CÁLCULO VECTORIAL

Notas de clase

Tema I

Máximos y Mínimos

Profesor: A. Leonardo Bañuelos Saucedo

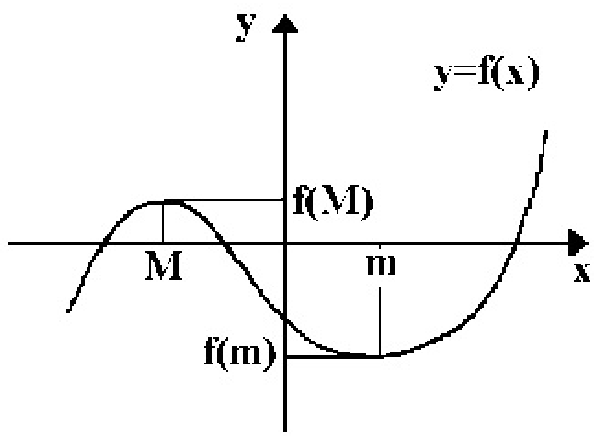
TEMA I
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

INTRODUCCIÓN

El tema con el que inicia el curso de Cálculo Vectorial, es de gran importancia para el ingeniero, puesto que en él se estudian los máximos y mínimos de funciones de dos o más variables, que tienen su aplicación en los problemas de optimación. Así, un ingeniero puede buscar la combinación de recursos que le produzcan la máxima ganancia, o el mínimo desperdicio; puede buscar la mínima distancia o el mínimo costo, en problemas de manufactura podrá interesarse en minimizar los defectos, etc. Ante la escases de ciertos recursos, es muy importante aprovecharlos de la mejor manera, de ahí la importancia de este tema.

En el curso de cálculo de una sola variable se estudiaron los máximos y mínimos para funciones $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

Supóngase que una función $y = f(x)$ tiene la siguiente representación gráfica:



entonces en los puntos M y m se tienen un máximo y un mínimo relativo de $f(x)$, siendo los valores máximo y mínimo $f(M)$ y $f(m)$ respectivamente.

La condición necesaria para que un punto cualquiera, x_0 que pertenece al dominio de f sea máximo o mínimo es que la pendiente sea cero o bien, que no se pueda determinar el valor de la pendiente, esto es: $f'(x_0)$, o bien que $f'(x_0)$ no exista.

Si se cumple alguna de las condiciones anteriores, entonces x_0 es un punto crítico, y debe determinarse la naturaleza de dicho punto. La forma más sencilla para determinar la naturaleza del punto crítico x_0 , la proporciona el criterio de la segunda derivada, la cual analiza la concavidad de la curva. Si $f''(x_0) > 0$ entonces en x_0 existe un mínimo relativo, si $f''(x_0) < 0$ entonces en x_0 existe un máximo relativo, y si $f''(x_0) = 0$ el criterio no proporciona información sobre la naturaleza del punto crítico x_0 , y deben utilizarse otros criterios.

Ejemplo 1.1

Determinar los máximos y mínimos relativos, si los hay, de la función

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 5$$

Resolución

De la función $f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 5$

se tiene la derivada $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 16x$

De la condición para la obtención de los puntos críticos $f'(x) = 0$,

$$4x^3 + 9x^2 + 16x = 0$$

$$x\,(4x^2 + 9x + 16) = 0$$

$$x_1 = 0$$

Sólo existe una raíz real, por lo que el único punto crítico es $x_1 = 0$.

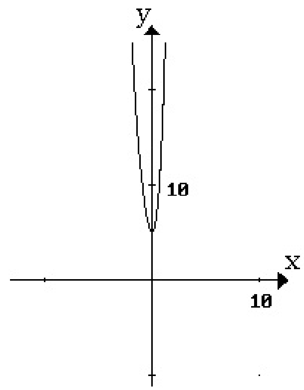
Del criterio de la segunda derivada se tiene que:

$$f''(x) = 12x^2 + 18x + 16$$

y valuando el punto crítico en la segunda derivada

$$f''(0) = 16 > 0$$

Por lo que en $x_1 = 0$ existe un mínimo relativo, el cual es $f(0) = 5$.



MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Un número M es lo máximo absoluto (o simplemente máximo) de una función $f = f(\bar{x})$, donde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, sobre un conjunto D_f que pertenece a $\mathbb{R}^n$ si para cualquier punto en D_f se tiene que $M \geq f(\bar{x})$. Un máximo relativo (o máximo local) de f se encuentra en el punto $\bar{x}_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})$ en D_f, si existe una hiperesfera alrededor de $\bar{x}_0$ tal que $f(\bar{x}_0) \geq f(\bar{x})$ para cualquier punto $\bar{x}$ en la hiperesfera. Los mínimos absolutos y los mínimos relativos se definen de forma similar.

A los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función se les llama *extremos*.

Al igual que para las funciones de una sola variable, antes de obtener los valores extremos se deben encontrar los puntos críticos de la función. Un punto crítico es aquel en el cual la primera derivada es igual a cero, pues esto significa que la pendiente de la recta tangente es igual a cero, pero en el caso de funciones de varias variables, se estudiaron dos tipos de derivadas: las derivadas parciales y la derivada direccional. Puesto que las derivadas parciales son un caso particular de la derivada direccional, no debe ser una sorpresa el hecho de que se utilice la derivada direccional.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Dada una función de dos variables independientes, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escrita de la forma $z = f(x,y)$, los puntos críticos de f serán aquellos en los cuales la primera derivada (direccional) sea cero. Esto es:

$$\frac{df}{ds} = \bar{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0$$

Donde $\dfrac{df}{ds}$ denota la derivada direccional de la función f, $\bar{\nabla} f$ representa el gradiente de la función, y para el caso de dos variables se tiene que $\bar{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j}$, y $\hat{\boldsymbol{u}}$ es un vector unitario que indica la dirección en la cual se evalúa la derivada direccional, $\hat{\boldsymbol{u}} = u_1\,\boldsymbol{i} + u_2\,\boldsymbol{j}$.

Para que la derivada direccional en un punto sea igual a cero en cualquier dirección, debe cumplirse que el gradiente de la función es igual a cero vector, es decir:

Si $\quad \bar{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \quad , \quad \forall\ \hat{\boldsymbol{u}}$

entonces $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\,u_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,u_2 = 0 \quad , \quad \forall\ u_1, u_2$

lo que implica que $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \ \text{ y } \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

que lleva a la condición $\quad \bar{\nabla} f = \bar{\boldsymbol{0}}$

Por otro lado una función puede presentar un punto crítico cuando el gradiente de la función no exista para un punto del dominio de la función.

Teorema 1.1 (Puntos críticos de una función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

Para que una función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, tenga un extremo un punto (x_0,y_0) del dominio de f, es condición necesaria que el gradiente de la función se anule en dicho punto, o bien que el gradiente no exista en ese punto, es decir:

$$\overline{\nabla} f = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{en} \quad (x_0,y_0)$$

o bien que

$$\overline{\nabla} f \quad \nexists \quad \text{en} \quad (x_0,y_0)$$

Para verificar este teorema debe tenerse en cuenta que el gradiente de una función proporciona la dirección de máximo crecimiento y su negativo la dirección de máximo decrecimiento, por lo que su existencia (distinta de cero vector) implica una dirección en la cual la función crecerá o disminuirá, lo que contradice la posibilidad de estar en un punto para el cual su entorno se encuentre por debajo de él o por arriba de él, que es la condición para obtener máximos y mínimos relativos.

En la práctica la condición en la cual el gradiente no existe, $\overline{\nabla} f \; \nexists$, casi no se emplea, puesto que la mayoría de las funciones que se estudian en el curso poseen primeras y segundas derivadas parciales continuas. Por otro lado, la condición en la cual $\overline{\nabla} f = \overline{\mathbf{0}}$ lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, generalmente no lineal, el cual deberá resolverse para obtener el o los puntos críticos. El siguiente ejemplo muestra la obtención de puntos críticos para una función de dos variables.

Ejemplo 1.2

Determinar, si existen, los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 10 - x^3 - y^2 + 6x^2 - y$$

Resolución

De la condición para obtener los puntos críticos se tiene que $\overline{\nabla} f = \overline{\mathbf{0}}$, de donde

$$\overline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} = 0\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j}$$

y por igualdad de vectores se forma el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 1 = 0$$

el cual es no lineal, pero en este caso tiene la ventaja de que las dos ecuaciones son independientes, por lo que:

De la ecuación $-3x^2 + 12x = 0$, se tienen las raíces $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$;

y de la ecuación $-2y - 1 = 0$ se tiene la raíz $y = -\frac{1}{2}$.

Finalmente, los puntos críticos de la función son:

$$\underline{\underline{P_1\left(0, -\tfrac{1}{2}\right)}} \quad \text{y} \quad \underline{\underline{P_2\left(4, -\tfrac{1}{2}\right)}}$$

puesto que cada uno de estos puntos satisface de manera simultánea la condición $\overline{\nabla} f = \overline{\mathbf{0}}$.

Para determinar la naturaleza de un punto crítico se utiliza el criterio de la segunda derivada, para ello se vuelve a derivar la derivada direccional de la función $z = f(x,y)$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\overline{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{u}}\right)$$

Considerando que $\overline{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$, y sustituyendo se tiene:

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2\right)$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \overline{\nabla}\left(\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2\right) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2\right) u_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2\right) u_2$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_2\right) u_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2\right) u_2 \qquad \ldots (1)$$

Y en forma matricial

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

Que puede escribirse en forma compacta como

$$\frac{d^2f}{ds^2} = [\bar{\boldsymbol{u}}]^T \boldsymbol{H} [\bar{\boldsymbol{u}}] \qquad \ldots (3)$$

Donde la matriz $\boldsymbol{H}$ recibe el nombre de *matriz hessiana*, y el determinante $\det(\boldsymbol{H})$ recibe el nombre de *determinante hessiano*, o simplemente *hessiano*.

La naturaleza del punto crítico dependerá del signo que adquiera la segunda derivada direccional, para cualquier dirección, si $\frac{d^2f}{ds^2} > 0$ entonces se tiene un mínimo relativo, mientras que para $\frac{d^2f}{ds^2} < 0$ se tiene un máximo relativo. Las segundas derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ proporcionan gran información, puesto que geométricamente representan la concavidad de las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos a y y a x respectivamente; sin embargo, debe tomarse en cuenta también la información que proporcionan las parciales mixtas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Para ver esto de una forma más clara, se realiza el siguiente desarrollo.

De (1),

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

y puesto que para funciones continuas con primeras y segundas derivadas parciales continuas, las parciales mixtas son iguales, se tiene

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2 \qquad \ldots (4)$$

y de (2), puesto que las parciales mixtas son iguales se tiene que

$$\det(\boldsymbol{H}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 \qquad \ldots (5)$$

para relacionar (4) y (5), de (4) y multiplicando por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2$$

reagrupando y completando cuadrados

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1 \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u_2^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_2 \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_2 \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 \right) u_2^2$$

sustituyendo el hessiano (5), en la última expresión

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} u_2 \right)^2 + \det(\boldsymbol{H})\, u_2^2 \qquad \ldots (6)$$

Finalmente, en la última expresión se observa que el signo del lado derecho depende de $\det(\boldsymbol{H})$, por lo que se tienen las siguientes posibilidades.

Al valuar la expresión (6) en un punto crítico:

Si $\det(\boldsymbol{H}) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ entonces $\frac{d^2f}{ds^2} > 0$ (concavidad positiva), y se tiene un mínimo relativo en el punto crítico.

Si $\det(\boldsymbol{H}) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ entonces $\frac{d^2f}{ds^2} < 0$ (concavidad negativa), y se tiene un máximo relativo en el punto crítico.

Si $\det(\boldsymbol{H}) < 0$ entonces de (5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2$ y $\frac{d^2f}{ds^2}$ puede ser positiva o negativa por lo que se tiene un punto silla.

Si $\det(\boldsymbol{H}) = 0$ entonces no se tiene información sobre la naturaleza del punto crítico.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Criterio de la segunda derivada)
Dada un función $f = f(x,y)$ con primeras y segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto $P_0(x_0,y_0)$, para el cual $\bar{\nabla} f \,\big|_{P_0} = \bar{0}$, y $\boldsymbol{H}$ es la matriz hessiana, se tiene que:

1. Si $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{H}) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ en P_0, entonces $f(x_0,y_0)$ es un *mínimo relativo*.
2. Si $\det(\boldsymbol{H}) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ en P_0, entonces $f(x_0,y_0)$ es un *máximo relativo*.
3. Si $\det(\boldsymbol{H}) < 0$ en P_0, entonces en P_0 existe un *punto silla*.
4. Si $\det(\boldsymbol{H}) = 0$ en P_0, entonces el criterio no proporciona información.

Otra forma de analizar la naturaleza de un punto crítico es utilizando los antecedentes del álgebra lineal. Esta técnica tiene la ventaja de que permitirá la generalización del criterio de la segunda derivada para funciones de n variables. Retomando la ecuación (4), y puesto que al analizar un punto crítico P_0, se debe sustituir en las derivadas, entonces se puede hacer la asignación $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = a$, $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_0} = b$ y $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = c$, por lo que (4) se puede escribir

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = a\,u_1^2 + 2\,b\,u_1\,u_2 + c\,u_2^2 \qquad \ldots (7)$$

ecuación que podría interpretarse como una superficie cuadrática para las variable u_1 y u_2. Es evidente que el signo de la segunda derivada direccional depende también del valor de b. La expresión (7) se puede escribir en forma matricial

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \ldots (8)$$

Para determinar el signo de la segunda derivada direccional, debe eliminarse el coeficiente b del término mixto, lo que equivale a girar los ejes de la expresión (7). Esto se puede lograr diagonalizando la matriz $\boldsymbol{H}$ de la expresión (3).

Del curso de álgebra lineal, debe recordarse los siguiente:

- Una matriz $\boldsymbol{A}$ es ortogonal si $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{t}$, donde $\boldsymbol{A}^{t}$ es la transpuesta de $\boldsymbol{A}$.
- Una matriz $\boldsymbol{A}$ es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ que sea equivalente a $\boldsymbol{A}$.
- Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de $n \times n$ son equivalentes (o semejantes) si existe una matriz inversible $\boldsymbol{C}$ de $n \times n$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$.
- Cualquier matriz simétrica es diagonalizable.
- La matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ equivalente a una matriz $\boldsymbol{A}$ tiene en la diagonal principal a los valores característicos de $\boldsymbol{A}$.
- Los valores característicos de una matriz $\boldsymbol{A}$ son las raíces del polinomio $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$.
- Los vectores característicos de una matriz simétrica correspondientes a valores característicos diferentes son ortogonales.
- Una matriz es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal $\boldsymbol{Q}$ tal que $\boldsymbol{Q}^{t}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}$.

Entonces puesto que $\boldsymbol{H}$ es simétrica, es diagonalizable, y para valores característicos diferentes es diagonalizable ortogonalmente (de lo contrario se tendría que proceder a un proceso de diagonalización ortogonal), por lo que existe una matriz $\boldsymbol{Q}$ tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{t}\,\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{Q}$, y puesto que $\boldsymbol{Q}$ es ortogonal, satisface $\boldsymbol{Q}^{t} = \boldsymbol{Q}^{-1}$ lo que lleva a la condición $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Q}^{t}\,\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{Q}^{t}$, condiciones que permiten escribir la ecuación (3) como

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = [\bar{\boldsymbol{u}}]^T \;\boldsymbol{I}\,H\,\boldsymbol{I}\,[\bar{\boldsymbol{u}}]$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = [\bar{\boldsymbol{u}}]^T \left(\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{Q}^{t}\right) \boldsymbol{H} \left(\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{Q}^{t}\right) [\bar{\boldsymbol{u}}]$$

expresión en la cual la matriz $\boldsymbol{H}$ se premultiplicó y postmultiplicó por la identidad, con lo cual no se altera la ecuación. Además,

$$\frac{d^2f}{ds^2} = [\bar{u}]^T Q \left(Q^t H Q \right) Q^t [\bar{u}]$$

lo que lleva a

$$\frac{d^2f}{ds^2} = [\bar{u}]^T Q \left(D \right) Q^t [\bar{u}]$$

y haciendo $[\bar{e}]^t = [\bar{u}]^t Q$ y $[\bar{e}] = Q^t [\bar{u}]$, entonces

$$\frac{d^2f}{ds^2} = [\bar{e}]^T \; D \; [\bar{e}]$$

y puesto que $\bar{e}$ es un nuevo vector director referido al nuevo sistema, y dado que la matriz diagonal D tiene en su diagonal principal los valores característicos de A, entonces

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

expresión que al operarse da como resultado

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \lambda_1 \, e_1^2 + \lambda_2 \, e_2^2 \qquad \ldots(9)$$

de donde es fácil observar el signo que toma $\frac{d^2f}{ds^2}$ a partir de los valores propios λ_1 y λ_2.

En conclusión, si λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz hessiana para el punto crítico bajo estudio, entonces:

- Cuando $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, entonces $\frac{d^2f}{ds^2} > 0$ para cualquier dirección de corte, y el punto bajo estudio es un mínimo relativo.
- Cuando $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, entonces $\frac{d^2f}{ds^2} < 0$ para cualquier dirección de corte, y el punto bajo estudio es un máximo relativo.
- Cuando λ_1 y λ_2 difieren de signo, entonces existen direcciones para las cuales $\frac{d^2f}{ds^2}$ es positivo y direcciones para las cuales es negativo, por lo que el punto bajo estudio es un punto silla.
- Cuando alguno de los valores característicos es cero, el criterio no proporciona información.

Con la finalidad de ilustrar el empleo del criterio de la segunda derivada, se muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2

Dada la función $f(x,y) = 10 - x^3 - y^2 + 6x^2 - y$, cuyos puntos críticos son $P_1\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $P_2\left(4, -\frac{1}{2}\right)$, determinar la naturaleza de dichos puntos.

Resolución

Las primeras derivadas de la función son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 12x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 1$$

y las segundas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 0$$

y dado que el determinante hessiano se puede escribir como:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right)^2$$

se puede construir la siguiente tabla para determinar la naturaleza de cada punto crítico.

$P(x_0,y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$det(\boldsymbol{H})$	Naturaleza	f
$P_1\left(0,-\frac{1}{2}\right)$	12	-2	0	-24	Punto silla	-
$P_2\left(4,-\frac{1}{2}\right)$	-12	-2	0	24	Máximo relativo	41.25

Ejemplo 1.3

Obtener los extremos de la siguiente función

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$$

Resolución

De la condición $\bar{\nabla} f = \bar{\mathbf{0}}$, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3 = 0$$

de la primera ecuación se tiene $y = x^3$, que al sustituirla en la segunda da como resultado,

$$4x - 4x^9 = 0, \quad x_1 = 0$$

$$x^8 - 1 = 0, \quad x_2 = 1, \; x_3 = -1$$

Por lo que los puntos críticos son: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$, $P_3(-1,-1)$

Para determinar su naturaleza se utiliza el criterio de la segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

Finalmente, se construye la tabla

$P(x_0,y_0)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$det(\boldsymbol{H})$	Naturaleza	f
$P_1(0,0)$	0	0	4	-16	Punto silla	-
$P_2(1,1)$	-12	-12	4	128	Máximo rel.	2
$P_3(-1,-1)$	-12	-12	4	128	Máximo rel.	2

Y los extremos son:

Máximos relativos en $(1,1,2)$ y $(-1,-1,2)$.

Obsérvese que los extremos de una función son los puntos máximos y mínimos de ésta, los puntos silla no son extremos.

Ejemplo 1.4

Obtener los máximos, mínimos y puntos silla de la función

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

Resolución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + 4y^2)(-2x)e^{1-x^2-y^2} + 2xe^{1-x^2-y^2}$$

$$= 2x(1 - x^2 - 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + 4y^2)(-2y)e^{1-x^2-y^2} + 8ye^{1-x^2-y^2}$$

$$= 2y(4 - x^2 - 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

Al igualar a cero, el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 - 4y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \\ 2y(4 - x^2 - 4y^2)e^{1-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema anterior, lo primero que debe observarse es que la función exponencial $e^{1-x^2-y^2}$ nunca es cero, por lo que el sistema se reduce a

$$\begin{cases} 2x(1 - x^2 - 4y^2) = 0 \\ 2y(4 - x^2 - 4y^2) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo simultáneamente el sistema se tienen los puntos críticos:

$(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$

Las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(\,2x^4 + 8x^2y^2 - 5x^2 - 4y^2 + 1\,)\,e^{1-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(\,8y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - 20y^2 + 4\,)\,e^{1-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 4y(\,x^3 + 4xy^2 - 5x\,)\,e^{1-x^2-y^2}$$

Si $\det(H) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)^2$

P	$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\vert_P$	$\det(\boldsymbol{H}\vert_P)$	Naturaleza	f
$(0,0)$	$2e$	$16e^2 > 0$	Mínimo relativo	0
$(1,0)$	-4	$-24 < 0$	Punto Silla	1
$(-1,0)$	-4	$-24 < 0$	Punto Silla	1
$(0,1)$	-6	$96 > 0$	Máximo Relativo	4
$(0,-1)$	-6	$96 > 0$	Máximo Relativo	4

———————————————————————————————

MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE MÁS DE DOS VARIABLES

En la vida profesional de un ingeniero, es común enfrentarse a problemas de optimación para funciones de n variables independientes. En esta sección se generalizarán los conceptos de máximos y mínimos vistos para funciones de dos variables.

Teorema 1.4 (Puntos críticos de una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Para que una función $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(\bar{\boldsymbol{x}})$ $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tenga un extremo en un punto $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ del dominio de f, es condición necesaria que el gradiente de la función se anule en dicho punto, o bien que el gradiente no exista en ese punto, es decir:

$$\bar{\nabla} f = \bar{\boldsymbol{0}} \ \text{ en } \bar{\boldsymbol{x}}_0 \quad \text{o bien que} \quad \bar{\nabla} f \ \nexists \ \text{ en } \bar{\boldsymbol{x}}_0$$

El desarrollo de la segunda derivada direccional para determinar la naturaleza de un punto crítico, lleva nuevamente a la matriz hessiana, que es una matriz simétrica de segundas derivadas parciales. Utilizando la notación de Lagrange para indicar las derivadas parciales de la función f, la matriz hessiana adquiere la forma:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

En particular para una función de tres variables independientes, $f = f(x,y,z)$, la matriz hessiana $\boldsymbol{H}$ es:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Antes de establecer el criterio de la segunda derivada generalizado, se deben estudiar algunos resultados del álgebra lineal.

Teorema 1.5 (Matriz definida positiva)

Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{n}$ simétrica es *definida positiva*, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\, \bar{\boldsymbol{x}} > 0$ para todos los vectores $\bar{\boldsymbol{x}}$ distintos de cero vector.
- Los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son todos positivos.
- Todas las submatrices principales superiores izquierdas (angulares) $\boldsymbol{A_k}$ tienen determinantes positivos.
- Todos los pivotes (sin intercambio de filas) son positivos.

Teorema 1.6 (Matriz definida negativa)

Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{n}$ simétrica es *definida negativa*, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\, \bar{\boldsymbol{x}} < 0$ para todos los vectores $\bar{\boldsymbol{x}}$ distintos de cero vector.
- Los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son todos negativos.
- Todas las submatrices principales superiores izquierdas (angulares) $\boldsymbol{A_k}$ tienen determinantes con signos alternados, comenzando con $\boldsymbol{A_1}$ negativo. Es decir
  $(-1)^k \det(\boldsymbol{A_k}) > 0 \quad \forall \quad 1 \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$
- Todos los pivotes (sin intercambio de filas) son negativos.

Teorema 1.7 (Matriz indefinida)
Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden $\boldsymbol{n}$ simétrica es *indefinida*, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\, \bar{\boldsymbol{x}} > 0$ para algunos vectores $\bar{\boldsymbol{x}}$ distintos de cero y $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\, \bar{\boldsymbol{x}} < 0$ para otros vectores $\bar{\boldsymbol{x}}$ distintos de cero vector.
- Los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$ son unos positivos y otros negativos.
- Los determinantes de las submatrices angulares no son cero y no corresponden a matrices definida positiva o definida negativa.
- Los pivotes (sin intercambio de filas) son positivos y negativos.

Cuando una matriz $\boldsymbol{A}$ no puede clasificarse como positiva, negativa o indefinida, se dice que es *semidefinida*, pudiendo ser semidefinida positiva o semidefinida negativa.

Finalmente para determinar la naturaleza de un punto crítico, se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.8 (Generalización del criterio de la segunda derivada)
Dada un función $f = f(\bar{x})$ con primeras y segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto $\bar{x}_0$, para el cual $\bar{\nabla} f \big|_{\bar{x}_0} = \bar{0}$, y H es la matriz hessiana, se tiene que:

1. Si H es una matriz definida negativa, entonces $f(\bar{x}_0)$ es un *máximo relativo*.

2. Si H es una matriz definida positiva, entonces $f(\bar{x}_0)$ es un *mínimo relativo*.

3. Si H es una matriz indefinida, entonces en $\bar{x}_0$ existe un *punto silla*.

4. Si H es una matriz semidefinida, entonces el criterio no proporciona información.

Ejemplo 1.5

Si una función f, con dominio en $\mathbb{R}^3$, tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas y en un punto para el cual $\bar{\nabla} f = \bar{0}$ se tienen las matrices hessianas siguientes, clasificar cada una de las siguientes matrices en definida positiva, definida negativa, indefinida o semidefinida, además determinar la naturaleza del punto crítico bajo estudio.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 5 & 3 & -4 \\ 10 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Resolución

a) Matriz definida positiva. Mínimo relativo

b) Obteniendo los determinantes de las submatrices angulares

$\det(H_1) = 2$

$\det(H_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$\det(H_3) = \det(H) = 4$

Matriz indefinida. Punto silla

c) Obteniendo los determinantes de las submatrices angulares

$\det(H_1) = 4$

$\det(H_2) = -13$

$\det(H) = -855$

Matriz indefinida. Punto silla

d) Obteniendo los determinantes de las submatrices angulares

$\det(H_1) = 1$, $\det(H_2) = 18$

$\det(H_3) = -11$

Matriz indefinida. Punto silla

e) Obteniendo los determinantes de las submatrices angulares

$\det(H_1) = 2$, $\det(H_2) = 6$

$\det(H_3) = 10$

Matriz definida positiva. Punto mínimo

Ejemplo 1.6

Obtener los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = -x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

y determinar su naturaleza.

Resolución

De la condición $\bar{\nabla} f = \bar{0}$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y + 2z = 0 \quad \text{... (a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 2x + 2z = 0 \quad \text{... (b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -10z + 2x + 2y = 0 \quad \text{... (c)}$$

Las ecuaciones (a), (b) y (c) forman un sistema lineal homogéneo cuya solución es la trivial

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

$\therefore$ El único punto crítico es $P\,(0,0,0)$

Para la matriz hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -10$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

De donde

$$\det(\boldsymbol{H_1}) = -2 < 0$$

$$\det(\boldsymbol{H_2}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\det(\boldsymbol{H}) = -32 < 0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{H}$ es una matriz definida negativa y P es un máximo relativo

$$f(0,0,0) = 0$$

Otra forma de determinar la naturaleza es:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Donde se observa que la diagonal principal de la última matriz está formada por $-2, -4, -4$, por lo que la matriz es definida negativa.

Ejemplo 1.7

Obtener los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 8x - 4y + 2z - 3$$

y determinar su naturaleza.

Resolución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 2y + 8 = 0 \quad \text{. . . (a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 2x + 2z - 4 = 0 \quad \text{. . . (b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z + 2y + 2 = 0 \quad \text{. . . (c)}$$

El sistema formado por (a), (b), y (c) es lineal y su solución es

$$x = 3,\ y = 2,\ z = 3$$

Por lo que el único punto crítico es $P\,(3,2,3)$

Para la matriz hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -4 < 0 \;\; ; \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\det(H) = -8 < 0$$

Puesto que H es definida negativa, entonces en P existe un máximo relativo. Finalmente:

$$f(3,2,3) = 8$$

El criterio para determinar la naturaleza de un punto crítico a través de los valores característicos de la matriz hessiana es el más poderoso; sin embargo, sólo en algunas ocasiones resulta sencillo el obtener las raíces del polinomio característico, puesto que las raíces de un polinomio de tercer grado o superior, donde las raíces pueden ser irracionales, es en general una labor complicada.

Por fortuna, para determinar la naturaleza de un punto crítico, no es necesario obtener los valores característicos, basta con saber los signos de los valores característicos y para ello se emplea el teorema de los signos de Descartes. Recordando que para una matriz simétrica, los valores característicos son siempre reales.

Los criterios de los signos de la diagonal principal y el de las submatrices son mucho más sencillos, pero tienen el inconveniente de que están en función del arreglo elegido para obtener la matriz hessiana; es decir, se puede obtener una matriz considerando el orden de las variables x,y,z y otra matriz para el orden y,z,x, etc. Si el determinante de la matriz de mayor orden es diferente de cero, entonces debe existir un arreglo para el cual el criterio decida, pero no siempre es el tradicional, por lo que si se utiliza uno de estos criterios y se obtienen ceros, no debe considerarse que el criterio no decide, debe buscarse una permutación adecuada o debe utilizarse el criterio de los valores característicos.

El siguiente ejemplo muestra una caso en el cual la obtención de los valores característicos es bastante sencilla.

Ejemplo 1.8

Obtener los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

y determinar su naturaleza.

Resolución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \qquad \ldots (a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \qquad \ldots (b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \qquad \ldots (c)$$

El sistema formado por (a), (b), y (c) es lineal y su solución es $x = -\dfrac{2}{3}$,

$y = -\dfrac{1}{3}$, $z = 1$

Por lo que el único punto crítico es $P\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right)$

Para la matriz hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad H - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = 0 \;\Rightarrow\; (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1)(2-\lambda) = 0$$

Factorizando $(2-\lambda)$ se tiene:

$$(2-\lambda)\left[4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1\right] = 0$$

de donde: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$

y puesto que todos los valores característicos son positivos, se tiene que

$P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ es un mínimo relativo.

Finalmente: $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{4}{3}$

El siguiente ejemplo muestra como el criterio de la segunda derivada a través de los valores característicos puede emplearse también para funciones de más de 3 variables.

Ejemplo 1.9

Obtener los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z,w) = x^2 + 12y^2 + 6z^2 + 4w^2 - 8w - 12x + 24y + 10$$

y determinar su naturaleza.

Resolución

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 12 = 0$ . . . (a)

$\frac{\partial f}{\partial y} = 24y + 24 = 0$ . . . (b)

$\frac{\partial f}{\partial z} = 12z = 0$ . . . (c)

$\frac{\partial w}{\partial w} = 8w - 8 = 0$ . . . (d)

El sistema de ecuaciones formado por (a), (b), (c) y (d) es lineal y su solución es: $x = 6$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 1$

Para la matriz hessiana

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12$

$\frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial z} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 8$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

De la condición $\det(\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$

se tienen los valores característicos

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 24$, $\lambda_3 = 12$, $\lambda_4 = 8$

Puesto que $\lambda_i > 0$; $i = 1, 2, 3, 4$.

El punto $P(6, -1, 0, 1)$ existe un mínimo relativo.

$$f(6, -1, 0, 1) = -42$$

La aplicación de la optimación de funciones se muestra en los siguientes problemas.

Ejemplo 1.10

Una compañía fabrica dos productos. Los ingresos totales de x_1 unidades del producto 1 y de x_2 unidades del producto 2 son

$$R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1 x_2 + 42x_1 + 102x_2$$

Obtener el número de unidades de los productos 1 y 2 de tal forma que los ingresos sean máximos.

Resolución

$\frac{\partial R}{\partial x_1} = -10x_1 - 2x_2 + 42 = 0$

$\frac{\partial R}{\partial x_2} = -16x_2 - 2x_1 + 102 = 0$

Resolviendo el sistema se obtiene: $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} = -10 \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x_2^2} = -16 \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x_2 \partial x_1} = -2$$

Valuando en el punto crítico se observa que

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} < 0 \qquad \text{y} \qquad \det(H)|_p > 0$$

Por lo que el máximo se obtiene cuando

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 6$$

Si la función que desea maximizarse o minimizarse (optimarse) está sujeta a restricciones, entonces se puede sustituir la restricción en la función objetivo. En el siguiente ejemplo, **F.O.** se utiliza como abreviatura de *función objetivo*, mientras que **s.a** significa *sujeto a*.

Ejemplo 1.11

Obtener tres números positivos x, y, z tales que su suma sea *32* y $P = xy^2z$ sea máximo.

Resolución

F.O. Máx $P = xy^2z$

s.a $x + y + z = 32$

De la restricción $z = 32 - x - y$ y sustituyendo en la F.O. se tiene

$$P = 32xy^2 - x^2y^2 - xy^3$$

derivando

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 32y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 64xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0$$

Omitiendo el caso en el que $y = 0$ el sistema queda:

$$32 - 2x - y = 0 \qquad \text{. . . (a)}$$

$$64x - 2x^2 - 3xy = 0 \qquad \text{. . . (b)}$$

Despejando y de (a) y sustituyendo en (b)

$$64x - 2x^2 - 3x(32 - 2x) = 0$$

$$4x(x - 8) = 0$$

de donde: $x = 8 \;\; y = 16 \;\; z = 8$

que son los números buscados.

Ejemplo 1.12

Obtener la distancia mínima del punto $(0, 0, 0)$ al plano

$$2x + 3y + z = 12$$

Resolución

Puesto que la distancia d ser maximiza o se minimiza cuando sea máxima o mínima respectivamente, entonces el problema puede formularse como:

mín $D = d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

Si el punto (x_1, y_1, z_1) es el origen entonces sus coordenadas son: $(0, 0, 0)$ y al sustituir se obtiene:

mín $D = x^2 + y^2 + (12 - 2x - 3y)^2$

derivando parcialmente para obtener el punto crítico:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2x + 2(12 - 2x - 3y)(-2) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 2y + 2(12 - 2x - 3y)(-3) = 0$$

simplificando se obtiene el sistema

$$5x + 6y = 24$$
$$3x + 5y = 18$$

Resolviendo el sistema se tiene: $x = \frac{12}{7} \qquad y = \frac{18}{7}$

Con los valores de x y y al sustituir en la ecuación del plano se tiene $z = \frac{6}{7}$.

Finalmente, el punto del plano más cercano al origen es $\left(\frac{12}{7}, \frac{18}{7}, \frac{6}{7}\right)$ y la distancia entre ellos es:

$$d = \sqrt{\left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3.207$$

Ejemplo 1.13

El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces lo que el material para construir los lados. Para una cantidad fija de dinero C_0, determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede construirse.

Resolución

Sean x, y, z el largo, ancho y alto de la caja respectivamente, entonces:

El costo de la caja es proporcional a $1.5xy + 2yz + 2xz$; es decir, el costo está dado por:

$C = k(1.5xy + 2yz + 2xz)$, donde k es una constante de proporcionalidad que representa el precio por metro cuadrado del material de los lados.

El planteamiento del problema es:

F.O. $V = xyz$

s.a $k(1.5xy + 2yz + 2xz) = C_o$

Despejando z de la restricción y sustituyendo en la F.O

$$V = xy\frac{\left(\frac{C_o}{k} - 1.5xy\right)}{2(y+x)} = \frac{\frac{C_o}{k}xy - 1.5x^2y^2}{2(x+y)}$$

derivando e igualando a cero

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2\left(2\frac{C_o}{k} - 3x^2 - 6xy\right)}{2(x+y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2\left(2\frac{C_o}{k} - 3y^2 - 6xy\right)}{4(x+y)^2} = 0$$

simplificando

$$2\frac{C_o}{k} - 3x^2 - 6xy = 0$$

$$2\frac{C_o}{k} - 3y^2 - 6xy = 0$$

Por la simetría de las ecuaciones se obtiene $x = y$ y sustituyendo en $\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\frac{x^2\left(2\frac{C_o}{k} - 9x^2\right)}{16x^2} = 0 \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{C_o}{k}}$$

con lo que $y = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{C_o}{k}}$ y $z = \frac{1}{4}\sqrt{2\frac{C_o}{k}}$

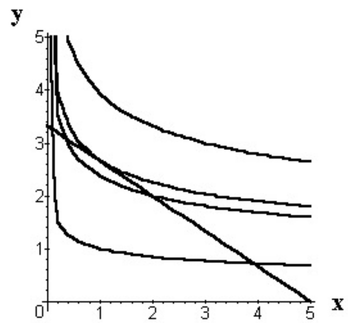
Finalmente, las dimensiones para obtener el volumen máximo son:

$$x = y = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{C_o}{k}} \qquad z = \frac{1}{4}\sqrt{2\frac{C_o}{k}}$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

La forma más generalizada de resolver problemas de máximos y mínimos con restricciones es mediante el método que propuso Joseph Louis Lagrange. Lagrange, a la edad de 19 años, desarrolló el método que lleva su nombre para resolver problemas de optimación restringida.

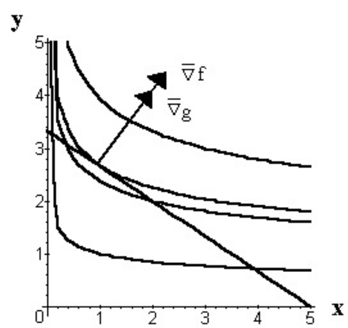
En el caso más sencillo, cuando se tiene un función de dos variables como por ejemplo $f(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, donde A, α y β son constantes tales que $A > 0$, $\alpha + \beta = 1$, y se desea maximizar la función sujeta a la restricción $p_1x + p_2y = c$, debe observarse que para representar a la función objetivo y a la restricción en una misma gráfica, la función objetivo debe dibujarse empleando sus curvas de nivel, teniéndose una gráfica como la mostrada en la siguiente página; donde la *recta* representa la restricción; y las *curvas* son las curvas de nivel de la función objetivo, trazadas para diversos niveles.



Lagrange observó que el máximo de la función objetivo, sujeta a la restricción se obtiene en el punto para el cual la curva de nivel de la función objetivo y la restricción son tangentes, por lo que para encontrar ese punto planteó la ecuación:

$$\bar{\nabla} f = \lambda \bar{\nabla} g$$

donde f es la función objetivo, g es la restricción igualada a cero y λ es un escalar que iguala los vectores gradientes[1] y recibe el nombre de *multiplicador de Lagrange*



De la condición de paralelismo de los vectores gradientes y de la restricción se obtiene, para un caso como el ilustrado, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$g(x,y) = 0$$

En particular, para el ejemplo, se tiene:

$$A\,\alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta} = \lambda\, p_1$$

$$A\,\beta\, x^{\alpha} y^{\beta-1} = \lambda\, p_2$$

$$p_1 x + p_2 y = c$$

Al despejar λ de las primeras dos ecuaciones, e igualar, se obtiene la expresión

$$\frac{\alpha\, y}{\beta\, x} = \frac{p_1}{p_2}$$

de donde, al despejar y se obtiene $y = \dfrac{\beta\, p_1 x}{\alpha\, p_2}$, que al sustituirlo en la restricción genera

$$p_1 x + p_2 \left(\frac{\beta\, p_1 x}{\alpha\, p_2} \right) = c$$

simplificando y recordando que $\alpha + \beta = 1$ se tiene:

$$x = \frac{c\,\alpha}{p_1}$$

$$y = \frac{c\,\beta}{p_2}$$

Que proporciona el punto óptimo.

Es muy común escribir la ecuación de Lagrange de la siguiente forma:

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

puesto que al calcular las primeras derivadas parciales de la función L e igualarlas a cero

[1] Obsérvese que los vectores gradientes en el punto óptimo tiene la misma dirección, pero no necesariamente el mismo sentido ni el mismo módulo, por lo que para igualarlos es necesario introducir una constante de proporcionalidad λ.

se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x,y) = 0$$

que lleva al mismo sistema utilizado para resolver el problema a partir de la condición $\bar{\nabla} f = \lambda \bar{\nabla} g$. Por otro lado, cuando el signo del multiplicador de Lagrange no es relevante, entonces es muy común plantear la ecuación de Lagrange como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 1.9

Si f y g son funciones con primeras derivadas parciales continuas, y f tiene un extremo sujeto a la restricción $g(x,y) = 0$, entonces dicho extremo se producirá en uno de los puntos críticos de la función L definida por:

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

El teorema anterior puede extenderse para el caso en el que la función objetivo sea de tres variables, planteándose el problema de la siguiente manera:

$$F.O. \quad f = f(x,y,z)$$

$$s.a. \quad g(x,y,z) = 0$$

y teniendo como ecuación de Lagrange a:

$$L(\lambda, x, y, z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

La ecuación de Lagrange puede generalizarse para n variables y m restricciones, teniéndose el problema:

$$F.O. \quad f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$s.a. \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

y la ecuación de Lagrange:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=i}^{m} \lambda_i \; g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Los siguientes ejemplos muestran la utilización del método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 1.14

Emplear el método de los multiplicadores de Lagrange para *minimizar* la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sujeta a la restricción $2x + 4y - 15 = 0$.

Resolución

F.O. $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

s.a $\quad g(x,y) = 2x + 4y - 15 = 0$

La ecuación de Lagrange es

$$L(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda(2x + 4y - 15) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0 \qquad \ldots (a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0 \qquad \ldots (b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 4y - 15 = 0 \qquad \ldots (c)$$

De (a) $\lambda = -x$

De (b) $\lambda = -\frac{1}{2}y$

Igualando las lambdas se tiene $x = \frac{1}{2}y \Rightarrow y = 2x$ y sustituyendo en la ecuación (c)

$2x + 4(2x) - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ y $y = 3$

El mínimo es $f\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Ejemplo 1.15

Emplear el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la ligadura $2x + y = 4$.

Resolución

F.O. $f(x, y) = xy$

s.a $g(x, y) = 2x + y - 4 = 0$

La ecuación de Lagrange es:

$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2xy - 4)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \quad \ldots (a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0 \quad \ldots (b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + y - 4 = 0 \quad \ldots (c)$$

De (a), $y = -2\lambda$

De (b), $x = -\lambda$

sustituyendo en (c), $-2\lambda - 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -1$

por lo que:

$x = 1$

$y = 2$

y el máximo es $f(1, 2) = 2$

Ejemplo 1.16

Se desea construir un recipiente cilíndrico sin tapa de tal manera que su volumen sea igual a $8\pi\ m^3$. Determinar las dimensiones correspondientes para que se minimice la cantidad de material utilizado, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Resolución

F. O. $A = 2\pi r h + \pi r^2$

s. a $V = \pi r^2 h = 8\pi$

Utilizando los multiplicadores de Lagrange

$h + r + \lambda r h = 0$

$2 + \lambda r = 0$

$r^2 h - 8 = 0$

De donde la solución es

$r = 2\ m$

$h = 2\ m$

Ejemplo 1.17

Demostrar, empleando los multiplicadores de Lagrange, que el paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera, es un cubo.

Resolución

Maximizando el volumen de un paralelepípedo inscrito en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

F.O. $V = 8xyz$

s.a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

De la ecuación de Lagrange:

$L(x,y,z,\lambda) = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + 2\lambda x = 0 \quad \ldots \quad (a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + 2\lambda y = 0 \quad \ldots \quad (b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 8xy + 2\lambda z = 0 \quad \ldots \quad (c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad \ldots \quad \text{(d)}$$

De (a) y (b) despejando a λ e igualando

$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

De (b) y (c) de manera análoga

$$\frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \quad \Rightarrow \quad y = z$$

De donde $x = y = z$ y el paralelepípedo es un cubo.

Ejemplo 1.18

Obtener mediante multiplicadores de Lagrange, el valor máximo de $f(x,y,z) = xyz$ sujeto a las restricciones:

$$x + y + z = 4$$
$$x - y - z = 3$$

Resolución

La ecuación de Lagrange es:

$$g(x,y,z,\lambda,\mu) = xyz + \lambda(x + y + z - 4) + \mu(x - y - z - 3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yz + \lambda + \mu = 0 \quad \ldots \text{(a)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = xz + \lambda - \mu = 0 \quad \ldots \text{(b)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = xy + \lambda - \mu = 0 \quad \ldots \text{(c)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = x + y + z - 4 \quad \ldots \text{(d)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = x - y - z - 3 = 0 \quad \ldots \text{(e)}$$

De (b) y (c)

$$xz = xy \quad \Rightarrow \quad z = y \quad \ldots \text{(f)}$$

Sustituyendo (f) en (d) y (e)

$$x + 2y = 4$$
$$-x + 2y = -3$$

de donde: $4y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = z = \frac{1}{4}$

sustituyendo en (e): $x = \frac{7}{2}$

Por lo que el único punto crítico es: $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

y el máximo de la función es $f\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} \approx 0.21875$

Es muy sencillo verificar que el punto crítico encontrado en el ejemplo anterior es un mínimo, puesto que al obtener otro punto que satisfaga las restricciones, por ejemplo un punto para el cual $z = 0$, y se encuentren los valores respectivos de x y y se observa que la función objetivo vale cero, con lo que el valor $\frac{7}{32}$ encontrado es un máximo.

Existen problemas de optimización restringida, para los cuales deben emplearse los métodos del hessiano (máximos y mínimos libres) y el de los multiplicadores de Lagrange (restricción con igualdad). El siguiente ejemplo, en el cual la restricción es una región en $\mathbb{R}^3$, con puntos interiores y puntos frontera, deben utilizarse ambos métodos para obtener la solución

---

Ejemplo 1.19

Obtener los puntos máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xz + y + 1$$

sujeta a la restricción $\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Resolución

Para los puntos interiores $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ y de la condición $\bar{\nabla} f = \bar{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + z = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -2z + x = 0$$

El punto crítico es $P_1\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

La matriz hessiana es : $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Los determinantes de las submatrices angulares son

$\det(H_1) = -2 \quad \det(H_2) = 4 \quad \det(H) = -6$

$\therefore$ H es definida negativa y en P_1 se encuentra un máximo relativo, el máximo es $f\left(0,\frac{1}{2},0\right) = \frac{5}{4} = 1.25$

Para los puntos frontera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y de la condición $\overline{\nabla} f = \lambda \overline{\nabla} g$ se obtiene el sistema

$$-2x + z = \lambda\,(2x) \qquad \text{... (a)}$$
$$-2y + 1 = \lambda\,(2y) \qquad \text{... (b)}$$
$$-2z + x = \lambda\,(2z) \qquad \text{... (c)}$$

y de la restricción

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{... (d)}$$

de (a) y (b)

$$\frac{-2x+z}{2x} = \frac{-2y+1}{2y}$$
$$y\,(-2x+z) = x\,(-2y+1)$$
$$-2xy + yz = -2xy + x$$
$$x = yz \qquad \text{... (e)}$$

de (b) y (c)

$$\frac{-2y+1}{2y} = \frac{-2z+x}{2z}$$
$$z\,(-2y+1) = y\,(-2z+x)$$
$$-2yz + z = -2yz + xy$$
$$z = xy \qquad \text{... (f)}$$

de (e) y (f)

$$yz = \frac{z}{y}$$

Si $z = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = \pm 1$

$P_2\,(0,-1,0) \Rightarrow f\,(0,-1,0) = -1$

$P_3\,(0,1,0) \Rightarrow f\,(0,1,0) = 1$

Finalmente:

En $P_1\left(0,\frac{1}{2},0\right)$ se tiene un máximo absoluto, y es $\frac{5}{4}$

En $P_2\,(0,-1,0)$ se tiene un mínimo absoluto, y es -1

Ejemplo 1.20

Considérese una placa metálica cuadrada de lado 2, que puede definirse mediante la región

$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \ ,\ 0 \le y \le 2 \ ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$

En la cual, en cada punto se observa una temperatura diferente, según la función:

$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$

Determinar el punto más caliente de la placa y el más frío.

Resolución

Deben encontrarse los extremos (absolutos) de la función definida en un dominio específico.

Para los puntos interiores, de la condición $\overline{\nabla} f = \overline{\mathbf{0}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0$$

Al resolver el sistema se obtiene que el punto critico es $P_1(1,1)$

El hessiano es $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ P_1 es un punto silla

Para analizar la frontera, puesto que es una región cuadrada, se analiza cada una de las rectas.

En la frontera $y = 0$,

$f(x,0) = x^2$ existe un mínimo en $x = 0$, $f(0,0) = 0$

En la frontera $y = 2$,

$f(x,2) = x^2 - 4x + 4$ existe un mínimo en $x = 2$, $f(2,2) = 0$

En la frontera $x = 0$,

$f(0,y) = 2y$ se consideran sólo los extremos del intervalo, por lo que $f(0,2) = 4$ y $f(2,0) = 4$

Finalmente: El máximo absoluto es 4 , en $(0,2)$ y $(2,0)$ y en esos puntos se tiene la máxima temperatura.

El mínimo absoluto es 0 , en $(0,0)$ y $(2,2)$ y en esos puntos se tiene la mínima temperatura.

———————————————————————————————

Los multiplicadores de Lagrange, también son aplicados en las decisiones financieras de inversión, como lo muestra el siguiente ejemplo.

———————————————————————————————

Ejemplo 1.21

La función de utilidad de un individuo es

$$U(c_0, c_1) = c_0^{\frac{3}{4}} c_1^{\frac{1}{4}}$$

donde c_0 es su consumo al inicio de un período de tiempo y c_1 su consumo al final de ese mismo período. Utilizar multiplicadores de Lagrange para maximizar la utilidad del individuo, si la suma de los cuadrados de los consumos inicial y futuro es 20.

Resolución

F.O. $\quad máx \;\; U = c_0^{\frac{3}{4}} c_1^{\frac{1}{4}}$

s.a $\quad 20 = c_0^2 + c_1^2$

De la condición $\overline{\nabla} U = \lambda \overline{\nabla} g$

$$\frac{3}{4} c_0^{-\frac{1}{4}} c_1^{\frac{1}{4}} = \lambda (2 c_o) \qquad \text{...(a)}$$

$$\frac{1}{4} c_0^{\frac{3}{4}} c_1^{-\frac{3}{4}} = \lambda (2 c_1) \qquad \text{...(b)}$$

y de la restricción

$$20 = c_0^2 + c_1^2 \qquad \text{...(c)}$$

De (a) y (b) $\quad 3 c_1^2 = c_0^2$ y sustituyendo en (c)

$$c_0 = \sqrt{15}$$

$$c_1 = \sqrt{5}$$

Que es el par de consumo óptimo.

———————————————————————————————

BIBLIOGRAFÍA

Cálculo, Conceptos y Contextos.- Stewart, James.- Editorial Thomson.- Tercera Edición.- México, 2006.

Cálculo Vectorial.- Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony J.- Pearson Addison-Wesley, S.A.- Quinta edición.- Madrid, 2004.

Análisis Vectorial.- Davis, Harry F. y Snider, Arthur David.- McGraw-Hill.- Primera edición.- México, 1992.

Cálculo y Geometría Analítica.- Larson, Roland P. , Hostetler, Robert P. y Edwards, Bruce H. -McGraw-Hill.-Octava edición.- China, 2006.

Cálculo Vectorial.- Pita Ruiz, Claudio.- Prentice Hall Hispanoamérica S.A.- Primera edición.- México, 1995.

Cálculo con Geometría Analítica.- Zill, Dennis G.- Grupo Editorial Iberoamérica.- Primera edición.- México, 1987.

Cálculo con Geometría Analítica.- Swokowski, Earl W.- Grupo Editorial Iberoamérica.- Segunda edición.- México, 1988.

El Cálculo con Geometría Analítica.- Leithold, Louis.- HARLA.- Sexta edición.- México, 1992.

Cálculo, Tomo 2.- Smith, Robert T. y Minton, Roland B.- Segunda edición.-McGraw-Hill.- Madrid, 2002.