Aplicaciones de Anualidades

Matemática Comercial II

Prof. Ada E. Junco

Definición y ejemplos

- Anualidad: serie de pagos periódicos
- Ejemplos:
  - Hipoteca de una casa
  - Préstamo de un carro
  - Depósito mensual de una cantidad fija por cierto período de tiempo

Clasificación de anualidades

- Por términos
  - Definida
  - Contingente
  - Perpetuidad
- Por fecha de pagos
  - Ordinaria
  - Vencida
  - Diferida
- Por periodo de pago y de conversión
  - Simple
  - Compleja

Ver definiciones de cada una en el vocabulario de Mat. 152

Fórmulas de anualidades

$$M = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$P = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$$

donde: **M** es el monto de la anualidad

R el pago periódico

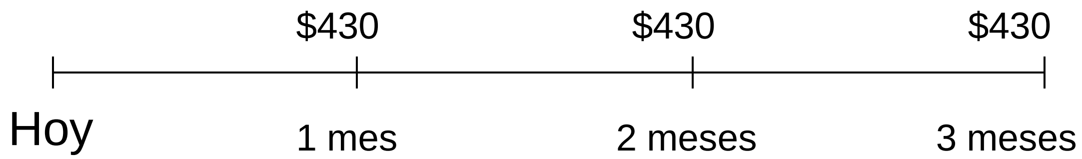
i la tasa periódica

n el total de pagos

Nota aclaratoria: Estas fórmulas aplican a anualidades definidas, ordinarias y simples. En este módulo se asume que las anualidades presentadas son de este tipo.

Ejemplo 1

- Se hacen 3 depósitos de $430 al final de cada mes por 3 meses en una cuenta que acumula un 5% anual computado mensualmente. Halle la cantidad en la cuenta al final del tercer mes.
- Solución:
  - Hacer un diagrama que represente esta situación



¿Representa esta situación una anualidad?

¿Qué harías para hallar el monto a los 3 meses?

Ejemplo 1-(cont.)

Para hallar el monto se tienen las siguientes opciones:

- Opción #1:Hallar el monto de cada depósito a los 3 meses usando la fórmula

$$M = P(1+i)^{n}$$

y después sumar las cantidades resultantes. Recuerda que "P" es el principal(en este caso cada depósito), "i" la tasa periódica y "n" el total de veces que se calculan los intereses en ese período.

Ejemplo 1(cont.)

- Opción #2: Hallar el monto de una anualidad de 3 pagos mediante la fórmula

$$M = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Si se selecciona la primera opción, sólo hay que buscar 2 montos ya que el último depósito se hace a los 3 meses. El monto total sería la suma de los montos de los primeros 2 depósitos y el último depósito.

Pero en la mayoría de los casos la última opción es más útil porque se reduce la cantidad de cálculos a realizar.

Imaginémonos que se hacen 60 o más depósitos. El usar la fórmula para calcular el monto de esa anualidad nos evita el tener que hallar 59 montos.

Ejemplo 1(cont.)

Usando la fórmula para calcular el monto se obtiene:

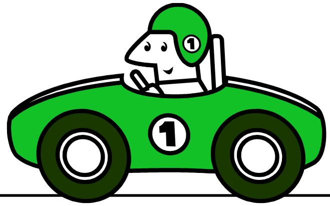
$$M = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{430\left[\left(1+\frac{.05}{12}\right)^3 - 1\right]}{\frac{.05}{12}} = 1{,}295.38$$

Contestación: A los 3 meses habrá $1,295.38 en la cuenta.

Ejemplo 2
Hallar el precio "cash" de un carro

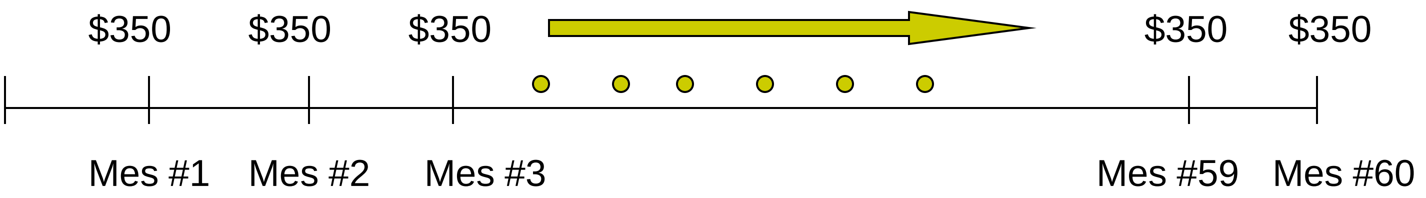
- Elsa compró un carro sin dar ningún pronto y pagando 60 mensualidades de $350. Si el préstamo tenía una tasa de interés de un 7% anual computado mensualmente, halle el precio "cash" del carro.

Ejemplo 2(cont.)



- Solución:
  - Las mensualidades fijas de $350 nos indican que este caso representa una anualidad.
  - El precio “cash” sería la cantidad a pagar en la fecha inicial para saldar el carro.

Ejemplo 2(cont.)
Diagrama de la situación



Como ya se mencionó, el precio "cash" es la cantidad a pagar por el carro en la fecha inicial; o sea, el valor presente de esa anualidad . Para hallar el mismo se debe usar la siguiente fórmula.

$$P = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

donde "R" es el pago periódico, "i" la tasa periódica y "n" el total de pagos.

Ejemplo 2(cont.)

Sustituyamos en la fórmula

$$P = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} = \frac{350[1-(1+.07/12)^{-60}]}{.07/12} = \$17,675.70$$

Contestación: El precio “cash” del carro es $17,675.70

Ejemplo 2(cont.)

Preguntas relacionadas

- ¿Cuánto pagó en total Elsa por el carro?
  - Elsa pagó 60 mensualidades de $350. Por lo tanto pagó 60 ($350), que es igual a $21,000.
- ¿Cuánto pagó en intereses?
  - Si el precio "cash" del carro era $17,675.70 y ella pagó un total de $21,000, la cantidad pagada en intereses fue:

    21,000 - 17,675.70 = 3,324.30

    Pagó $3,324.30 en intereses

Ejemplo 3

- ¿Cuál sería el precio "cash" del carro del ejemplo anterior si además de las mensualidades, se pagó $3,000 de pronto?
  - Solución:
    - Como los $3,000 se pagaron en la fecha inicial, el precio "cash" sería el pronto más el valor presente de la anualidad. Esto es,

      $$3{,}000 + 17{,}675.70 = 20{,}675.70$$

      Contestación:El precio "cash" sería $20,675.70

Ejemplo 3
Mensualidad de una casa

José desea comprar una casa valorada en $170,000. Tiene $12,000 para dar de pronto y consigue un préstamo por 30 años al 7.5% anual computado mensualmente. Si la mensualidad más alta que puede pagar José es de $675, ¿podrá comprar esa casa o deberá buscar otra más económica?

Ejemplo 3(cont.)
Análisis de José

- José cree que podrá comprar esa casa ya que hizo el siguiente análisis:
  - En mensualidades pagará un total de: $675(360)=$243,000
  - Si la casa cuesta $170,000 y además de dar un pronto de $12,000 él va a pagar $243,000 en mensualidades, está seguro que la mensualidad será menor que $675 y por lo tanto, podrá comprarla.

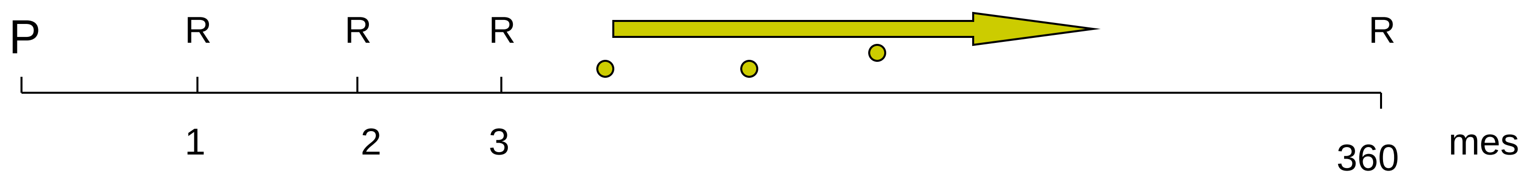
Ejemplo 3(cont.)

¿Estará correcto el análisis que hizo José?

- Para determinar si José podrá comprar esa casa, se necesita saber cuál sería la mensualidad de la misma, ya que lo más que él puede pagar es $675 mensuales.

Como el pago mensual es fijo, este es un ejemplo de una anualidad y la mensualidad de la casa es el pago periódico de la misma.

Ejemplo 3(cont.)
Diagrama de la situación



Para buscar el pago periódico (R) de la anualidad se debe usar la siguiente fórmula:

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$$

donde “P” es el valor presente, “i” la tasa periódioca y “n” el total de pagos

Ejemplo 3(cont.)

Solución: Los valores a sustituir en la fórmula son:

P: el valor presente de la anualidad por pagar (o sea, la deuda que quede después de pagar el pronto). En este caso es **158,000** (170,000 – 12000)

i: la tasa periódica=(tasa anual)/(veces al año que se computan los intereses). En este caso es **.075/12.**

n: total de pagos. En este caso es **360**.

Ejemplo 3(cont.)

- Al sustituir en la fórmula obtenemos:

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{158{,}000(.075/12)}{1-(1+.075/12)^{-360}} = 1{,}104.76$$

El pago mensual de la casa es $1,104.76.

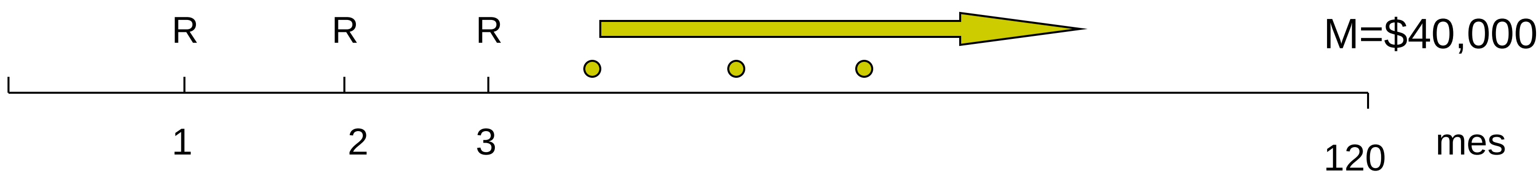
Contestación: Lo más que puede pagar José es $675 mensualmente. Por lo tanto, no puede comprar esta casa; debe buscar una más económica.

Ejemplo 4
Plan de ahorro

- Luisa desea tener $40,000 dentro de 10 años. Si sus ahorros se pueden invertir al 5.5% anual computado mensualmente, halle la cantidad a ahorrar mensualmente para lograr su meta.

Lo que se desea hallar es el depósito mensual; en otras palabras el pago periódico de la anualidad. Tenemos 2 fórmulas para hallar este pago , pero en este caso se tiene el monto. Por lo tanto, se usa la fórmula para "R" que tiene la "M"(el monto).

Ejemplo 4(cont.)
Diagrama de la situación



Para buscar el pago periódico (R) de la anualidad se debe usar la siguiente fórmula:

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1}$$

donde “M” es el monto de la anualidad, “i” la tasa periódioca y “n” el total de pagos

Ejemplo 4-(cont.)

Sustituyendo en la fórmula se obtiene

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^n - 1} = \frac{40000\left(\frac{0.055}{12}\right)}{\left(1+\frac{0.055}{12}\right)^{120} - 1} = 250.77$$

Contestación: Luisa debe depositar $250.77 mensualmente para llegar a tener $40,000 dentro de 10 años.

Ejercicios de práctica

- Práctica #1
- Práctica #2