Utilización y aplicación de propiedades geométricas en entornos de problemas

Ricardo Barroso Campos
Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla.

Resumen

En este documento ponemos de manifiesto la importancia que representa la utilización de propiedades geométricas en la resolución de problemas.

Distinguimos teóricamente la mera utilización de una propiedad y la aplicación de la misma en un determinado problema, que puede ser correcta o incorrecta si no se tienen en cuenta todos los requisitos requeridos.

Mostramos lo que puede ser considerado como entorno próximo o alejado de una propiedad geométrica en un determinado problema.

Utilizaremos en nuestro análisis la teoría de van Hiele.

Abstract:

In this document we show the importance that represents the use of geometric properties in the resolution of problems.

We theoretically distinguished the mere use of a property and the application of the same one in a certain problem, that can be correct or incorrect if all the requirements for their application do not consider.

We showed what can be considered like next or moved away surroundings of a geometric property in a certain problem.

Will use in our analysis the van Hiele theory.

Introducción

La utilización de una propiedad y la aplicación correcta de la misma es una consideración que hay que tener presente en el marco teórico de de la comprensión de las propiedades geométricas.

Una propiedad geométrica se comprende cuando

se utiliza, es decir, *simplemente* se implica en el razonamiento deductivo que se esté realizando, y

se aplica de manera correcta, teniendo en cuenta todos los requisitos necesarios para ello.

Para van Hiele (1985), en Matemáticas y más específicamente en Geometría, se pueden discernir cinco niveles pensamiento:

Primero: visual

Segundo: descriptivo

Tercero: teórico, con relaciones lógicas, y geométricas generadas de acuerdo con Euclides.

Cuarto: lógio-formal.

Quinto: establecido por la naturaleza de las leyes lógicas.

Tendremos en cuenta ambos marcos para este documento.

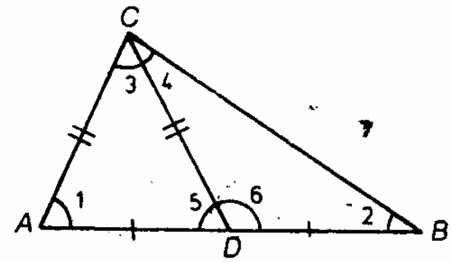
Primer análisis

En Sánchez (1983), el autor hace una utilización de una propiedad que es correcta.

A lados iguales se oponen ángulos iguales.

1. Establezca los ángulos iguales en la figura que se muestra:

Ejemplo 1



Solución:

De acuerdo a la figura

$$\overline{AC} = \overline{CD}$$

Por lo que:	$\angle 1 = \angle 5$	**Ya que a lados iguales se oponen ángulos iguales.**
y	$\overline{AD} = \overline{DB}$	**Por datos de la figura.**
Por lo que	$\angle 3 = \angle 4$	**Por ser ángulos opuestos a lados iguales**

Respuesta: **los ángulos iguales son** $\angle 1 = \angle 5$ **y** $\angle 3 = \angle 4$

(Reproducido con autorización de Editorial Playor)

La utilización está "bien aplicada" en el caso de los ángulos 1 y 5, y "mal aplicada" en el caso de los ángulos 3 y 4.

Consideramos que un exceso en la presumible generalización lleva a este autor a no tener en cuenta el "entorno" en el que la propiedad debe aplicarse.

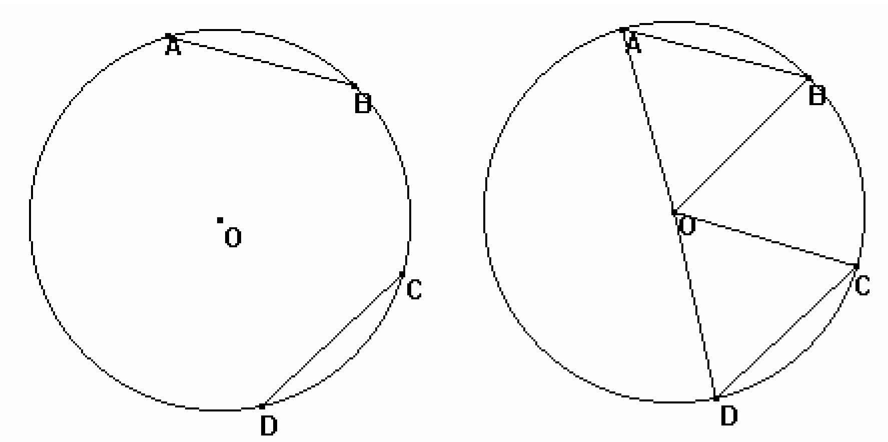
Analicemos detenidamente la propiedad.

A lados iguales se oponen ángulos iguales.

¿Cuál es el fundamento geométrico de la misma?

Consideramos que una primera base teórica para su estudio es la circunferencia.

Sea una circunferencia de centro O, y sean las cuerdas AB y CD de igual longitud.



Los triángulos AOB y COD tienen todos sus lados homólogos de igual longitud, dos radios cada uno de ellos, OA, OB y OC, OD, respectivamente, y el tercer lado AB y CD iguales por construcción.

Por tanto, son congruentes, y los ángulos AOB y COD son iguales, cqd.

Por tanto, en este entorno primario y anexo a la propiedad, es decir, el entorno del que surge, ésta se enunciaría de la siguiente manera:

En una circunferencia, si tenemos dos cuerdas de la misma longitud, los correspondientes ángulos centrales abarcados son iguales.

Una vez demostrada, la propiedad amplía su entorno de aplicación hacia los triángulos, en lo que podríamos denominar un entorno secundario, y con una cierta *distancia* de la propiedad.

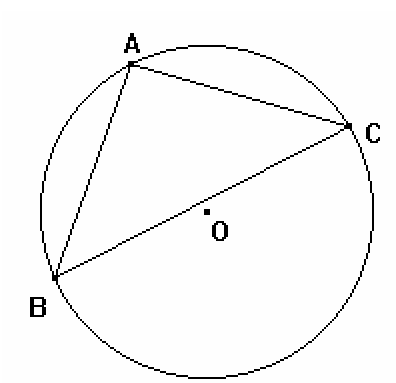
En un triángulo, a lados iguales, se oponen ángulos iguales.

Esta propiedad, con la referencia expresa a su aplicación en triángulos, se demuestra de la siguiente manera:

Sea ABC un triángulo. Sean AB=AC. Los ángulos opuestos a dichos lados, C y B, coinciden.

Sea pues, ABC un triángulo.

Tracemos la circunferencia circunscrita.



Evidentemente, si BA=AC, debido al entorno primario de la propiedad referida a cuerdas sobre la circunferencia, es:

AOB=AOC, y dado que los ángulos C y B miden la mitad del ángulo central, C=B, cqd.

Un entorno alejado de la propiedad se puede observar en el Teorema de Blanchet

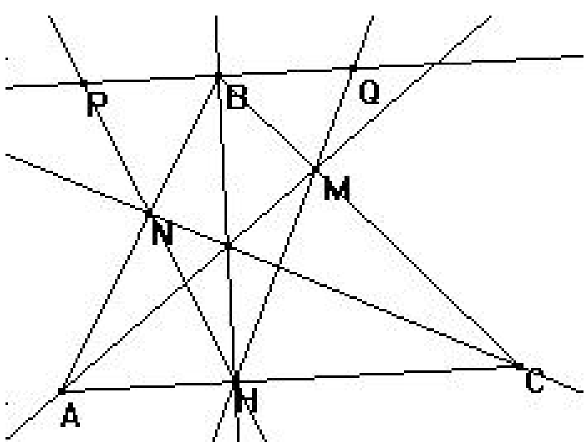
71.- Teorema de Blanchet.

En todo triángulo ABC de altura BH, al trazar las cevianas AM y CN concurrentes con BH, se establece que la altura será bisectriz del ángulo MHN (Frère Gabriel-Marie,1912)

Según Miranda (2003), la solución se plantea así: Veamos la siguiente figura y los trazos adecuados que hay que efectuar y que la demostración indica:

Por B trazamos una paralela a AC tal que corta a las prolongaciones de HN y HM en los puntos P y Q, respectivamente.

Luego HB es perpendicular a PQ.



Como AM, BH y CN son concurrentes, apliquemos el Teorema de Ceva:

(AN)(BM)(CH)= (NB) (MC) (HA),

Pero el triángulo PBN es semejante al AHN, por lo que
(AN) (PB)=(NB)(AH)

Además, BQM es semejante a HMC , y (BM)(HC) =(BQ)(MC) .

Multiplicando estas igualdades, se obtiene que:

AN PB BM HC = NB AH BQ MC

Simplificando PB = BQ, y, en consecuencia, PHQ es isósceles y

los ángulos NHB y MHB son iguales, c.q.d.

En esta ocasión, la propiedad se aplica en un entorno alejado.

En el enunciado del teorema, no se encuentra ninguna alusión a la propiedad, que es utilizada por Miranda para demostrarlo, después de haber utilizado el Teorema de Ceva.

Evidentemente, la propiedad a *lados iguales se oponen ángulos iguales* en el caso analizado, es correcta por su implicación en una situación geométrica desplazada de su sentido original circular, y en un sentido geométrico implicado en un triángulo isósceles (HPQ) generado en el desarrollo del razonamiento geométrico.

Analicemos la utilización de la propiedad en el ejercicio resuelto por Sánchez (1983)

A)El entorno de aplicación de la propiedad es correcto en el "caso" de los ángulos 1 y 5, ya que los considera en el mismo triángulo ADC, siendo AC=CD, es utilizada y aplicada correctamente.

B) El entorno de aplicación de la propiedad es incorrecto en el "caso" de los ángulos 3 y 4, ya que AD= DB, "pero"

1.- No son cuerdas de circunferencia

2.- No son lados de triángulo

Por ello, la aplicación es incorrecta, y el resultado, falso.

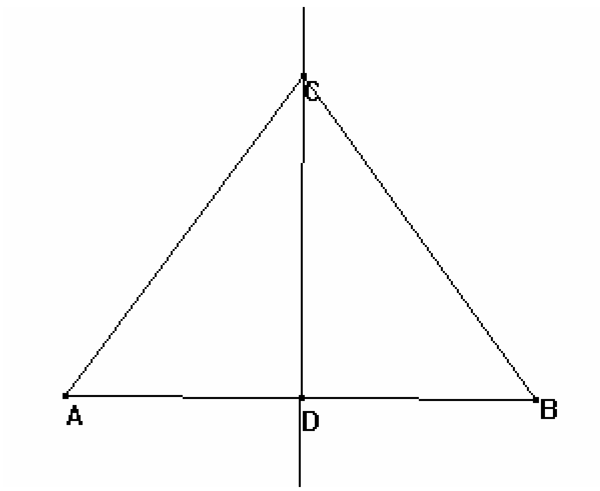
Podemos preguntarnos, si Sánchez tendría razón en esta segunda utilización en algún caso.

La respuesta es que sí.

Si en la situación geométrica C fuese tal que
CD AB, y
AD=DB,
sin ser AC=DC,

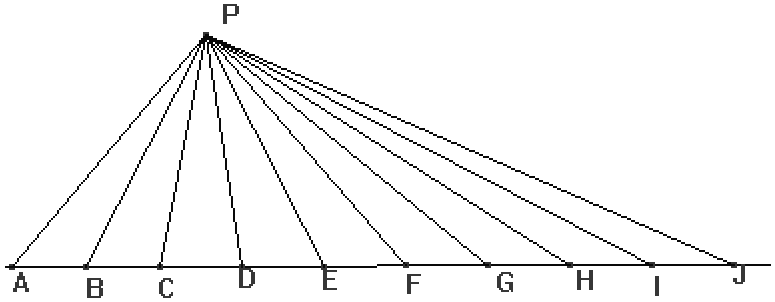
"sí sería" aplicable, pero mediante otras consideraciones, relativas a los triángulos ADC y CDB. Ambos serían congruentes, por ser rectángulos y tener sus catetos iguales.

Claro es que en este caso, no sería más que una aplicación "correcta inconsciente" y que su veracidad, como hemos visto, no se basa en la propiedad aplicada sino en consideraciones acerca de las propiedades de los triángulos, siendo de esta manera un entorno muy alejado de la propiedad.



Respecto a los niveles de van Hiele, se encontraría en lo que algunos investigadores han encontrado que sería nivel pre-visual (Senk, 1989)

Consideramos que ello es debido a que si simplemente, el autor hubiera "visto" la siguiente situación geométrica:



Habría "visualizado" que, aunque AB=BC=... IJ, claramente no son iguales los ángulos APB, ... IPJ.

Evidentemente, el nivel 1 consideramos que no lo alcanza para esta situación geométrica.

Respecto del nivel 2, descriptivo, podemos decir que “salvando” el error, posiblemente este cercano a él.

El nivel 3, teórico, es evidente que tampoco lo alcanza, por las implicaciones geométricas puestas de manifiesto.

Segundo análisis

En Palencia y González (1982), se tiene:

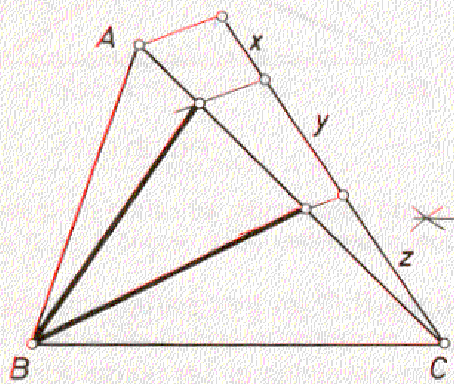


FIG. 314

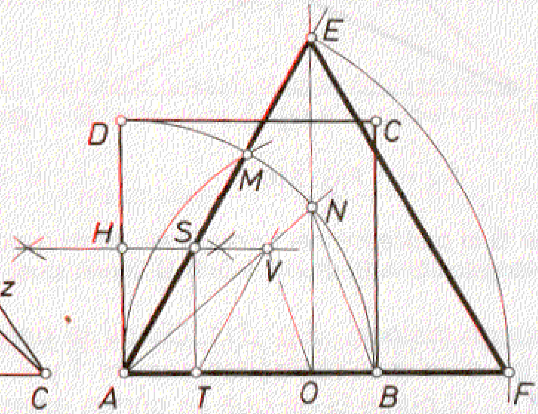


FIG. 315

Recuérdese que para realizar la división de un segmento en partes proporcionales a varias magnitudes dadas se ha de trazar una semirecta por uno de sus extremos en cualquier dirección, transportando sobre la misma consecutivamente las magnitudes dadas y trazando paralelas por los puntos de unión al segmento que une sus extremos finales, según se realizó en la fig. 92.

Las áreas de los triángulos resultantes son proporcionales a sus bases (x, y, z...) al tener todos igual altura.

Construir un triángulo equilátero, equivalente a un cuadrado dado. Fig. 315.

Trazar dos arcos de radio igual al lado del cuadrado con centros en los extremos de su lado base A B, cuya intersección nos determina el punto M. Unir A con M, prolongando dicho segmento. Por H, punto medio del lado A D trazar una paralela a A B la cual determina sobre A M el punto S y por este punto bajar una perpendicular S T a A B, trazando por T una paralela a A M hasta cortar en V a la recta H S. Unir A con V y prolongar hasta cortar en N al arco D B trazado con centro en el vértice A. La perpendicular trazada a A B por N corta en el punto E a la prolongación de A M, siendo A E el lado del triángulo equilátero equivalente al cuadrado dado, el cual se transportará hasta F con centro en el vértice A.

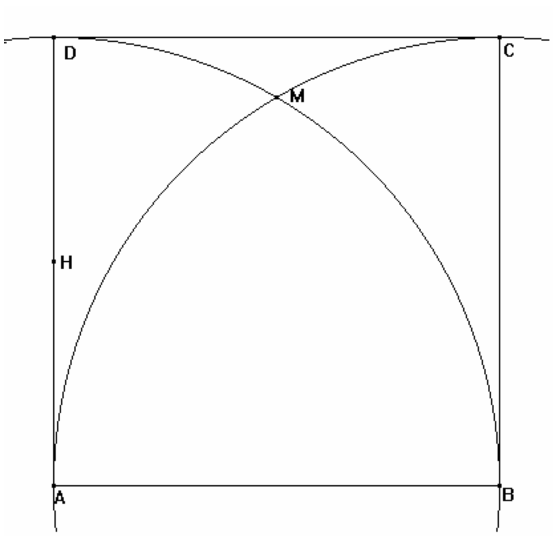
132

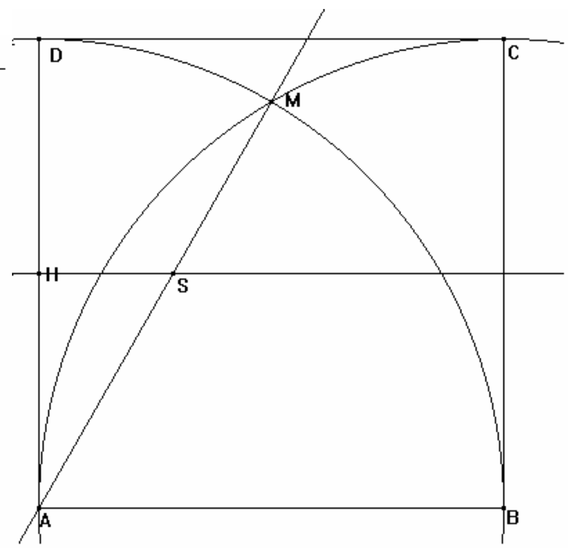
Por proporcionalidad entre los triángulos A V O y A N B podemos escribir $\frac{AO}{AH} = \frac{AB}{ON}$, de donde A O x O N = A H x A B y multiplicando miembro a miembro por 2 O N x A O = 2 A H x A B, o lo que es igual O E x $\frac{AF}{2}$ = A B² como queríamos demostrar, toda vez que $\frac{OE \times AF}{2}$ es el área del triángulo A F E y A B² el área del cuadrado.

(Reproducidas con permiso de los editores)

Analicemos detenidamente la construcción efectuada.

Tomemos una referencia ortonormal de centro A y unidad AB.



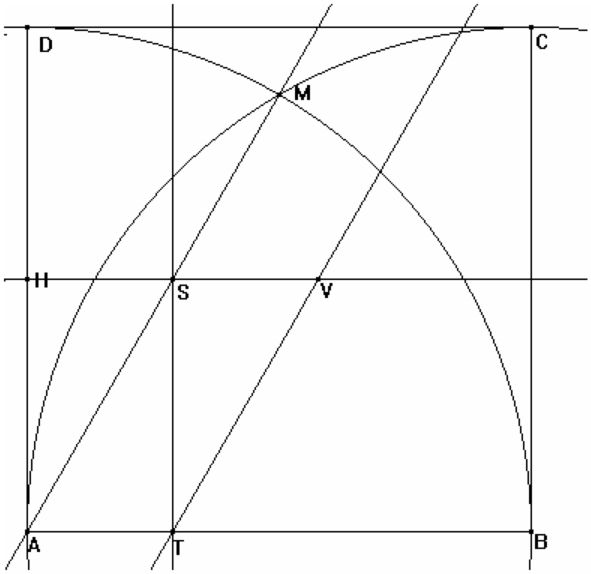


Es A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1), por ser ABCD cuadrado.

Por la construcción hecha, es H(0,1/2), y

La recta AM tiene de ecuación $y = \sqrt{3}\,x$,

luego el punto S tiene de coordenadas $S(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2})$



El punto T por tanto, será $T(\frac{\sqrt{3}}{6},0)$.

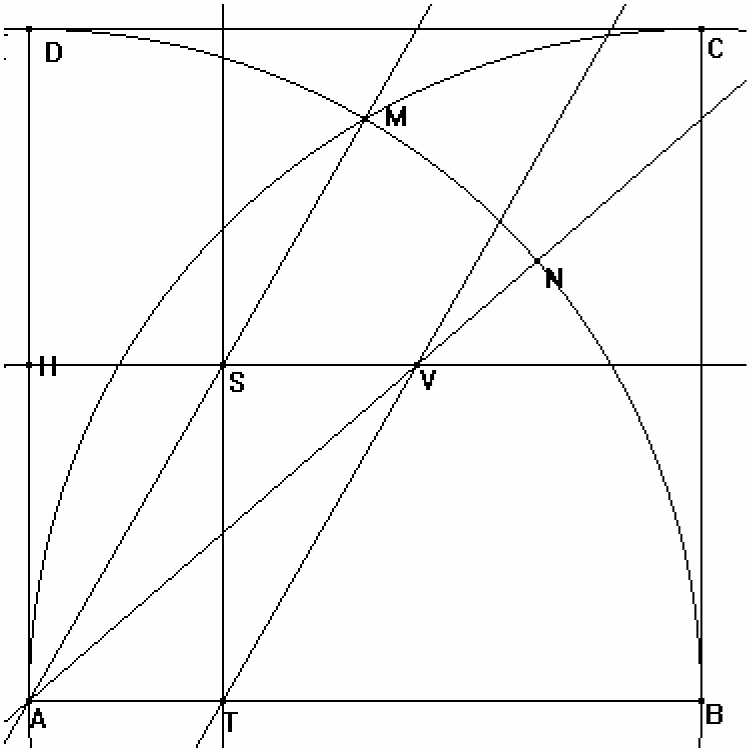
Tomando TV paralela a AM, la ecuación de la recta TV es:

$$y=\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{6})=\sqrt{3}x-\frac{1}{2},$$

Por lo que el punto V es: $\frac{1}{2}=\sqrt{3}x-\frac{1}{2} \rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \rightarrow V(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})$

La recta AV tendrá de ecuación:

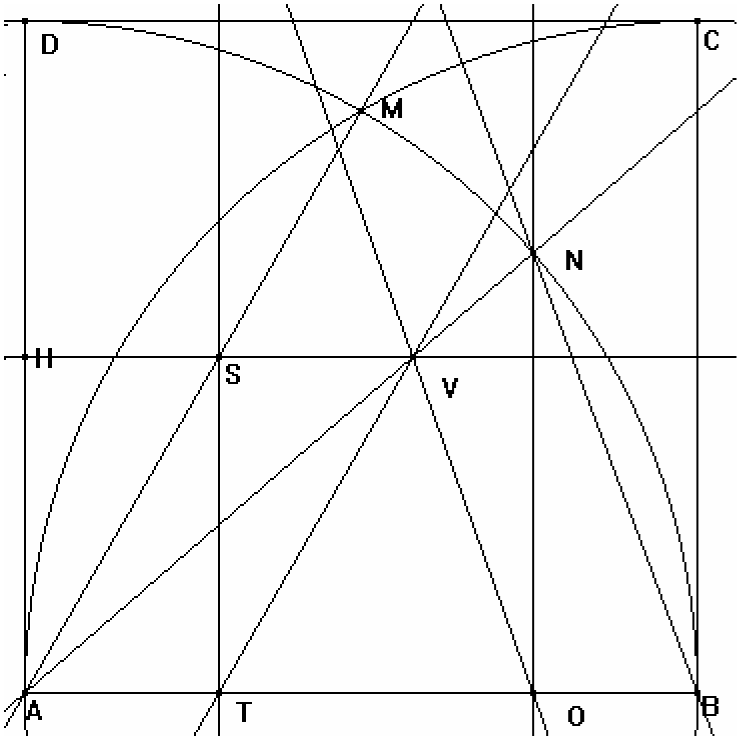
$$y-\frac{1}{2}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/3}(x-\frac{\sqrt{3}}{3}) \rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{6}(x-\frac{\sqrt{3}}{3}) \rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$



La intersección de la recta AV con la circunferencia de centro A y radio AB es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x \\ y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{4}x^2 + x^2 - 1 = 0 \rightarrow \frac{7}{4}x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{7}} = \pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Tomando, lógicamente, el valor positivo, será, $N(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$



Así, tenemos que el punto O es: $O(\frac{2\sqrt{7}}{7},0)$.

Busquemos las pendientes m y n de OV y BN.

$$\begin{cases} OV:((\frac{2\sqrt{7}}{7},0),(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})) \\ BN:((1,0),(\frac{2\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{21}}{7})) \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\dfrac{1}{2}-0}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{7\sqrt{3}-6\sqrt{7}}{21}} = \dfrac{21}{14\sqrt{3}-12\sqrt{7}} \\ n = \dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{7}-0}{\dfrac{2\sqrt{7}}{7}-1} = \dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}-7} = \dfrac{21}{14\sqrt{3}-7\sqrt{21}} \end{cases}$$

Evidentemente, no tienen la misma pendiente.

Siendo los valores: -2.799886353, y -2.68222577, con

un error absoluto de 0.11663776, y

error relativo de 0.043485437,

y con los ángulos respectivos de una medidas sexagesimales de:

-70º 20’ 43’’

-69º 33’ 11’’.

Con lo que el error absoluto respecto a los ángulos es aproximadamente de 47’.

El área del triángulo obtenido finalmente es de 99,1734687894 cm²

Para el cuadrado de área 100,2012005786 cm²,

Siendo el error absoluto de 1,0277317892, y

El error relativo de 0,0102566

Luego al no ser OV paralelo a BN, no puede aplicarse correctamente la propiedad de ser AVO y ANB triángulos semejantes, puesto que no cumplen los requisitos.

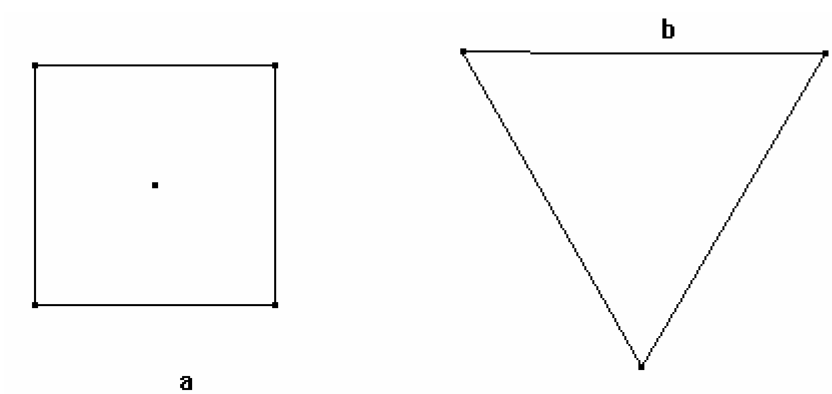
Así, pues, todo lo posterior, como hemos comprobado, es incorrecto.

¿Qué ha podido ocurrir en este caso?

Los autores, quizá basándose en apreciaciones visuales, han entendido que un "paralelismo" aproximado era suficiente.

En este caso, pues, se utiliza una propiedad correcta, la proporcionalidad de los lados en triángulos semejantes, en un entorno "alejado" de la propiedad incorrecto, pues se aplica a triángulos que no lo son.

Quedaría por analizar cuál es la construcción correcta.



Sea a el lado del cuadrado y b el del triángulo equilátero.

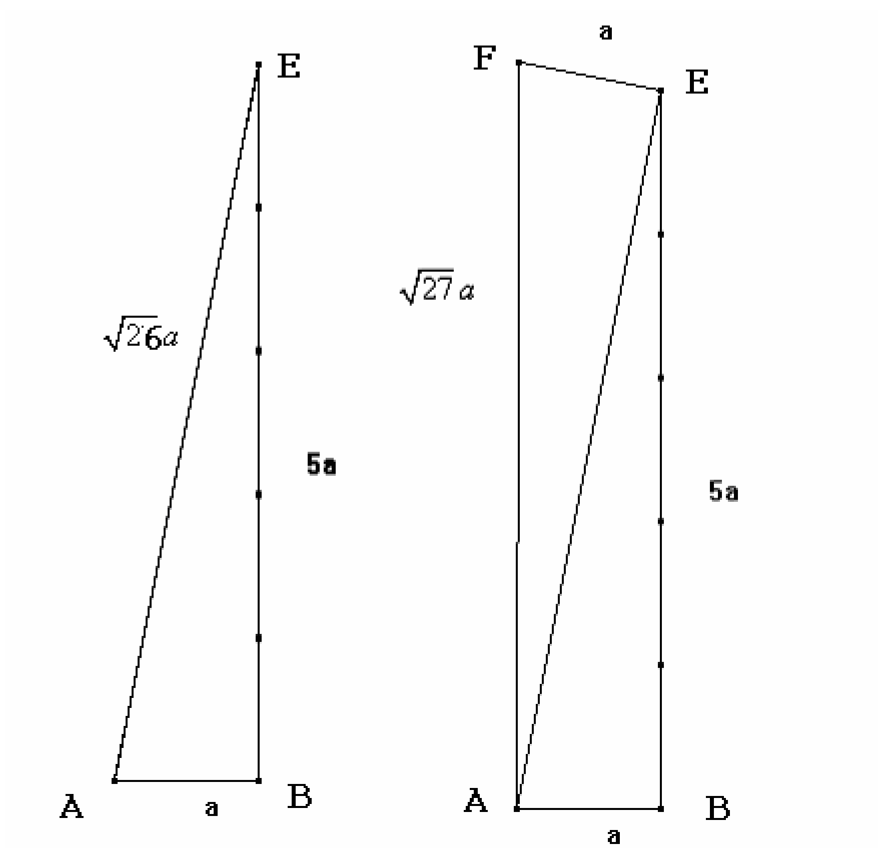
Area del cuadrado, a^2 , área del triángulo, $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

Luego ha de ser:

$$b^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3} \rightarrow b = \frac{2\sqrt[4]{3}\,a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\,a}{3} = \frac{2\sqrt[4]{27}\,a}{3}$$

Hemos de construir dicho valor a partir de a.

En primer lugar, construyamos $\sqrt{27}\,a$. Es: 27=26+1=25+1+1, luego por Pitágoras, siendo AB=a, BE=5a, BE AB, es AE = $\sqrt{26}\,a$, y reiterando el proceso, tomando EF=a, FE AE tenemos AF= $\sqrt{27}\,a$.



Ahora hay que obtener el segmento de longitud $\sqrt[4]{27}\,a$

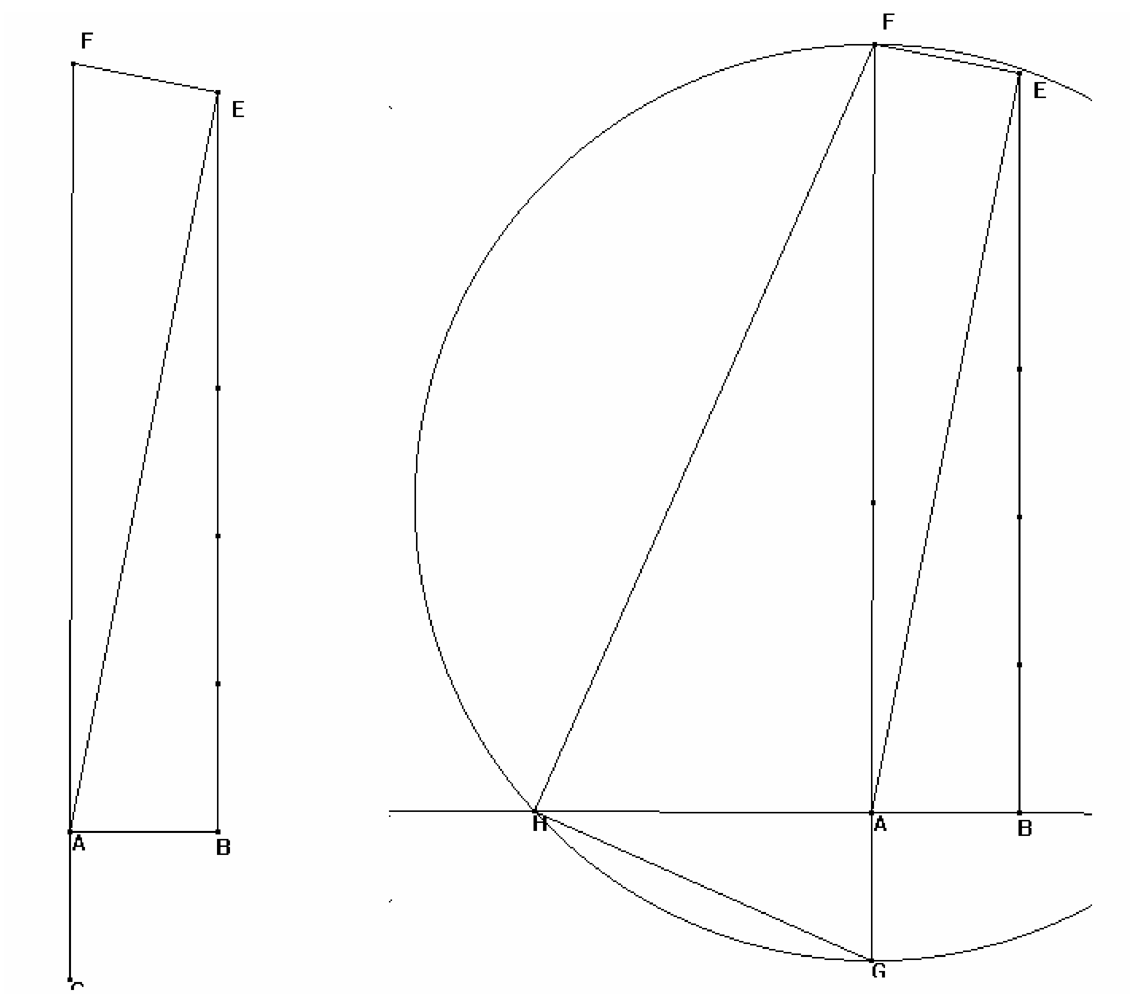
Si

1.- al segmento FA correspondiente a $\sqrt{27}\,a$ le añadimos un segmento de longitud a, AG

2.- trazamos la circunferencia cuyo diámetro sea el último segmento obtenido FG

3.- trazamos la perpendicular por A al diámetro FG.

4.- el segmento tomado en la perpendicular cuyos extremos son AH, es $\sqrt[4]{27}\,a$.



El motivo es la proporción entre los lados de los correspondientes triángulos rectángulos semejantes, AHF y AGH de los que sus catetos son , respectivamente, AH y $\sqrt{27}\,a$ para el “mayor”, y a y AH para el menor, por lo que:

.

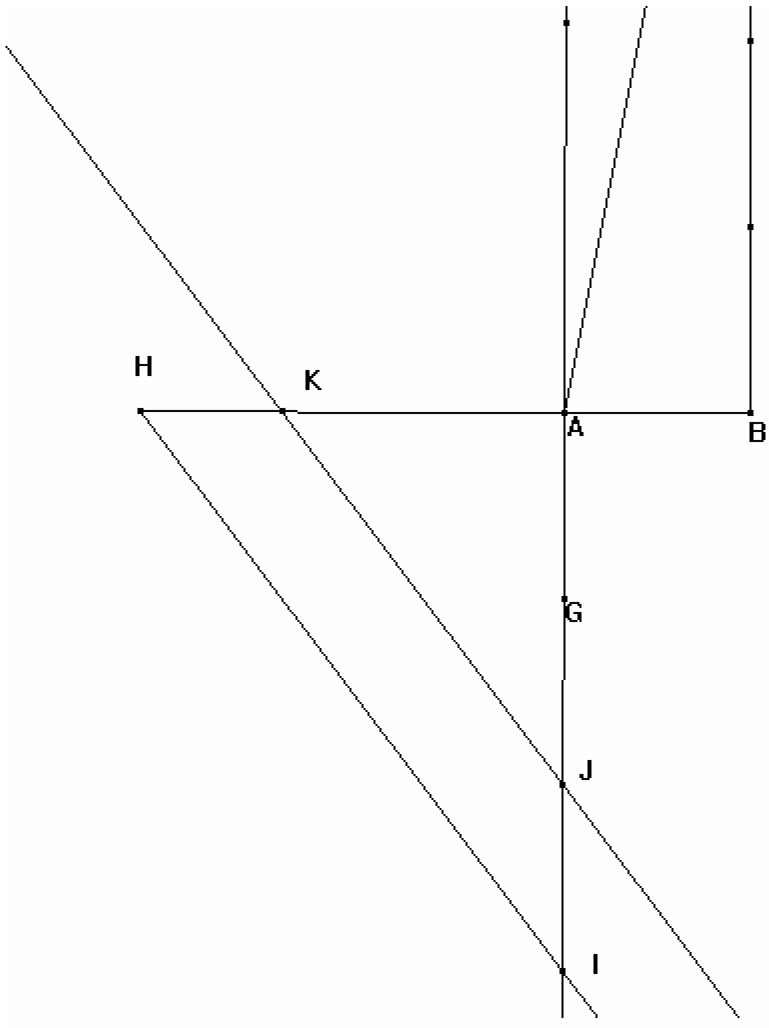
$$\frac{AH}{\sqrt{27}a} = \frac{a}{AH} \rightarrow AH^2 = \sqrt{27}a^2 \rightarrow AH = \sqrt[4]{27}a$$

De ello se deduce que el lado del triángulo será 2/3 de AH.

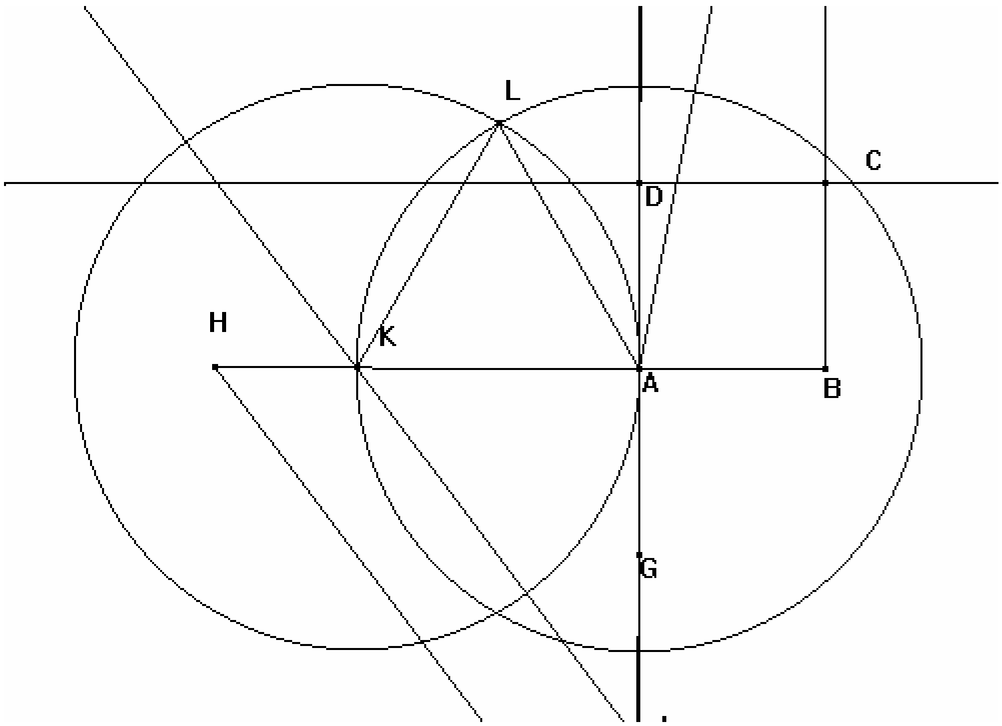
Tomemos, por ejemplo, AI=3 AG, y AJ=2AG.

Trazando la recta IH, y por J una paralela a ella, obtendremos K tal que

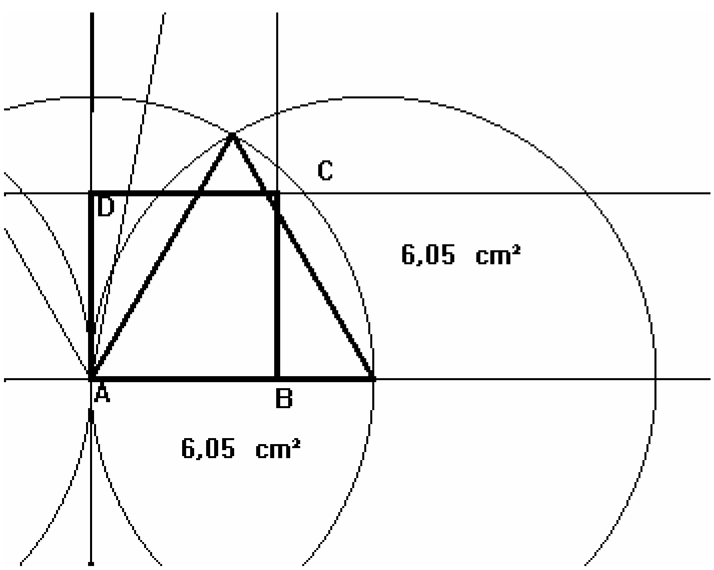
$$AK = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}a\ .$$



Así pues, el triángulo equilátero de lado b=AK, AKL y el cuadrado ABCD tienen el mismo área.



Llevando AK sobre la recta AB, nos da el siguiente resultado:



Cabri nos da el área de ambas figuras, que, como era de esperar, coinciden.

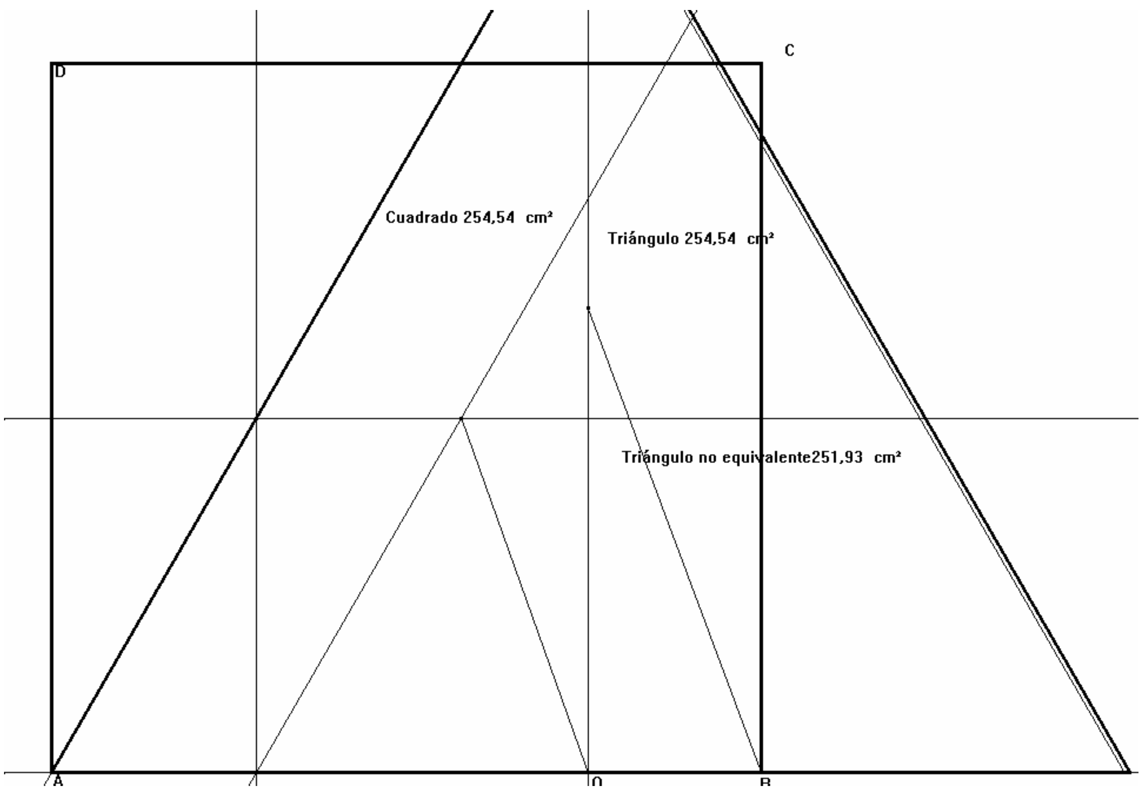
Este problema es el inverso al siguiente (Cortázar, 1884)

Reducir un triángulo a cuadrado equivalente.

Es una interesante relación entre el cálculo elemental de raíces, fracciones,… etc y la geometría euclídea, con la participación del teorema de Pitágoras dos veces, la media geométrica una vez y la proporcionalidad de segmentos.

La construcción realizada geométricamente no tiene nada que ver con la del libro de trazado geométrico.

Al comparar ambas construcciones, hay que ampliar la construcción para observar diferencias apreciables:



En esta ocasión, el área del triángulo erróneo es de 251.93, frente a 254.54, con un error absoluto de 2.61 y relativo de 0.01029

Según la teoría de van Hiele, entendemos que estos autores están muy cercanos al nivel visual, puesto que su error es relativamente muy pequeño.

Respecto al nivel descriptivo, la relación de estructuras geométricas hecha para establecer la solución del problema propuesto es errónea, por lo que tampoco se alcanza el mismo.

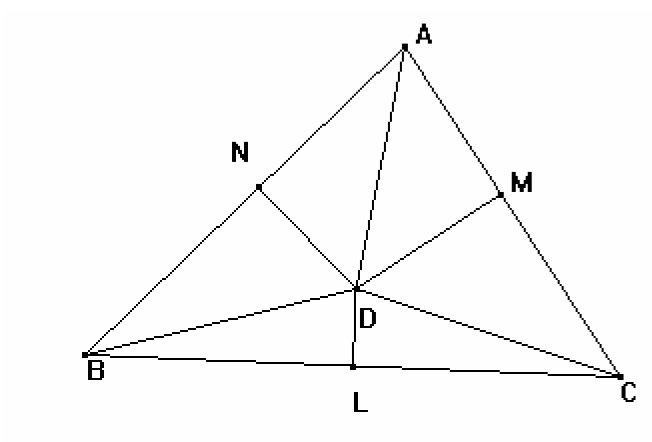
En relación al nivel teórico, hemos de decir, a tenor del análisis geométrico efectuado, que no se alcanza, puesto que las relaciones euclideas puestas en juego son erróneas.

Tercer análisis:

En ocasiones, la utilización de una propiedad y su aplicación incorrecta se hace de manera explícita para buscar algunas relaciones geométricas falsas.

Así, en la Unidad 17 (1971), se tiene:

Considérese la siguiente prueba euclídea:



Sea ABC un triángulo.

Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D.

Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB respectivamente.

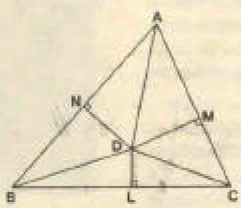
Únase D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

Nos referimos ahora al fundador de otra escuela del pensamiento. DAVID HILBERT, 1862-1943, consideró que el intento de basar la matemática completamente en la lógica era demasiado ambicioso. Su enfoque se dirigió a romper los problemas en partes y enfrentarse a ellos fragmentariamente. Inicialmente, la cuestión de la verdad y la falsedad, que siempre había causado dificultades filosóficas, se dejó a un lado y se concentró el esfuerzo sobre la *consistencia* y la *completez* de conjuntos de axiomas. En este contexto la consistencia implica que en cualquier sistema no se pueden probar un resultado y su contradicción. La completez significa que se han dado suficientes axiomas de modo que los resultados que (en algún sentido) deben ser deducibles, pueden deducirse realmente.

Uno de los primeros logros de Hilbert fue formular un conjunto completo de axiomas de la geometría euclídea. Considérese la siguiente prueba euclídea:

Sea ABC un triángulo:



Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D. Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB, respectivamente. Unase D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como $BL = LC$, DL es común y $B\hat{L}D = C\hat{L}D = 90°$, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Entonces $BD = CD$. Como los ángulos $N\hat{A}D$, $M\hat{A}D$ son iguales y $A\hat{N}D = A\hat{M}D = 90°$ y AD es común, los triángulos AND, AMD son congruentes y por tanto $DN = DM$ y $AN = AM$.

Como $DN = DM$, $BD = DC$ y $B\hat{N}D = C\hat{M}D = 90°$, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto $NB = MC$.

Puesto que

$$AN = AM \text{ y } NB = MC,$$

se sigue que

$$AB = AC$$

De modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente todo triángulo es isósceles.

Esto, claramente, no tiene sentido, aunque la prueba se sigue de los axiomas de Euclides para la geometría. La dificultad radica en que los *axiomas de Euclides son incompletos* y necesitan ser su*plementados por axiomas de incidencia mediante los cuales se* establezca que, cuando se trazan líneas de cierta manera, ellas se intersectan en una cierta parte del plano. (La manera como trazamos la figura presume y después afirma que D está situado dentro del triángulo, lo que es una hipótesis injustificada.)

(Reproducido con permiso de la Editorial Mc-Graw-Hill)

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

Puesto que AN=AM, y NB=MC, se sigue que

AB=AC, de modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente, todo triángulo es isósceles.

Esto, claramente, no tiene sentido, aunque la prueba se sigue de los axiomas de Euclides para la geometría. La dificultad radica en que los axiomas de Euclides son incompletos y necesitan ser suplementados por axiomas de incidencia mediante los cuales se establezca que, cuando se trazan líneas de cierta manera, ellas se intersecan en una cierta parte del plano. (La manera como trazamos la figura presume y después afirma que D está situado dentro del triángulo, lo que es una hipótesis injustificada).

Hagamos un análisis.

Ante todo, el perpendicular bisector es la mediatriz; el traductor, Bernardo Alfonso, de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, hace una traducción "palabra a palabra" del inglés.

La bisectriz de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto en el triángulo se cortan en un punto, en efecto, con las siguientes precisiones:

1.- Si el triángulo es isósceles, y se trata del ángulo desigual, ambas rectas coinciden.

2.- Por tanto, si el triángulo es equilátero, coinciden.

3.- Si el triángulo es escaleno, se cortan sobre la circunferencia circunscrita. En Iglesias (2001) se presenta el siguiente problema

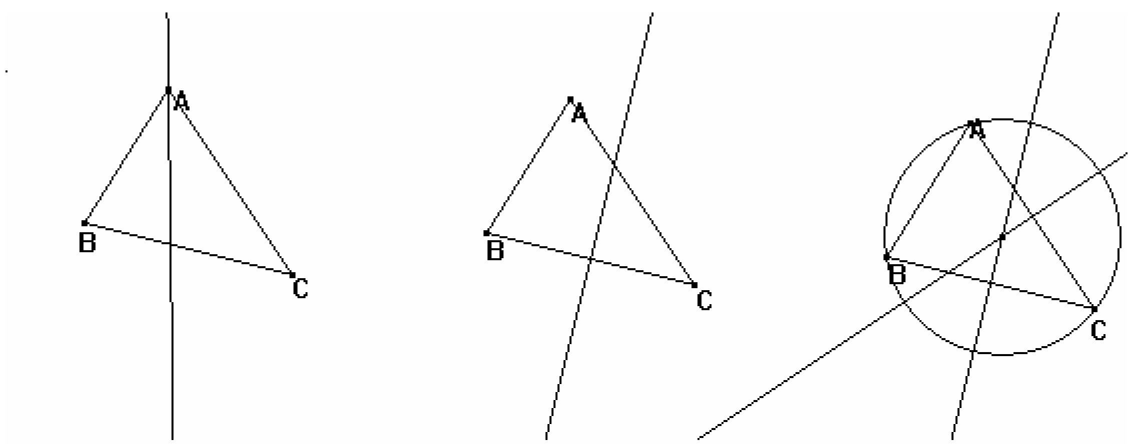
4.- Demostrar que en un la bisectriz interna de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto se

cortan sobre la circunferencia circunscrita

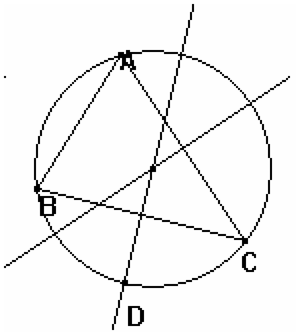
Analicémoslo:

Sea ABC un triángulo genérico (sin ninguna regularidad). Tracemos la bisectriz del ángulo A y la mediatriz de BC.

Tracemos la circunferencia circunscrita.

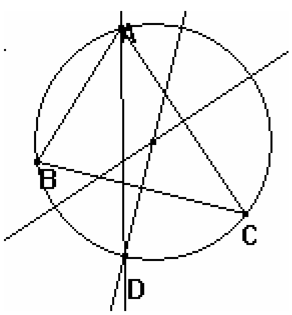


La mediatriz de BC lo corta perpendicularmente en su punto medio, por lo que corta al arco BC en su punto medio.



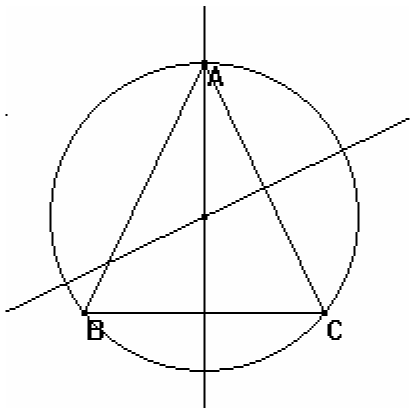
Así, pues, los arcos BD y DC son de igual medida central, y por ello, los ángulos BAD y DAC miden igual.

Es decir, que AD es la bisectriz del ángulo BAC, y cqd, la mediatriz de un lado de un triángulo y la bisectriz del ángulo opuesto se cortan en un punto D sobre la circunferencia circunscrita.



He aquí que la presunción, la hipótesis inicial de estar D situado en el interior del triángulo, para los escalenos tomados según la definición exclusiva: Triángulo con tres lados desiguales dos a dos, ya que la inclusiva es: Triángulo con los tres lados desiguales, no es correcta.

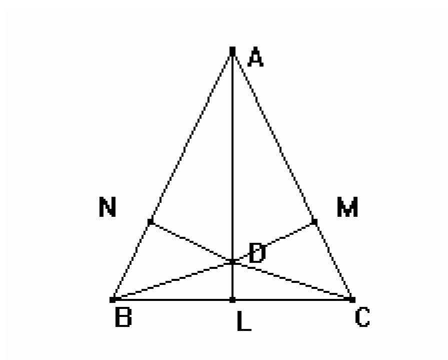
Si el triángulo es isósceles tomado según la definición exclusiva: Triángulo con dos lados iguales y el tercero desigual, ya que la inclusiva es: Triángulo con dos lados iguales, y A es el ángulo formado por los dos lados iguales, la bisectriz y la mediatriz opuesta coinciden.



Lógicamente, si es equilátero (los tres lados iguales; en este caso no cabe distinguir definiciones exclusivas/inclusivas), también coinciden, las tres bisectrices con las tres mediatrices, en este caso.

Comencemos el análisis a partir del caso del triángulo isósceles en su definición exclusiva.

Tomemos un punto interior como D.



Tomemos, según el texto analizado, DM perpendicular a AC, DN perpendicular a AB.

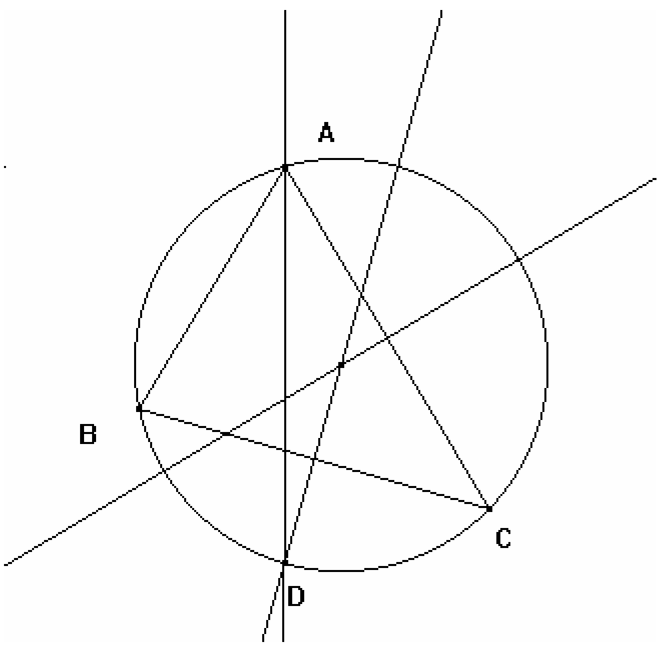
Unimos D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

Puesto que AN=AM, y NB=MC, se sigue que AB=AC, de modo que el triángulo es isósceles. Conclusión lógica, puesto que inicialmente lo era.

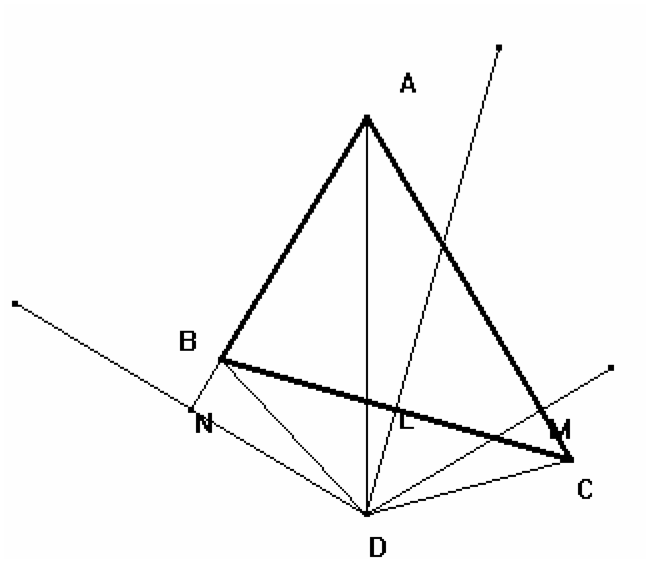
Así, pues, tomemos ABC, triángulo escaleno según la definición exclusiva.



Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D.

Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB respectivamente.

Se une D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.



Todas estas conclusiones parciales son correctas.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

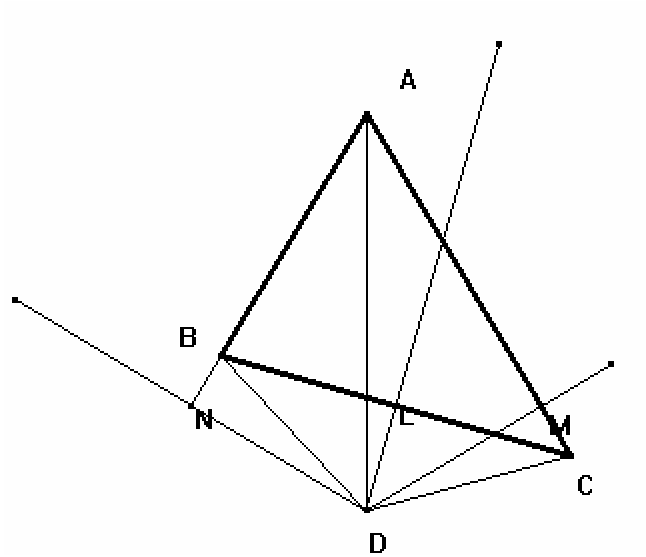
Continúan hasta aquí siendo ciertas las conlcusiones para un triángulo escaleno exclusivo.

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

También es cierto, aunque en este caso, las medidas han de tomarse en valor absoluto.

Puesto que AN=AM, y NB=NC, se sigue que AB=AC, de modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente, todo triángulo es isósceles.

Esta conclusión es falsa, puesto que aquí es necesario tomar signos, y lo que es cierto es que:



AB= AN-BN y AC=AM+MC, y, lógicamente, para el caso que nos ocupa,
Es: AB = AN-BN = AM-MC = AC-2MC < AC, luego no es isósceles para AB y AC. Igual sería para BC y BA.

O sea, que, en efecto, como señalan los autores (no vienen referenciados en el libro, sólo aparece el traductor), hay una hipótesis injustificada en el desarrollo de la demostración.

Más que injustificada, precisaríamos que es una hipótesis falsa para todo triángulo salvo los isósceles y equiláteros.

No deja de sorprender que partiendo de un solo elemento falso, puesto que todo el desarrollo posterior es correcto, se pueda llegar a una conclusión errónea.

Desde la teoría de van Hiele, el papel del nivel 1 tiene una preponderancia vital en el desarrollo de toda la demostración efectuada. Dado que la visualización es incorrecta por tener un único elemento (el punto de corte analizado) falso, los restantes niveles descriptivo y teórico a pesar de su coherencia interna, son erróneos en el desarrollo completo.

Conclusiones

Una propiedad geométrica debe ser utilizada y aplicada teniendo en cuenta todos los requisitos geométricos que intervienen.

La falta o la consideración errónea de alguno de tales requisitos puede ser motivo de conclusiones falsas, como se ha puesto de manifiesto en el documento.

Las conclusiones didácticas para una buena gestión de la enseñanza de las propiedades geométricas son de suma importancia, debido a que dependiendo de la etapa de enseñanza en que se desarrolle (Preescolar, Primaria, Secundaria, Bachillerato, Universidad), el profesor ha de tener en consideración los entornos de aplicación de la propiedad cuando la explique por *primera vez*, para que los alumnos no obtengan una visión falsa de la subsiguiente aplicación.

Los niveles de van Hiele se muestran eficientes para analizar y estructurar el pensamiento geométrico que surge a lo largo de un razonamiento.

Aunque un razonamiento geométrico adquiera visos de verosimilitud y coherencia interna en un determinado entorno de una propiedad, si un solo elemento no es correcto, puede llevar a conclusiones falsas.

Bibliografía

Cortázar, (1884) Tratado de Geometría Elemental. (pág 96)

Frère Gabriel-Marie (1912) Exercices de Géométrie (p. 471-472)

González, M. y Palencia, J. (1982): Trazado geométrico. Sevilla.

Iglesias (2001): http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri/problema32.htm

Miranda, J (2003): http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol71ju

Sánchez (1983): Geometría [Geometría sin esfuerzo], Editorial Playor, Círculo de Lectores,

Senk, S. (1989): Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. Journal for Research in Mathematics Education (vol.20 (3), pp.309-321)

Unidad 17(1971): Lógica II. Prueba, (Curso Básico de Matemáticas). Open University, McGraw-Hill.

Van Hiele (1985): Structure and Insight. A theory of mathematics education. Academics Press Inc. Orlando.