XII

APLICACIÓN: CÁLCULO DE ÁREAS

El estudiante, hasta este momento de sus estudios, está familiarizado con el cálculo de áreas de figuras geométricas regulares a través del uso de fórmulas, como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, la circunferencia, el rombo, el trapecio, etc., y es muy probable que se haya imaginado que cualquier área se calcula a través de una fórmula. Pero no es así.

Lo que sucede es que no todas las fi guras geométricas son regulares, como las mencionadas en el párrafo anterior, sino que pueden crearse áreas que estén limitadas por las gráficas de algunas funciones, como por ejemplo el área marcada en la figura 12.1, la cual está acotada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -4x + 12$ y el eje de las x. Para calcular esta área no es posible hacerlo a través de fórmulas, sino con el cálculo integral.

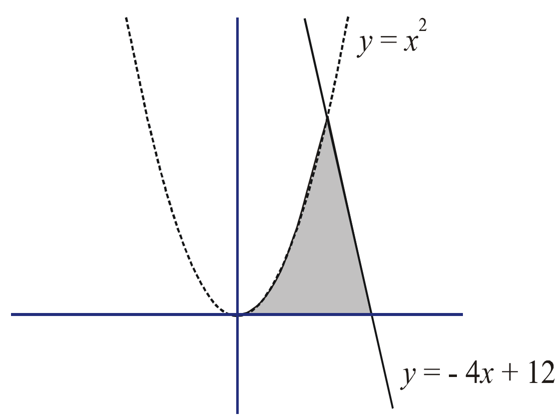


figura 12.1

Supóngase que se quiere calcular el área bajo la curva de la gráfica de una función cualquiera $y = f(x)$, como lo muestra la figura 12.2. Se entiende por "área bajo la curva" la proyección que resulta desde la curva hasta el eje de las x, algo así como la sombra que resultaría de la curva hasta el eje de las x si se pusiera una fuente de luz arriba de la curva lo suficientemente alejada para que los extremos izquierdo y derecho de dicha sombra resulten verticales, no oblicuos.

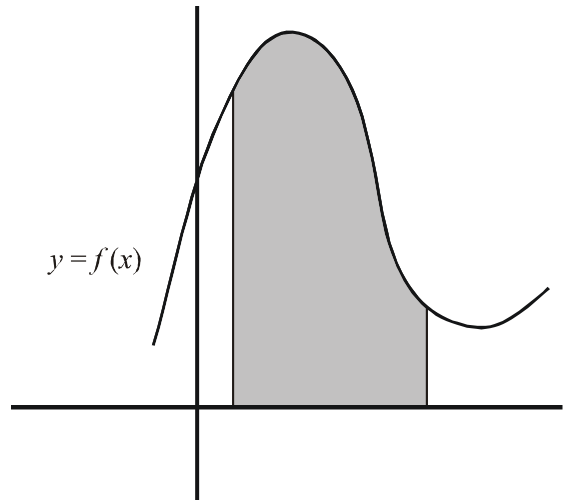


figura 12.2

Para obtenerla, se divide el área a calcular en rectángulos, todos con la misma base, de manera que la curva $y = f(x)$ pase por el centro de la *contrabase* de cada rectángulo. Entiéndase por *contrabase* el lado opuesto a la base (el de arriba). De esta manera, la altura de cada rectángulo es exactamente la ordenada (la y) en ese punto de la curva correspondiente a $y = f(x)$. Ver la figura 12.3.

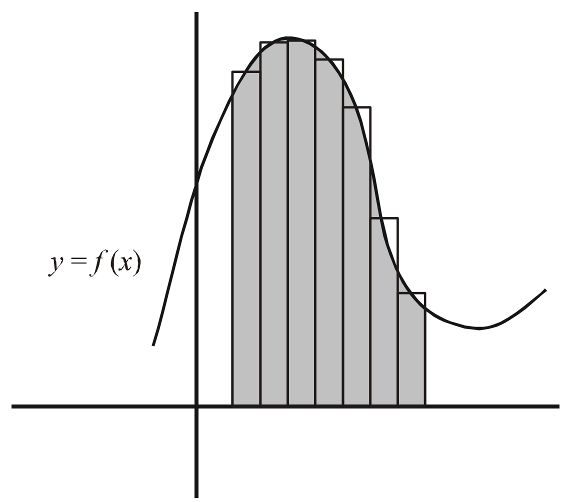


figura 12.3

La figura 12.4 (página siguiente) representa uno de estos rectángulos amplificados y aislados de los demás para mostrar con mayor claridad cómo la altura de cualquier rectángulo es la ordenada y de la curva, si el centro de la contrabase de dicho rectángulo pasa por la curva (punto P).

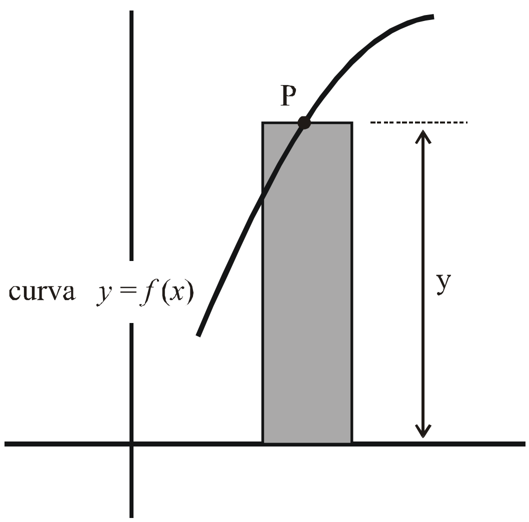


figura 12.4

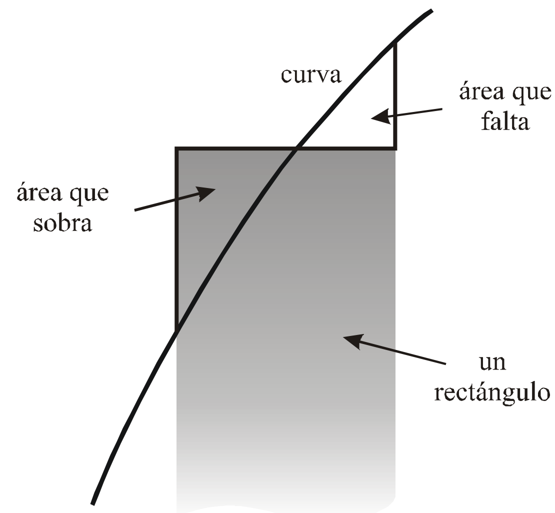


figura 12.5

Es obvio e intuitivo que la suma de las áreas de los rectángulos no es exactamente igual al área que se desea calcular, ya que de la mitad del rectángulo hacia la izquierda por su parte superior, el rectángulo "se pasa" y hace que haya más área, mientras que de la mitad hacia la derecha el rectángulo "no alcanza" y hace que haya menos área, como lo muestra la figura 12.5.

Si el área que sobra fuera igual al área que falta no habría ningún problema, pero no son iguales porque no es una linea recta la gráfica de $y = f\left(x\right)$. La diferencia entre el área que sobra y el área que falta es lo que se considera "el error". Dicho error aumenta cuando la longitud de la base de los rectángulos aumenta y disminuye cuando la base también se hace más pequeña. Entonces, si la base de los rectángulos se hace cada vez más pequeña de manera que tienda a cero su longitud, el error a su vez también tiende a cero, lo que significa que la suma de las áreas de los rectángulos tiende a ser exactamente el área bajo la curva de $y = f(x)$. La longitud de dicha base que tiende a cero es dx, y su altura es y , por lo que el área de cada *rectángulo generador* es $A = y\,dx$.

La suma de todas las áreas de los rectángulos así generados está dada por la integral

$$A = \int y\,dx = \int f\left(x\right)dx$$

en donde solamente hace falta especificar desde dónde hasta dónde se extiende esa área. En al figura 12.6 se muestra en términos generales que esa área se extiende desde que x vale a hasta que x vale b; esto es, desde $x = a$ hasta $x = b$, lo cual se expresa como

$$A = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

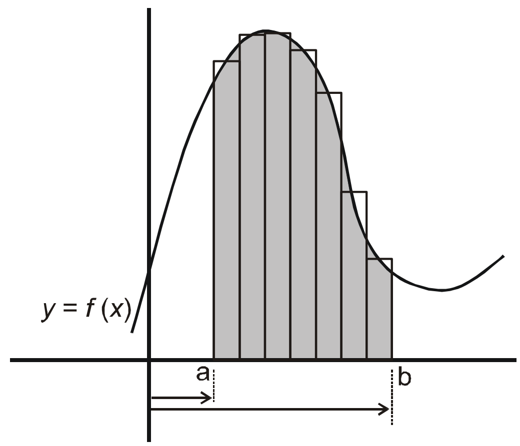


figura 12.6

Ejemplo 1 Calcular el área bajo la curva $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Solución: La figura 12.7 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Conforme a lo dicho anteriormente, dicha área se obtiene por medio de la integral

$$A = \int_0^2 x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \underbrace{\frac{2^3}{3}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\frac{0^3}{3}}_{\text{límite inferior}}$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

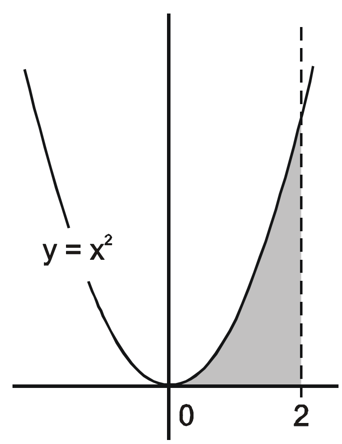


figura 12.7

Ejemplo 2: Hallar el área bajo la curva $y = x^2 - 2x + 3$, entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución: La figura 12.8 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Conforme a lo dicho anteriormente, dicha área se obtiene por medio de la integral

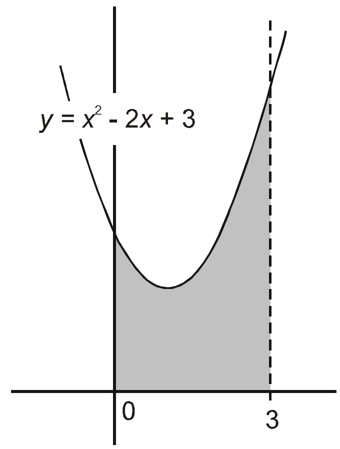


figura 12.8

$$A = \int_0^3 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right|_0^3$$

$$= \underbrace{\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3(3)}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 3(0)\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$\boxed{A = 9}$$

Ejemplo 3: Hallar el área limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución: En la figura 12.9 se muestran las dos parábolas y el área solicitada entre ellas.

Lo primero que deben obtenerse son las coordenadas del punto p , ya que éste define los límites de integración. Dichas coordenadas se obtienen resolviendo por simultáneas las dos ecuaciones que pasan por p:

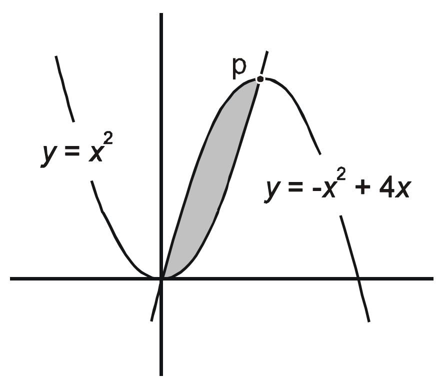


figura 12.9

$$\begin{cases} (1) \quad y = x^2 \\ (2) \quad y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

sustituyendo (1) en (2):

$$x^2 = -\, x^2 + 4x$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

de donde

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$

Se han obtenido dos valores porque si se observa en la figura 12.9 realmente hay dos puntos en donde ambas parábolas se cortan, uno en el origen (es la primera solución $x_1 = 0$) y el otro adentro del primer cuadrante (es la segunda solución obtenida $x_2 = 2$). De hecho, éste es el punto buscado.

Además, como se ve en la figura 12.10, el área pedida es realmente la resta del área bajo la curva $y_1 = -x^2 + 4x$ menos el área bajo la curva $y_2 = x^2$, por lo que dicha área es la resta de las integrales:

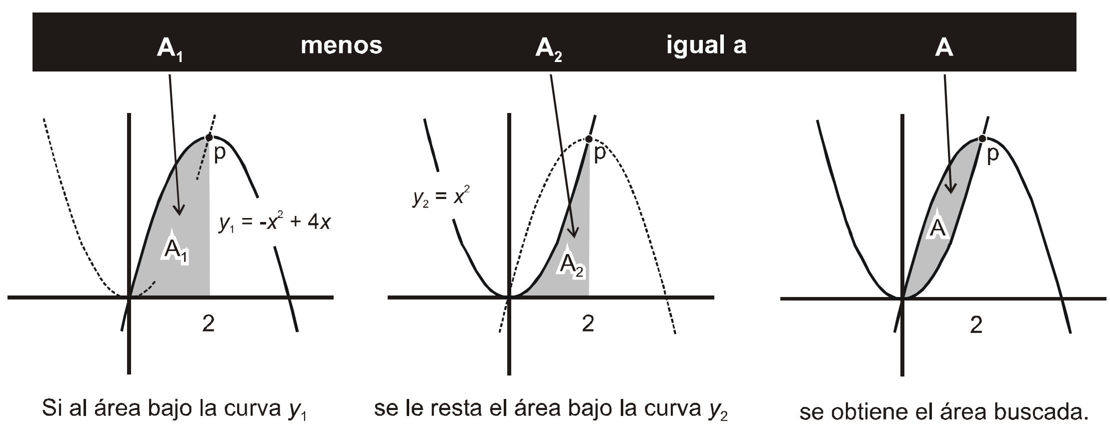


figura 12.10

$$A = \int_0^2 \left(-x^2 + 4x\right) dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \Bigg|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^2$$

$$= \underbrace{-\frac{2^3}{3} + 2\left(2\right)^2}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[-\frac{0^3}{3} + 2\left(0\right)^2\right]}_{\text{límite inferior}} - \left[\underbrace{\frac{2^3}{3}}_{\text{lím sup.}} - \underbrace{\frac{0^3}{3}}_{\text{lím inf.}}\right]$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

Ejemplo 4: Hallar el área limitada por las dos ramas de la parábola $x = \left(y - 2\right)^2$ y la recta $x = 4$.

Solución: La figura 12.11 muestra el área a la que se refiere el enunciado de este problema. Lo primero que debe hacerse es despejar la variable dependiente y de la ecuación $x = \left(y - 2\right)^2$:

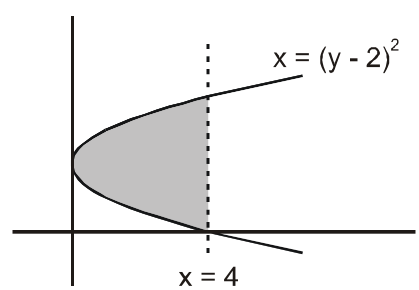


figura 12.11

Primero se saca raíz cuadrada. Recordar que toda raíz cuadrada es positiva y negativa, por lo que

$$\pm\sqrt{x} = y - 2$$

de donde

$$y = 2 \pm \sqrt{x}$$

La interpretación del signo $\pm$ está detallada en la figura 12.12. Para cualquier abscisa $x = p$, le corresponden en la gráfica dos ordenadas, una *ye* grande y una *ye* chica. La *ye* grande se obtiene cuando al 2 se le suma una cantidad, en este caso $y = 2 + \sqrt{x}$ y la *ye* chica cuando al mismo 2 se le resta una cantidad $y = 2 - \sqrt{x}$.

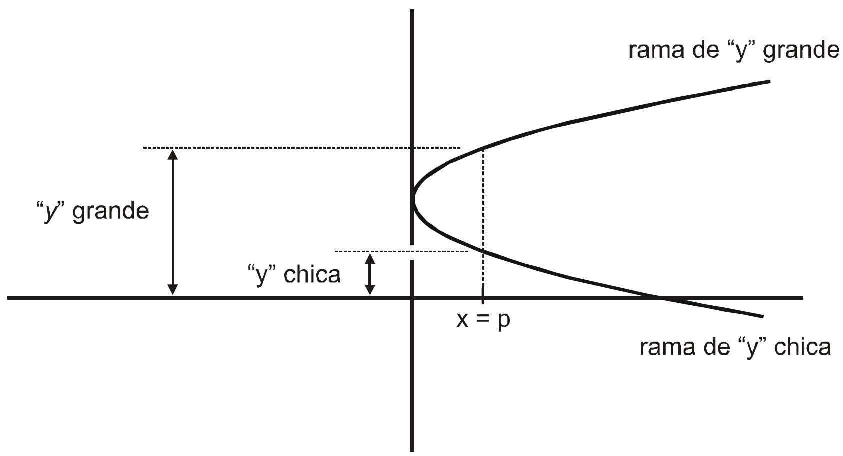
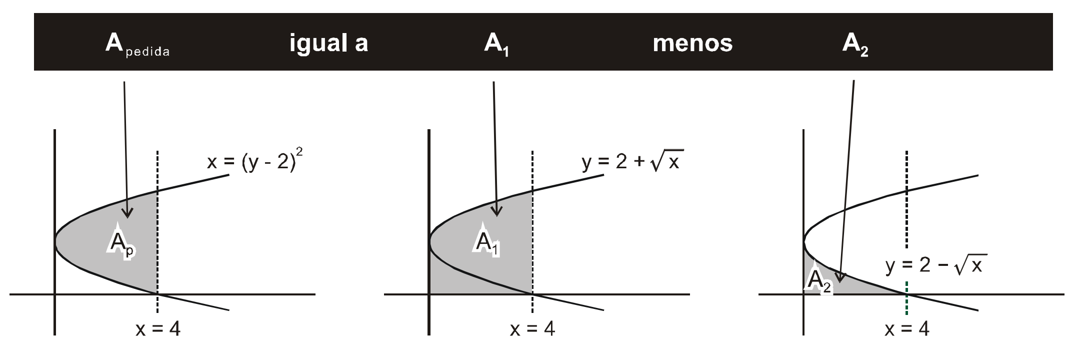


figura 12.12

El área pedida es la resta del área bajo la curva de la rama grande menos el área bajo la curva de la rama chica, como se ve en la figura 12.13.

$$A = \int_0^4 \left(2 + \sqrt{x}\right) dx \ - \int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx$$



El área pedida es igual a al área bajo la rama grande menos el área bajo la la rama chica

figura 12.13

Cuando se tiene una suma o resta de integrales con los mismos límites de integración, se puede tomar como una sola integral:

$$A = \int_0^4 \left[2 + \sqrt{x} - \left(2 - \sqrt{x} \right) \right] dx$$

$$A = \int_0^4 2\sqrt{x}\ dx$$

$$A = \left. \frac{4x^{3/2}}{3} \right|_0^4$$

$$A = \underbrace{\frac{4(4)^{3/2}}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{superior}}} - \underbrace{\frac{4(0)^{3/2}}{3}}_{\substack{\text{límite}\\ \text{inferior}}}$$

$$\boxed{A = \frac{32}{3}}$$

Ejemplo 5 Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la recta $y = -x + 4$ y los dos ejes (figura 12.14).

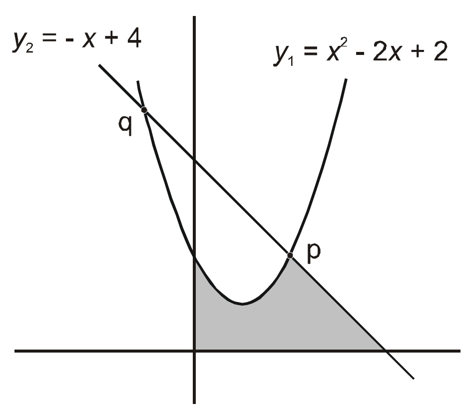


figura 12.14

Solución: En este caso, el área pedida debe dividirse en dos partes, ya que una parte de ella está bajo la parábola y la otra bajo la recta.

Para eso, primero deben calcularse las coordenadas del punto p de intersección de la recta y la parábola, a partir del cual se deberá dividir el área en dos. Recordar que esto se logra resolviendo por simultáneas las ecuaciones de la recta y la curva que se cortan en un mismo punto.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Como ambas son iguales a y, se pueden igualar entre sí:

$$x^2 - 2x + 2 = -x + 4$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

de donde

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$

Por simple inspección con la figura 12.14, se puede deducir que el valor de $x_1 = 2$ corresponde al punto p y el de $x_2 = -1$ al punto q.

Por otra parte, también se requiere conocer las coordenadas del punto en donde la recta corta al eje de las x, lo cual se logra cuando $y = 0$ en la ecuación de la recta, o sea

$$y = -x + 4$$
$$0 = -x + 4$$
$$x = 4$$

Entonces el área debe dividirse en dos partes como se ve en la figura 12.15. La suma de ambas es el área pedida, esto es

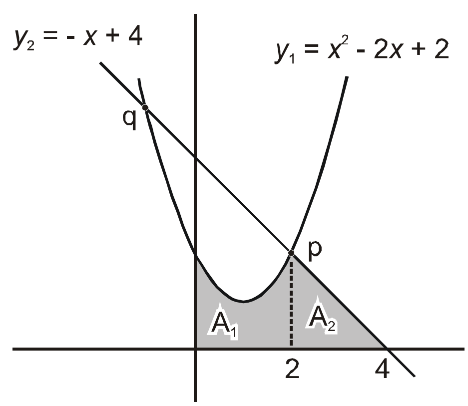


figura 12.15

$$A = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx + \int_2^4 \left(-x + 4\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{-x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^4$$

$$= \frac{2^3}{3} - 2^2 + 2(2) - \frac{4^2}{2} + 4(4) + \frac{2^2}{2} - 4(2)$$

$$\boxed{A = \frac{14}{3}}$$

Ejemplo 6 Hallar el área de la circunferencia de radio $r = 5$ con centro en el origen.

Solución: Las coordenadas del centro de la circunferencia no hacen variar su área; por lo tanto, por simplicidad se han puesto en el origen. Como se ve en la figura 12.16 bastaría calcular el área del primer cuadrante y luego multiplicarla por cuatro.

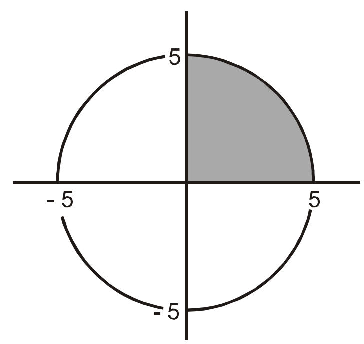


figura 12.16

La ecuación de radio 5 y centro en el origen, según se estudió en Geometría Analítica, es $x^2 + y^2 = 25$. De allí despejando y:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

que del $\pm$ que aparece, las positivas corresponden a las y'es del primero y segundo cuadrante mientras que las y'es negativas a las del tercero y cuarto cuadrante. Así que el área buscada es cuatro veces el área positiva del primer cuadrante:

$$A = 4\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$$

$$A = 4\left(\frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} + \frac{25}{2}\, arc\, sen\, \frac{x}{5} \right) \Bigg|_0^5$$

$$= 4\left[0 + \frac{25}{2}\, arc\, sen\, 1 - \left(0 + \frac{25}{2}\, arc\, sen\, 0 \right) \right]$$

$$= 4\left[\frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$A = 25\pi$, (o sea πr^2 que se obtiene por fórmula)

$$\boxed{A = 78.5398}$$

Ejemplo 7 Hallar el área limitada por la parábola, la circunferencia, la recta y el eje *y* que se muestran en la figura 12.17.

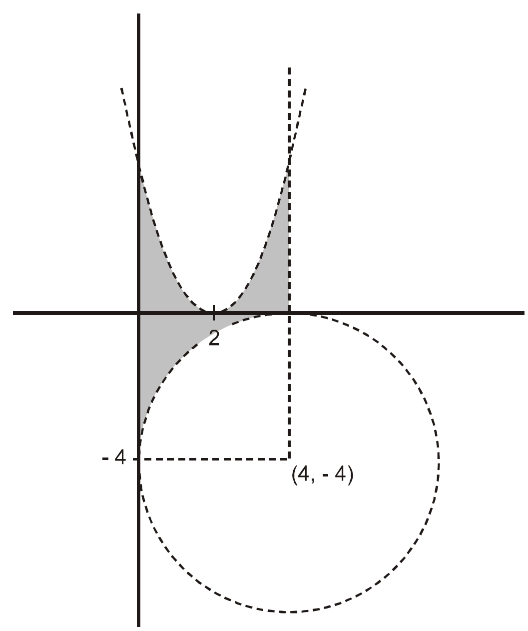


figura 12.17

Solución: La parábola tiene el vértice en V(2, 0). Su ecuación, por lo tanto, es

$$y = (x - 2)^2 + 0$$

o sea

$$y = x^2 - 4x + 4$$

La circunferencia tiene su centro en $C(4, -4)$ y su radio es 4, por lo tanto su ecuación es

$$(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

La recta vertical pasa en todo lugar por $x = 4$, por lo tanto su ecuación es $x = 4$.

Aquí debe tenerse presente que un área tomada desde el eje x hacia arriba hasta la curva es un área **bajo** la curva y es positiva; en cambio, un área tomada desde el eje x hacia abajo hasta la curva es un área **sobre** la curva y es negativa. Ver la figura 12.18.

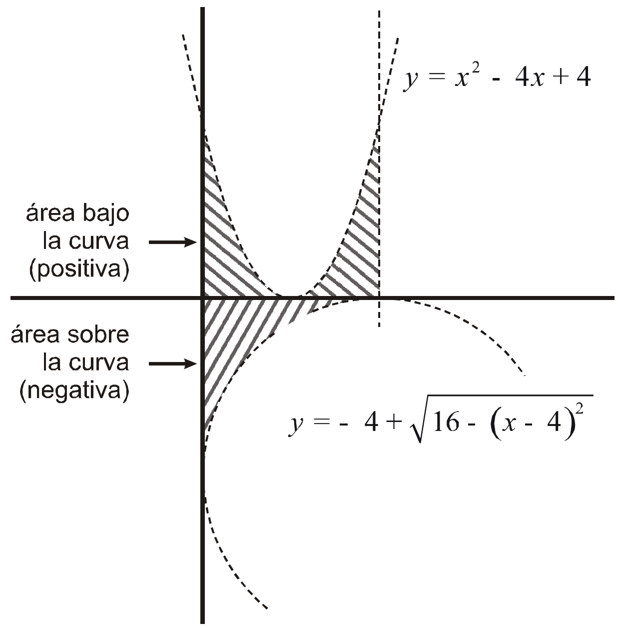


figura 12.18

Sean A_1 el área bajo la curva y A_2 el área sobre la curva de la figura 12.18. Como el área total buscada es la suma de ambas, si se hace

$$A = A_1 + A_2$$

como A_2 es negativa en la realidad se estaría haciendo una resta de A_1 menos A_2. Entonces para que realmente sea una suma debe hacerse

$$A = A_1 - A_2$$

$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx - \int_0^4 \left(-4 + \sqrt{16 - (x-4)^2}\right) dx$$

Como ambas tienen los mismos límites de integración pueden meterse en una sola integral:

$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 4x + 8 - \sqrt{16 - (x-4)^2}\right) dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x - \left(\frac{x\sqrt{16-(x-4)^2}}{2} + \frac{16}{2} arc\,sen \frac{x-4}{4} \right) \Bigg|_0^4$$

$$A = \frac{64}{3} - 2(4)^2 + 8(4) - 0 - 8arc\,sen\,0 - 0 + 0 - 0 + 0 + 8arc\,sen(-1)$$

$$A = \frac{64}{3} - 2(4)^2 + 8(4) + 8\left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\boxed{A = 8.76}$$

NOTA: El arco seno de menos uno es igual a 270 grados. Sin embargo, como deben considerarse ángulos θ tales que $0 \le \theta \le 180$ entonces $arc\,sen(-1) = -90$ grados. Pero los ángulos deben tomarse en radianes, así que $arc\,sen(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 34

Obtener las áreas que se piden:

1) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$, el eje *x*, el eje *y*, y la recta $x = 3$.

2) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 3$, el eje *x*, el eje *y*, y la recta $x = 2$.

3) El área limitada por la parábola $y = x^2 + 2$ y las rectas $x = -1$, $x = 2$ y $y = 0$.

4) El área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 4$ y los dos ejes.

5) El área limitada por la parábola $y = x^2 - 6x + 11$, los dos ejes y la recta $x = 3$.

6) El área limitada por la parábola $y = -9x^2 + 6x$ y el eje *x*.

7) El área limitada por la parábola $y = -4x^2 + 12x$ y el eje *x*.

8) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, y las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$.

9) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, y las rectas $y = 0$, $x = 2$ y . $x = 9$.

10) El área limitada por la parte inferior de la circunferencia $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y . $x = 8$.

11) El área más pequeña limitada por la circunferencia $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$ y la recta $y = -2x + 9$.

12) El área más pequeña limitada por la circunferencia $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$ y la recta $x - 2y + 3 = 0$.

13) El área limitada por la circunferencia $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 25$, los dos ejes y las rectas

$x+2y-10=0$ y $x=6$.

14) El área más pequeña del primer cuadrante limitada el eje de las x, por la circunferencia $(x-15)^2+(y-10)^2=169$ y la recta $3x+2y-39=0$.

15) El área limitada por la parábola $x^2+10y-30=0$, el eje x y las rectas $y=x-2$ y $x=9$.

16) El área limitada por la rama superior de la parábola $x^2+10y-30=0$ con las rectas $x=5$, $x=9$ y $3x-4y+17=0$.

17) El área limitada por las parábolas $y^2-x-10y+30=0$ y $y^2+x-14y+40=0$.