(x) está por arriba del eje x; y de negatividad, f(x) está por debajo del eje x; los podemos calcular si resolvemos las inecuaciones $f(x)>0$ y $f(x)<0$.

Para lograrlo usaremos el método visto en el encuentro de la etapa 1.
Los intervalos estarán determinados por las raíces del polinomio, -5,-3,2 y 3.

Recordá escribir las raíces en orden de menor a mayor, según se ordenan en la recta numérica.

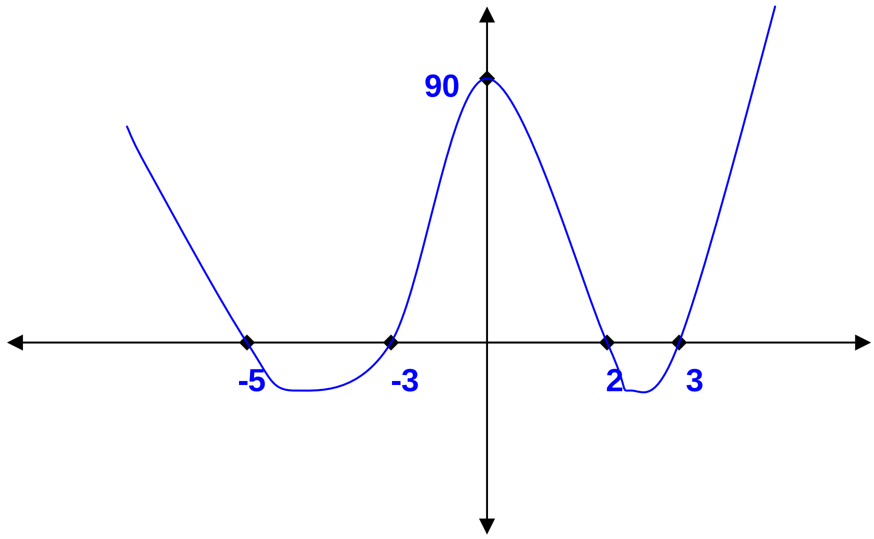
Completamos la tabla que sigue con los signos que correspondan, para lo cual elegí un número dentro de cada uno de los intervalos determinados:

Factor	(-∞;-5)	-5	(-5;-3)	-3	(-3;2)	2	(2;3)	3	(3;+∞)
(x+5)	-		+		+		+		+
(x+3)	-		-		+		+		+
(x-2)	-		-		-		+		+
(x-3)	-		-		-		-		+
P(x)	+		-		+		-		+

Los intervalos son:

C^+=(-∞;-5) U (-3;2) U (3;+∞) y C^-= (-5;-3) U (2;3)

Entonces, empezando a graficar desde la derecha, la curva viene de arriba hacia abajo:



Otro ejemplo:

$f(x)=5x^3+x^5$

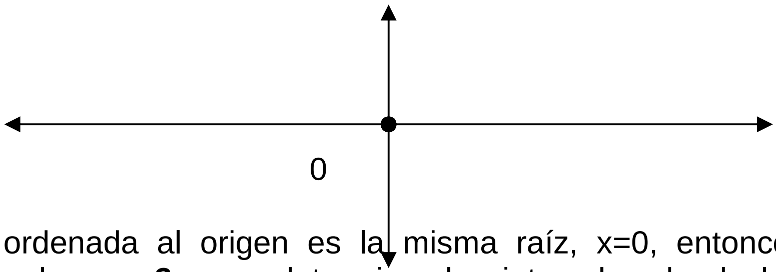
Esta función no tiene término independiente, sin embargo está formada por dos términos en los que se repite la x, entonces podemos “sacar” x^3 como factor común.
Recordá que al extraer factor común debemos analizar cuál es el factor con menor potencia.

Para extraer **x^3** podemos pensar que cada uno de los términos nos quedan divididos por el factor común:

$$x^3\left(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^5}{x^3}\right)$$

Y al simplificar, nos queda $x^3\left(5+x^2\right)$
Busquemos los ceros, o raíces→$x^3\left(5+x^2\right)$=0, si un producto es 0, entonces uno de sus factores será 0, es decir x^3=0 ó $(5+x^2)$=0→
→x=0 ó x^2=-5 esta última igualdad es imposible ya que ningún número elevado al cuadrado puede ser negativo, por lo tanto la única raíz es x=0, que por cierto es de orden tres, ya que está elevada a la tres; lo que implica que la gráfica “cruza” el eje de abscisas.

Paso 1. Marcá sobre el eje x la raíz 0.

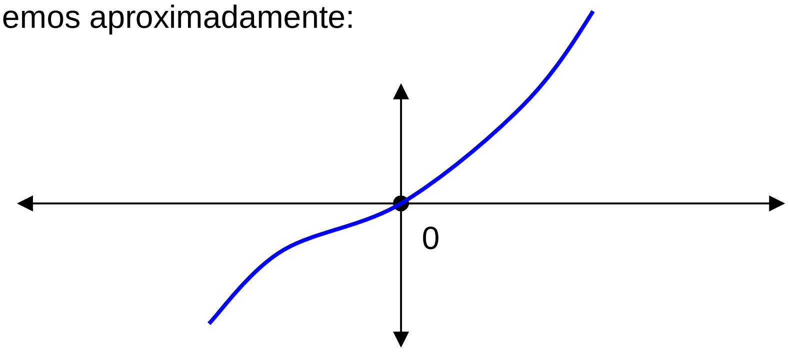


Paso 2, la ordenada al origen es la misma raíz, x=0, entonces pasamos directamente al ***paso 3***, para determinar los intervalos donde la función es positiva (arriba del eje x) y negativa (debajo del eje x).

	(-∞;0)	0	(0;+∞)
X^3	-		+
$(5+x^2)$	+		+
F(x)	**-**		**+**

Los intervalos son C^+=(-∞;0) y C^-=(0;+∞)

Grafiquemos aproximadamente:



¿Cómo grafico con Excel? te estarás preguntando.

Bueno, se mostrará en el recurso "Aprendemos a trabajar con Excel y las funciones polinómicas". Ahora, un poco de práctica para fijar lo aprendido hasta ahora.

Actividades

Actividad 1

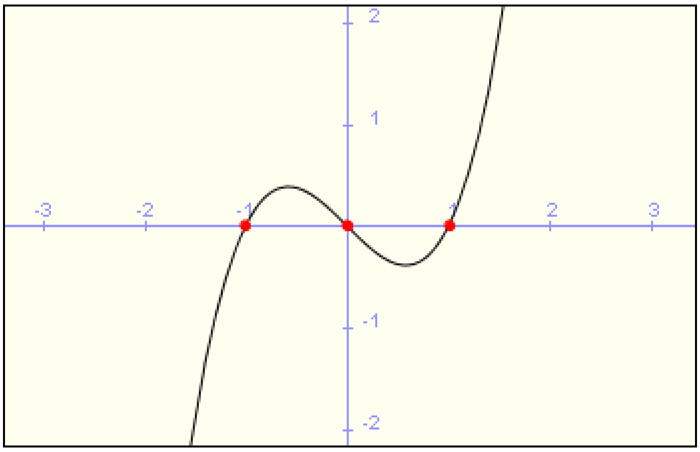
Analizá el grado, escribí las funciones en forma factorizada, encontrá sus raíces y el orden de multiplicidad y por último realizá un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2-2x+1$

b) $g(x)=x^3-9x^2+27x-27$
c) $h(x)= x^4-4x^3$
d) $i(x)=x^4+2x^3-3x^2-8x-4$

Actividad 2

Buscá la ecuación de la función polinómica que tiene por gráfica:



Observá que las raíces son **-1, 0** y **1**, todas cruzan el eje x.

Actividad 3

Observá y completá:

Si el orden de multiplicidad es…………. (par – impar), la gráfica de la función toca al eje x pero no lo atraviesa.

Si el orden de multiplicidad es…………. (par – impar), la gráfica de la función atraviesa al eje x.

Actividad 4

Sea $f(x) = (2x^2 + 3x - 2)(x - k)$; si $f(1) = 18$, hallá el valor de k y luego calculá ceros y determiná los intervalos de positividad y de negatividad de $f(x)$.

Actividad 5

Hallá la expresión y los intervalos de positividad y de negatividad de la función polinómica $f(x)$ de grado 3 que corta al eje x en los puntos $(-1; 0)$; $(-5; 0)$ y $(1; 0)$ y en la cual $f(0) = 2$.

En la página siguiente, encontrarás las claves (o soluciones) de las actividades planteadas.

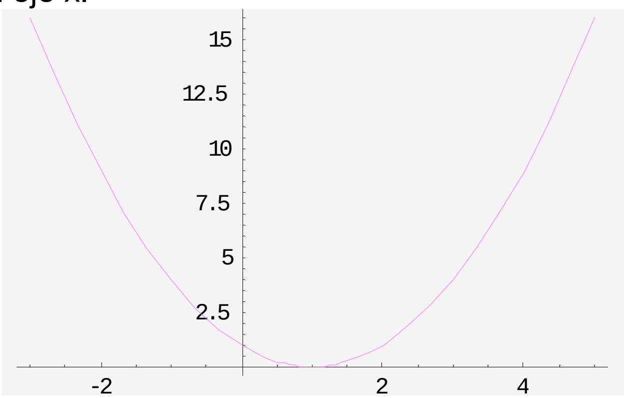
CLAVE DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1

Analizá el grado, escribilas en forma factorizada, encontrá las raíces y su orden de multiplicidad. Y por último realizá un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

e) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Como la mayor potencia que tiene la x su grado es 2.
Por ser de grado 2 podemos usar la fórmula resolvente de la cuadrática ($\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$) y obtenés $x_1 = x_2 = 1$.
Su forma factorizada es $(x-1)^2$. El orden de la raíz 1 es dos, por lo que el gráfico "rebota" en el eje x.



f) $g(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

La mayor potencia que aparece con la x es tres, por o que su grado es 3.
Buscamos los divisores de -27 que son: -1,+1,-3,+3,-9,+9,-27,+27
Dado que el coeficiente principal (número que multiplica a la x es 1 nos basta con aplicar el Teorema del resto con estos números).
Probemos con -1 $\rightarrow g(-1) = (-1)^3 - 9.(-1)^2 + 27.(-1) - 27 = -64$ no sirve.
Sigamos $g(1) = (1)^3 - 9.(1)^2 + 27.(1) - 27 = -8$, tampoco.
$g(-3) = (-3)^3 - 9.(-3)^2 + 27.(-3) - 27 = -216$ ¡OH! Tampoco.
$g(3) = (3)^3 - 9.(3)^2 + 27.(3) - 27 = 0$ ¡SI!

Procedamos con Ruffini:

	1	-9	+27	-27
3		3	-18	+27
	1	-6	+9	0

Como dividimos por 3 y resultó ser raíz podemos expresar hasta ahora la función $g(x) = x^3-9x^2+27x-27 = (x-3).(x^2-6x+9)$
El último factor resultó de segundo grado, entonces podemos usar la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ y resulta que $x_1=x_2=3$
Por lo que la función factorizada será $(x-3)^3$, x=3 es raíz de orden tres, el gráfico "cruza" el eje x.

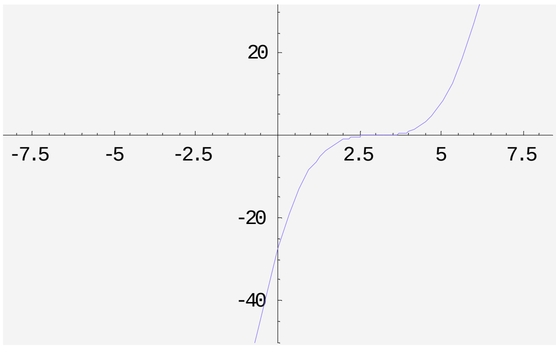
Construyamos el cuadro para determinar los intervalos de positividad y negatividad:

	(-∞;3)	3	(3;+∞)
$(x-3)^3$	-		+
F(x)	**-**		**+**

$C^+= (3;+\infty)$ y $C^-=(-\infty;3)$

Busquemos la ordenada al origen, g(0)= -27

Grafiquemos aproximadamente:



g) $h(x)= x^4-4x^3$

La mayor potencia es **4**, entonces es de **grado 4**.
Para factorizar extraemos factor común la x de "menor" potencia o sea x^3
Y entonces $x^3\left(\frac{x^4}{x^3}-\frac{4x^3}{x^3}\right)$ al simplificar las x^3
Nos queda factorizada: $h(x)=x^3(x-4)$
Esta expresión la igualamos a cero, que es como logramos obtener las raíces o ceros de una función.

$x^3(x-4) = 0$ si un producto es cero, entonces uno de los factores es cero,

$x^3=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{0} \rightarrow x=0$
ó $(x-4)=0 \rightarrow x=4$

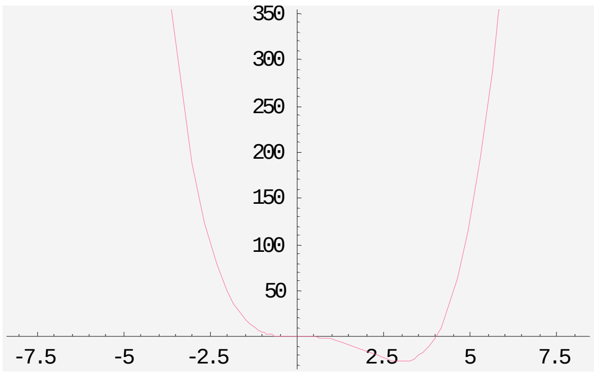
Las raíces son 0 (de orden impar, “cruza” el eje x) y 4 (también de orden impar).

Vamos al cuadro:

	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
X^3	-		+		+
(x-4)	-		-		+
h(x)	**+**		**-**		**+**

Decimos que $C^+=(-\infty;0) \cup (4;+\infty)$ y $C^-=(0;4)$

La ordenada al origen es 0, ya que h(0)=0
Graficamos aproximadamente.



$i(x)=x^4+2x^3-3x^2-8x-4$

Grado 4, coeficiente principal 1,

Buscamos los divisores de **-4**, que son -1,+1,-2,+2,-4,+4.
$i(-1)=(-1)^4+2(-1)^3-3(-1)^2-8(-1)-4= 0$, rapidito encontramos el correcto!

	1	+2	-3	-8	-4
-1		-1	-1	4	+4
	1	1	-4	-4	0

Hasta ahora $i(x)= (x+1).(x^3+1x^2-4x-4)$
Apliquemos el teorema al segundo factor:
$i(-2)=(-2)^3+1.(-2)^2-4.(-2)-4=0$, vamos a realizar la división por Ruffini;

	1	1	-4	-4
-2		-2	2	+4
	1	-1	-2	0

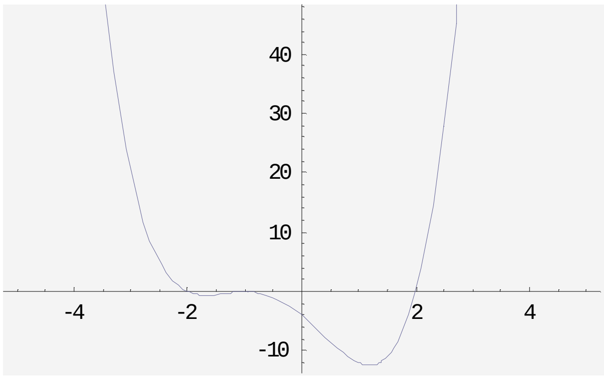
Hasta ahora $i(x)=(x+1).(x+2).(x^2-x-2)$

Aplicamos la fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ a el último factor y las raíces son $x_1=-1$ y $x_2=2$

Quedando factorizada $i(x)=(x+1)^2(x+2)(x-2)$
Los ceros son -1, doble “rebota” el eje x, -2 y 2 simples por lo que “cruza”.

La ordenada al origen es -4, ya que i(0)=-4

Grafiquemos aproximadamente:



Actividad 2

Las raíces son **-1, 0** y **1**, todas cruzan el eje x, y como debe ser del menor grado posible (x+1).x.(x-1) sería una posible función.

Si querés comprobarlo te invito a que grafiques esta función con el Excel.

Actividad 3

Si el orden de multiplicidad es **PAR** (par – impar), la gráfica de la función toca al eje x pero no lo atraviesa.

Si el orden de multiplicidad es **IMPAR** (par – impar), la gráfica de la función atraviesa al eje x.

Actividad 4

Como dato nos dicen que **f(1)=18** esto implica que cuando **x=1** el resultado es **18**, por lo que reemplazando x e igualando :

$(\mathbf{2.1^2+3.1-2}).(\mathbf{1-k})=\mathbf{18} \rightarrow (2+3-2)(1-k)=18 \rightarrow 3\,(1-k)=18 \rightarrow 1-k=6 \rightarrow -5=k$

Reemplazando k por -5 $(2x^2+3x-2)(x+5)=f(x)$

Si usamos la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ las otras raíces resultan ser x_1=-2 y x_2=1/2

Factorizamos f(x)= (x+2)(x-1/2)(x+5)
Los ceros son -2,1/2 y 5
Armamos el cuadro para determinar los intervalos

	(-∞;-5)	-5	(-5;-2)	-2	(-2;1/2)	½	(1/2 ;+∞)
(x+2)	-		-		+		+
(x-1/2)	-		-		-		+
(x+5)	-		+		+		+
f(x)	**-**		**+**		**-**		**+**

Los intervalos son C^+=(-5;-2) U (1/2;+∞) y C^-=(-∞;-5) U (-2;1/2)

Actividad 5

Como la función es de grado 3 y nos dicen las tres raíces podemos escribirla en forma genérica: a $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ en nuestro ejercicio a(x+1)(x+5)(x-1)

Recordá que una expresión factorizada "debe" llevar adelante el coeficiente principal, que en nuestros ejemplos casi siempre es 1.

Volvamos al ejercicio:

La función pedida factorizada sería a(x+1)(x+5)(x-1) como nos informan que f(0)=2 es decir la ordenada al origen, es 2, entonces si reemplazamos la x por 0 nos daría 2.

Veámoslo:

f(0)= a(0+1)(0+5)(0-1)=2 →a.1.5.(-1)=2 → a.(-5)=2 → a=-2/5

La función factorizada es -2/5(x+1)(x+5)(x-1)

Para poder determinar los intervalos armamos el cuadro con las raíces en orden de menor a mayor:

	(-∞;-5)	-5	(-5;-1)	-1	(-1;1)	1	(1;+∞)
(x+1)	-		-		+		+
(x+5)	-		+		+		+
(x-1)	-		-		-		+
-2/5	-		-		-		-
F(x)	**+**		**-**		**+**		**-**