CONICAS

1. CIRCUNFERENCIA
2. ELIPSE
3. HIPÉRBOLA
4. PARÁBOLA
5. LA TIERRA

1. CIRCUNFERENCIA

Definición

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que están a igual distancia de un punto interior C(h,k) llamado centro. A esta distancia constante la llamaremos radio, r.

$$\boxed{d(P,C) = r}$$

Usando la expresión de distancia entre dos puntos (que vimos en el tema de ecuación de la recta):

$$d(P,C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevamos al cuadrado para quitar la raíz:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 0$$

Desarrollando la ecuación, se tiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Ordenando la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Es decir la ecuación de una circunferencia es de la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

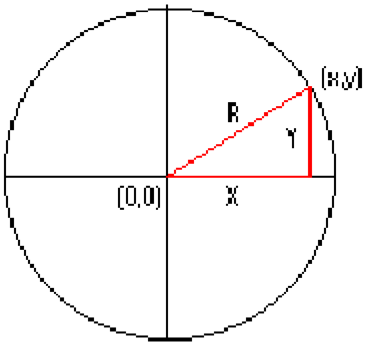
Siendo:

D= -2h despejando h: h= -D/2

E = -2k despejando k: k= -E/2

F= $h^2 + k^2 - r^2$ despejando r: $r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$

Cuando el centro está en el origen (0, 0), la ecuación anterior se simplifica a



$(x- h)^2 + (y- k)^2 = 0$

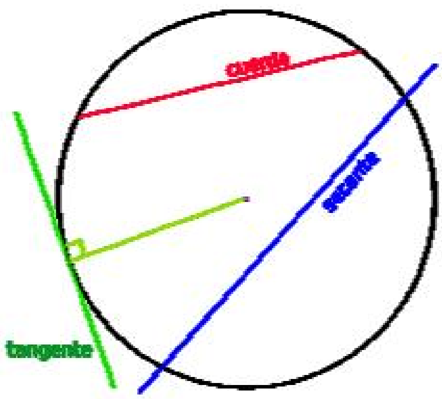
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Secantes, cuerdas y tangentes.

Existen varias rectas y puntos especiales en la circunferencia.

Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia

Diámetro: las cuerdas de longitud máxima (aquellas que pasan por el centro)



Secante: una recta que atraviesa la circunferencia, cortándola en dos puntos

Tangente: una línea que toca a la circunferencia en un sólo punto. El punto de contacto de la tangente con la circunferencia se llama punto de tangencia. El radio que une el centro con el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

2.ELIPSE

Definición

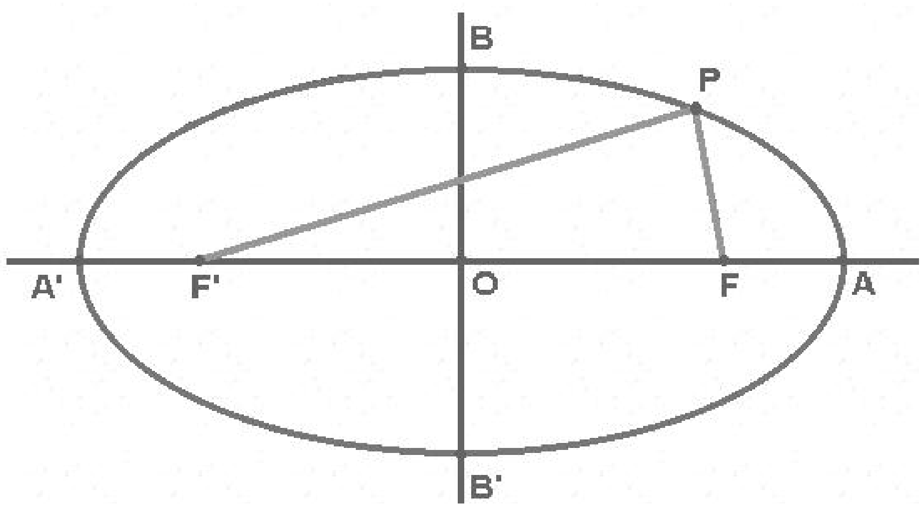
Elipse es el conjunto de puntos del plano que verifican que la suma de las distancias desde cada uno de ellos a dos puntos fijos (F y F´) llamados focos es una cantidad constante, que llamamos *2a*.

PF+PF´= 2a

Elementos de la elipse.

En la elipse se distinguen los siguientes elementos:

- El **eje focal** es la recta que pasa por los focos F y F´.
- El **eje secundario** es la mediatriz del segmento FF´.
- El **centro de la elipse** es el punto O en el que se cortan los ejes. Es el centro de simetría. Y los ejes son sus ejes de simetría.
- La **distancia focal** es el segmento FF´, cuya longitud es 2c.
- Los **focos** son los puntos F y F´. En una elipse de centro C(0,0), las coordenadas de los focos son F(c,0) y F´(-c,0)
- Los **vértices** son los puntos A y A´, B y B´ en los que los ejes cortan a la elipse. En una elipse de centro O(0,0), las coordenadas de los vértices son A(a,0) A´(-a,0) B(0,b) B´(0,-b)
- El **eje mayor** es el segmento AA´.
- El **eje menor** es el segmento BB´.



La longitud del eje mayor AA´ se designa por 2a, AA´= 2a
La longitud de los semiejes es: **OA = OA´= a**.
La longitud del eje menor BB´ se designa por 2b, **BB´ = 2b**
Por tanto: **OB = OB´ = b**.
La distancia focal FF´ se designa por 2c, **FF´ = 2c**
y la semidistancia focal será: **OF = OF´ = c**.

Relación entre a, b y c.

Si tomamos el punto P en el vértice B, obtenemos

BF + BF´ = 2a, luego BF = BF´ = a

Considerando el triángulo rectángulo OFB, de catetos b y c y de hipotenusa a.
El teorema de Pitágoras proporciona la relación**:** $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Ecuación reducida de la elipse de eje mayor OX

Haciendo uso de la definición de elipse y de la relación entre los elementos principales , obtenemos :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Excentricidad.

Si se observan varias elipses se ve que unas son redondeadas y otras son alargadas o achatadas. Esta característica de la elipse de ser más o menos redondeada se mide con un número llamado **excentricidad (e)**, que es el cociente de c entre a: **e = c / a,** con **c<a.**

Como c<a, se deduce que la excentricidad es un número comprendido entre 0 y 1. Cuanto más se aproxima la excentricidad a 1 más alargada o achatada es la elipse, tendiendo a confundirse con el eje mayor; y cuanto más se aproxima a 0 más se parece a una circunferencia.

3.HIPÉRBOLA

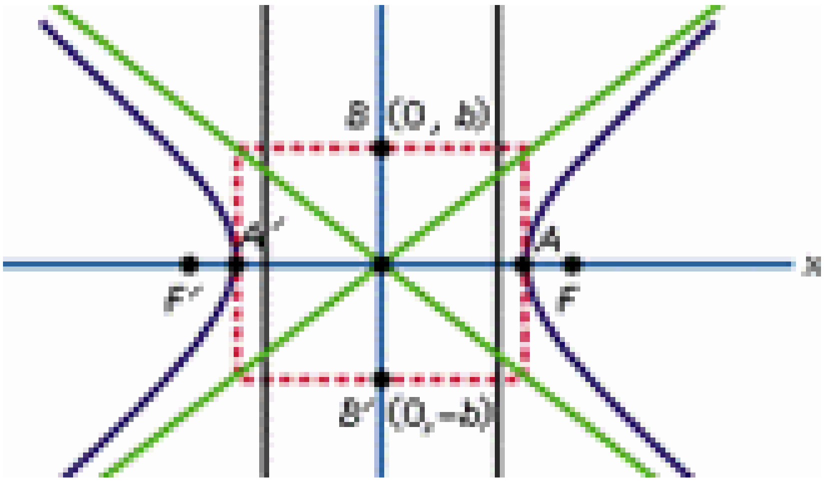
La hipérbola es el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una cantidad constante: 2a.

I PF´- PF I = 2a

Elementos de la hipérbola.

En la hipérbola se distinguen los siguientes elementos:

- El **eje focal** es la recta que pasa por los focos F y F´.
- El **eje secundario** es la mediatriz del segmento F´F.
- El **centro de la hipérbola** es el punto O en el que se cortan los ejes. Es el centro de simetría. Y los ejes son sus ejes de simetría.
- La **distancia focal** es el segmento F´F, cuya longitud es 2c.
- Los **vértices** son los puntos A, A´ y B, B´
- El **eje real** es el segmento AA´.
- El **eje imaginario** es el segmento BB´.



Longitudes de los ejes.

El eje real AA´ mide 2a luego **OA = OA´ = a**

De igual forma se toma como longitud del eje imaginario BB´ 2b, luego **OB = OB´ = b**.

Y la distancia focal es **FF´ = 2c**.

Relación entre a, b y c.

La relación pitagórica entre estos elementos principales es: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Ecuación reducida de la hiperbola de eje real OX

Se obtiene desarrollando la definición de hipérbola, y utilizando la relación entre los elementos principales

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Excentricidad.

Observando varias hipérbolas se ve que unas tienen la rama más abierta que otras. Esta característica de ser más abierta o más cerrada se mide con un número llamado **excentricidad (e)**, que es el cociente de c entre a: **e = c / a** , con **c>a**.

Como c>a, se deduce que la excentricidad de la hipérbola es un número mayor que1.

Si e tiende a 1, c tiende al valor de a y las ramas se cierran cada vez más. Por el contrario, cuanto mayor es la excentricidad, más se van abriendo las ramas de la hipérbola.

Asíntotas de la hipérbola.

Las **asíntotas** de la hipérbola son dos rectas a las que la curva se acerca indefinidamente sin llegar a tocarlas.

La ecuación de las asíntotas para una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, son $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

4. PARÁBOLA

Definición

La parábola es el conjunto de puntos P(x,y) del plano que está a la misma distancia de un punto F(foco), y de una recta fija d (directriz).

$$d\,(P,F) = d\,(P, d) = \frac{p}{2}$$

Elementos de la parábola.

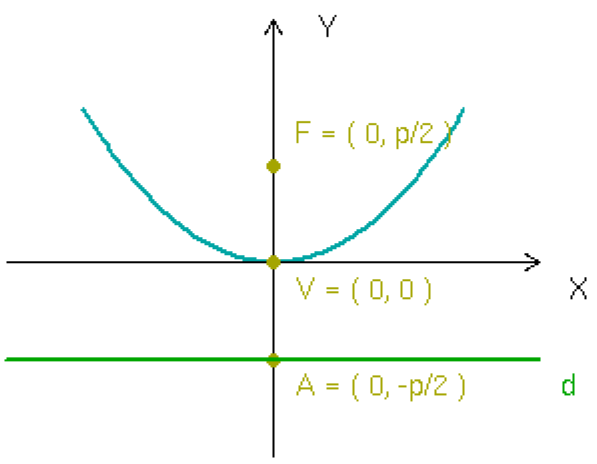
En la parábola se distinguen los siguientes elementos:

- El **foco** es el punto F.
- La **directriz** es la recta *d*.
- El **radio vector** de un punto P es el segmento PF que lo une al foco.
- El **parámetro** es la distancia FD del foco a la directriz *d* y se designa por *p*.
- El **eje de la parábola** es también un eje de simetría. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz **.** En la figura el eje de la parábola coincide con el eje Y.
- El **vértice** es el punto V en que el eje corta a la parábola.

Ecuación reducida de la parábola

Consideremos la parábola de eje OY y vértice el origen de coordenadas (0,0).

El foco F(0, $\frac{p}{2}$) y la recta directriz d: y=-$\frac{p}{2}$.



Aplicando la definición de parábola a un punto P(x,y) de la parábola:

d (P,F) = d (P, d) = $\frac{p}{2}$

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{\left|y+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado,

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\right)^2=\left(\frac{\left|y+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}\right)^2$$ obtenemos

$$x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$ desarrollando los binomios obtenemos**:**

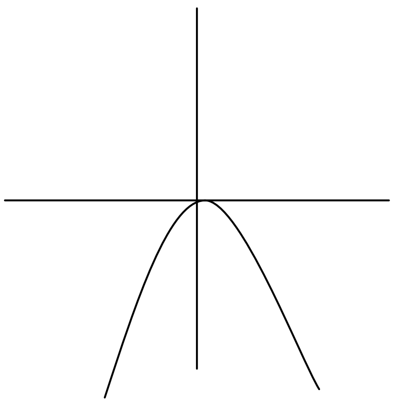
$$x^2+y^2-2y\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=y^2+2y\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Simplificando, queda: $x^2-yp=yp$ de donde obtenemos la ecuación de la parábola:

$$x^2=2py$$

Siguiendo un proceso similar obtenemos las ecuaciones de las parábolas en sus distintas formas:

$$\boxed{x^2=-2py}$$



5. LA TIERRA

Coordenadas geográficas.

La posición de un punto de la superficie terrestre queda determinada de forma exacta por dos coordenadas: su longitud y su latitud.

- La **longitud** de un punto es la medida del arco comprendido entre el meridiano de Greenwich (meridiano 0) y el meridiano que pasa por el punto. Se mide de 0º a 180º indicando si el punto está al este o al oeste del meridiano de Greenwich.
- La **latitud** es el arco de meridiano comprendido entre el ecuador y el punto. Se mide de 0º a 90º indicando si es al norte o al sur del ecuador.

Dos puntos son antípodas si son extremos de un segmento que pasa por el centro de la Tierra. Las antípodas de Jaén están en el mismo meridiano, pero en el hemisferio sur. Su latitud será 29º S y su longitud será 180º - 4º = 176º E. Sus coordenadas son, por tanto, 39º S, 176º E.

Distancia entre dos puntos del mismo paralelo.

Dos puntos A y B tienen como latitud 50º N. Si sus longitudes son de 35ª E y 20º O, ¿cuál es la distancia que los separa?

Calculamos primero la medida en grados del arco AB, 35º - (-20º) = 55º.
Para hallar el radio, r, del paralelo de la esfera terrestre de latitud 50º **Distancia entre puntos y husos horarios**:

$$\cos 50º = r / R = r / 6.370$$
$$r = \cos 50º \times 6.370 \text{ km} = 4.094,6 \text{ km}$$

Luego la distancia que separa los puntos A y B es de:

$$L = 2 \times 4.094,6 \times 55º / 360º = 3.928,5 \text{ km}$$

La distancia entre A y B es de 3.928,5 km.

Movimiento de la Tierra.

La Tierra gira sobre sí misma 1 vuelta completa cada 24 horas. Este movimiento de rotación da lugar a los días y a las noches, y produce las diferencias horarias entre los puntos de la Tierra con distinta longitud.

¿Qué diferencia horaria hay entre Barcelona y Bilbao?

Si tomamos las longitudes Este como positivas y la Oeste como negativas y las expresamos en grados tenemos que:

Barcelona: 2º 15´ este = 2 + 15 / 60 = 2,25º

Bilbao: 2º 57´ oeste= - 2,933º

Su diferencia es de 2,25º - (-2,933º) = 5,183º.

La Tierra gira 15º en 1 hora, luego el tiempo que tarda en girar 5,183º es de 5,183 / 15 = 0,346 horas o lo que es igual 20 minutos y 45,6 segundos.

El Sol sale 20 minutos y 45,6 segundos antes en Barcelona que en Bilbao.

La superficie terrestre se halla dividida en husos horarios en los que la hora oficial, no la solar, es la misma. Sus formas no coinciden con las de un huso esférico perfecto sino que se hacen basadas en criterios prácticos y políticos. Así aunque Barcelona y Bilbao no tienen igual hora solar, sí tienen la misma hora oficial.

Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

EJERCICIOS DE CONICAS

CIRCUNFERENCIA

1.- Halla la ecuación de la circunferencia de centro el origen de ordenadas y radio:
a) 2 b) ½ c) $\sqrt{7}$ d) 0,25

2.- Halla la ecuación de las siguientes circunferencias:
a) Centro (2 , 0) r = 3
b) Centro (0 , - 1) r = 4
c) Centro (- 4 , 3) r = 5

3.- Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos de coordenadas A (2 , 1) y B (6 , 3). Halla las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

4.- Halla el centro y el radio de las circunferencias de ecuaciones:
a) $x^2 + y \quad + 2x - 4y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$

5.- Halla la ecuación de la circunferencia de centro el punto P (2 , - 3) y que pase por el punto:
a) A (0 , - 4) b) B (1 , 1) c) C (- 3 , - 5)

6.- Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica con la circunferencia de ecuación $x^2 + y \quad - 4 = 0$, y cuyo radio es el triple.

7.- Halla la ecuación de la circunferencia de radio 5 unidades que tiene su centro en el punto C (1 , 3). Averigua cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella:
M (4 , 7) N (3 , 1) P (- 1 , 9) Q (1 , - 2)

ELIPSE

1.- Halla la semidistancia focal y la excentricidad de una elipse cuyos ejes mayor y menor miden respectivamente 20 cm y 16 cm.

2.- Halla la longitud del semieje menor de una elipse sabiendo que su eje mayor vale 34 cm y que su distancia focal es 16 cm y calcula la excentricidad de la elipse.

3.- Halla la longitud del semieje mayor de una elipse sabiendo que su eje menor mide 32 cm y que su distancia focal es de 24 cm. Calcular, asimismo, la excentricidad de dicha elipse.

4.- La excentricidad de una elipse es de 0,96 y su eje mayor mide 50 cm. Calcula el valor de su semieje menor y el de su semidistancia focal.

5.- La excentricidad de una elipse es de 0,6 y su distancia focal mide 40,5 cm. Calcula el valor de sus semiejes mayor y menor.

6.- La excentricidad de una elipse es de 0,8 y su eje menor mide 24 cm. Calcular el valor de su semieje mayor y el de su semidistancia focal.

En cada ejercicio escribe la ecuación de la elipse correspondiente

Colegio Antonio de Nebrija
Matemáticas

HIPÉRBOLA

1.- Halla la semidistancia focal y la excentricidad de una hipérbola cuyos ejes principal y secundario miden respectivamente 16 cm y 12 cm.

2.- Halla la longitud del semieje secundario de una hipérbola sabiendo que su eje principal vale 30 cm y que su distancia focal es de 34 cm y calcula la excentricidad de la hipérbola

3.- Halla la longitud del semieje principal de una hipérbola sabiendo que su eje secundario mide 24 cm y que su distancia focal es de 40 cm y calcula la excentricidad de dicha hipérbola.

4.- La excentricidad de una hipérbola es de 25/24 y su eje principal mide 48 cm. Calcular el valor de su semieje secundario y el de su semidistancia focal.

5.- La excentricidad de una hipérbola es de 1,25 y su distancia focal mide 67,5 cm. Calcula el valor de sus semiejes principal y secundario.

6.- La excentricidad de una hipérbola es de 5/3 y el eje secundario mide 16 cm. Calcula el valor del semieje principal y de la semidistancia focal.

En cada ejercicio escribe la ecuación de la hipérbola correspondiente

PARABOLA

1.- Escribe la ecuación de una parábola cuyo parámetro vale 5.

2.- ¿ Los puntos (1 , 2); (2 , 3); (4 , 4); (4 , - 4) pertenecen a la parábola $y^2 = 4x$

3.- ¿Cuál es el foco y cuál es la recta directriz de la parábola de ecuación $y^2 = 10x$

4.- Halla el foco y la recta directriz de la parábola $x^2 = 4y$ ¿Cuál es su eje? Dibuja esta parábola.