UNIDAD 2
LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

Propósitos. Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado y obtener la derivada de dichas funciones con apoyo de la noción de límite.

Aprendizajes. Al finalizar la unidad el alumno:
- Explica el significado de la pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado.
- Elabora una tabla, dibuja la gráfica y construye una expresión algebraica asociadas al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado.
- Identifica que una función lineal tiene variación constante, en intervalos del mismo tamaño.
- Identifica que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.
- Infiere que el n−ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado n.
- Calcula la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado.
- Utiliza procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.
- Identifica a la derivada de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio.
- Calcula la derivada de funciones polinomiales usando: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Introducción.
Siguiendo la orientación de nuestro curso, al analizar la variación y la *razón de cambio*, partiremos de situaciones o fenómenos de variación dados en diferentes contextos.

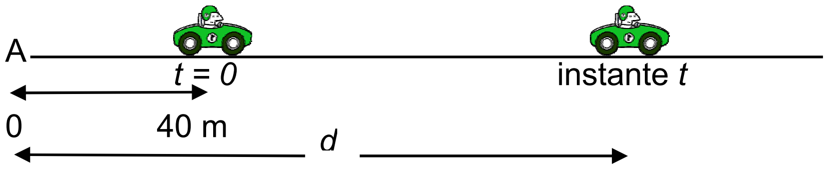
Analizaremos fenómenos con magnitudes variables tales como: velocidad, temperatura, costos o algunos otros. Independientemente de la situación, lo importante es que puedas contar con los elementos que te permitan realizar dicho análisis para culminarlo con la obtención de la **derivada**, concepto que es la representación matemática de la *razón de cambio.*

La estrategia a seguir es modelar el fenómeno o situación con una función real de variable real, es decir, con el tipo de funciones que hasta ahora has estado trabajando durante tus cuatro semestres anteriores, al fenómeno o situación correspondiente, para que con su representación tabular, gráfica o algebraica puedas comprender los conceptos y procedimientos involucrados en tu análisis.

Te recordamos que la estrategia a seguir en todo el libro es trabajar los problemas que tratemos con las distintas representaciones: tabular, gráfica y algebraica, está última a través del modelo que se representará como una función real de variable real, es decir, con el tipo de funciones que hasta ahora has estado trabajando durante tus anteriores cuatro semestres.

Actividad 1.

Un automóvil se desplaza, con una velocidad constante de 108 km/hora, por un tramo recto de una carretera. En el momento en que empezamos a medir el tiempo el automóvil se encuentra 40 metros a la derecha de un punto A de referencia sobre la carretera, tal y como muestra la figura.

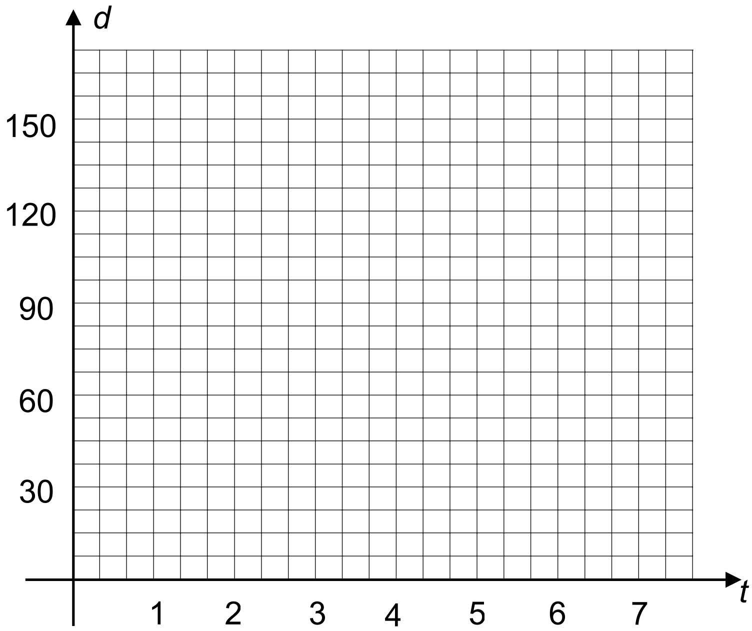


1. ¿A qué velocidad va el automóvil en metros/segundo? ________________

2. Para conocer la forma en que se va moviendo el automóvil completa la tabla, en donde *d* representa la distancia recorrida en metros desde el punto A y *t* el tiempo transcurrido en segundos a partir de que se comienza a medir.

t	*d*
0	40
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

3. Traza una gráfica de *t* contra d



Para completar adecuadamente la tabla, debiste considerar los 40 metros iniciales que tenía recorrido el automóvil y que su velocidad, o rapidez, en metros por segundo es de 30. Verifica que al primer segundo la distancia total es de 70 metros, pues habrá que considerar los 40 metros recorridos inicialmente y a los 2 segundos la distancia total es de 100 metros, etc.

4. Encuentra el modelo que representa la distancia recorrida por el automóvil en función del tiempo, es decir $d(t)$.

Para hallar $d(t)$ te pudiste basar en la tabulación o en la gráfica que hiciste, al analizar el problema y observar que en el momento que se empezó a contabilizar el tiempo, $t = 0$, el automóvil ya había recorrido 40 metros. Al primer segundo había avanzado en total 40 + 30(1) metros, al segundo 40 + 30(2) metros y así sucesivamente, por lo que:

$$d(t) =$$

5. La gráfica que obtuviste es una semirrecta, que parte del punto (0,40), determina su pendiente y establece cuál es la relación de esta con la ecuación $d(t)$.

$$\text{Pendiente} = m =$$

La función $d(t)$ es una función polinomial de primer grado, por lo tanto es una función lineal. Como recordarás, la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) está dada por la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, por lo que la pendiente de la semirrecta la puedes encontrar utilizando dos puntos, por ejemplo (0,40) y (1,70). También puedes escribir la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen, a saber, $y = mx + b$, para compararla con la función que has obtenido, $d(t) = 30t + 40$, y llegar a la conclusión que la semirrecta tiene pendiente 30 y corta al eje de las ordenadas en el punto (0,40). Existe una clara vinculación entre la pendiente de la semirrecta que describe gráficamente el comportamiento del automóvil y su velocidad, lo cual se nos puede aclarar si recordamos que la velocidad es la razón de cambio de la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

6. En particular, determina la velocidad promedio del automóvil del tiempo $t = 1$ seg., al tiempo $t = 4$ seg., la cual puedes determinar mediante la siguiente razón:

$$v = \frac{d(4) - d(1)}{4 - 1} =$$

7. ¿La razón de cambio de la distancia entre el tiempo transcurrido varia en nuestro problema?

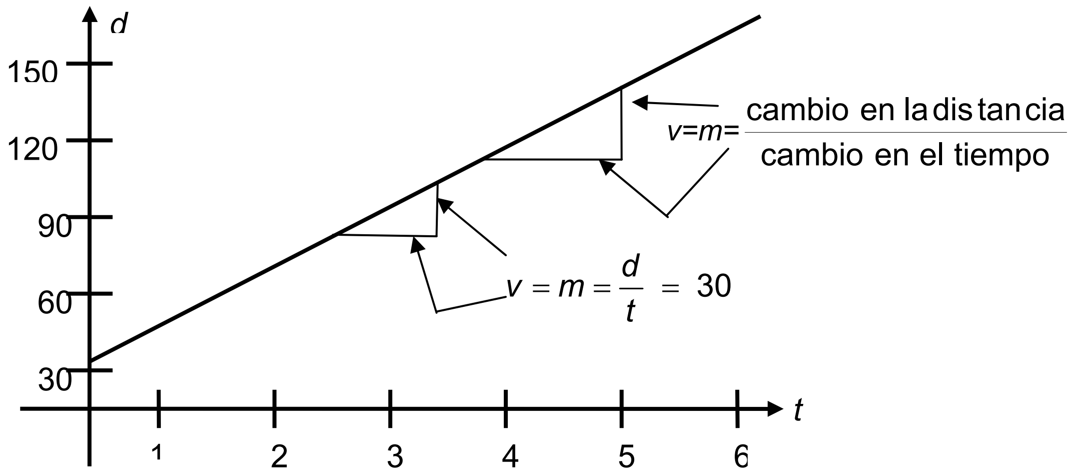
Para contestar correctamente la pregunta anterior te diste cuenta que la razón de cambio, la velocidad en nuestro caso, o la pendiente de la semirrecta en la gráfica, permanece constante e igual a 30 m/s.

8. ¿Cuánto recorre el automóvil de: 1 a 2 segundos, de 2 a 3 segundos, de 3 a 4 segundos y en general de t a $t + 1$ segundos?

El análisis de esta Actividad nos muestra que existen situaciones en las que la razón de cambio de la variable dependiente, en nuestro caso *d*, con respecto a la variable independiente, en nuestro problema *t*, es constante. Esto último se puede también observar del hecho de que una función lineal tiene variación constante, en cualquier intervalo.

Así pues, la razón de cambio es constante, lo cual ocurrirá en todos los casos en los que analicemos la razón de cambio de una función lineal con respecto a su variable independiente.

Gráficamente también podríamos visualizar la identificación entre la velocidad promedio (pendiente de la recta) y la variación constante:

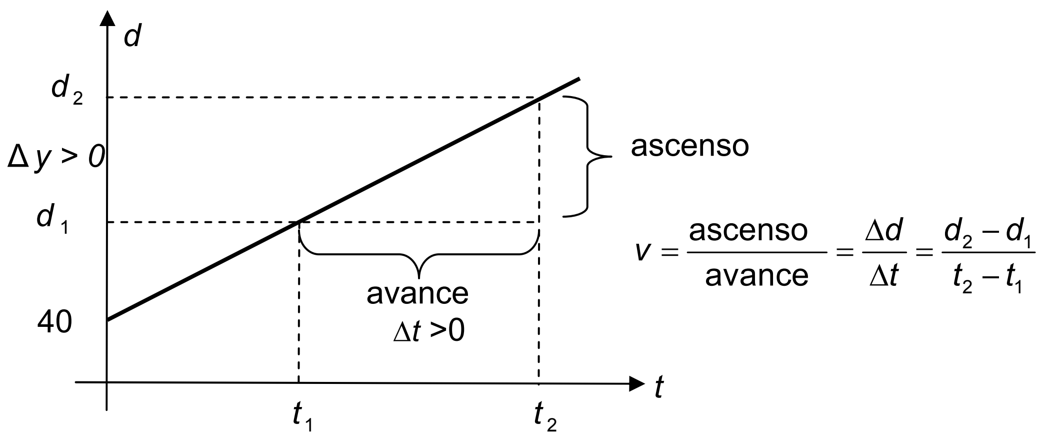


En conclusión, hemos confirmado que en cualquier intervalo, la variación de la función lineal es constante y la pendiente de la recta representa esta variación y constituye la razón del cambio promedio.

Al identificar la **pendiente** de la recta que representa una función lineal.

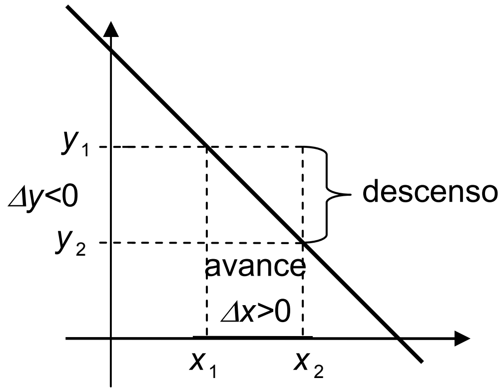
$$y = f(x) = mx + b,$$

con la **variación constante**, se está estableciendo en qué razón varía el *cambio*, "delta de *d*" (Δd), de la variable dependiente con respecto al *cambio*, "delta de *t*" (Δt), de la variable independiente. En nuestro ejemplo hay un aumento en *d* (un ascenso si lo vemos gráficamente) por cada avance de *t*, aumento que está en proporción de la variación constante (razón de cambio promedio, en nuestro caso velocidad promedio):



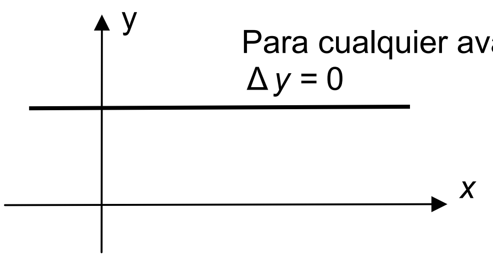
Sin embargo, se pueden presentar otros dos casos.

a) La razón de cambio promedio es negativa; se tendría entonces lo que la pendiente señala en este caso:

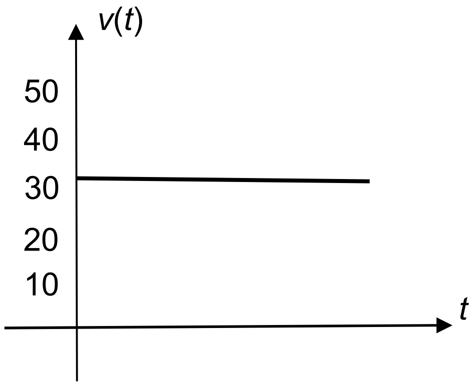


$$m = \frac{\text{descenso}}{\text{avance}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) La razón de cambio promedio es cero, entonces estaríamos en la presencia de una recta horizontal como representación de una función constante:



Observa que la gráfica de la velocidad de nuestra función $d(t)$ es de ese tipo, debido a que $v(t) = 30$.



Otra forma de percibir la variación constante de una función lineal es observando que a intervalos del mismo tamaño de la variable independiente le corresponde una variación constante de la variable independiente, por lo que la razón de cambio permanecerá constante, lo que equivale a la pendiente de la recta representada por la función. Lo anterior lo puedes comprobar en la respuesta que diste a la preguntas 2 y 8.

t	0	1	2	3	4	5	6
d	40	70	100	130	160	190	220

30 30 30 30 30 30

Actividad 2.

Analicemos otro problema similar al que vimos en la Actividad 4 de la Unidad 1, con la pretensión de abordar la aceleración.

En un juego de béisbol uno de los jugadores lanza una pelota a otro jugador con una velocidad inicial de 80 m/seg. Consideramos que la altura a la que se lanza la pelota es cero, la función que describe la trayectoria de la pelota es:

$$s(t) = 80t - 4.9t^2$$

1. Explica cómo se obtuvo esta función.

Como recordarás, la aceleración es un concepto que podemos concebir como el *cambio* (o variación) de la velocidad con respecto al tiempo. Como la velocidad es en sí un *cambio* de la distancia con respecto al tiempo, la aceleración es el cambio del cambio, esto quiere decir que la pelota cuando cae va incrementando su velocidad 9.8 m/seg *cada segundo*, por eso las unidades de la aceleración son en segundos al cuadrado. Claro que cuando la pelota se va elevando va disminuyendo su velocidad en 9.8 m/seg *cada segundo*.

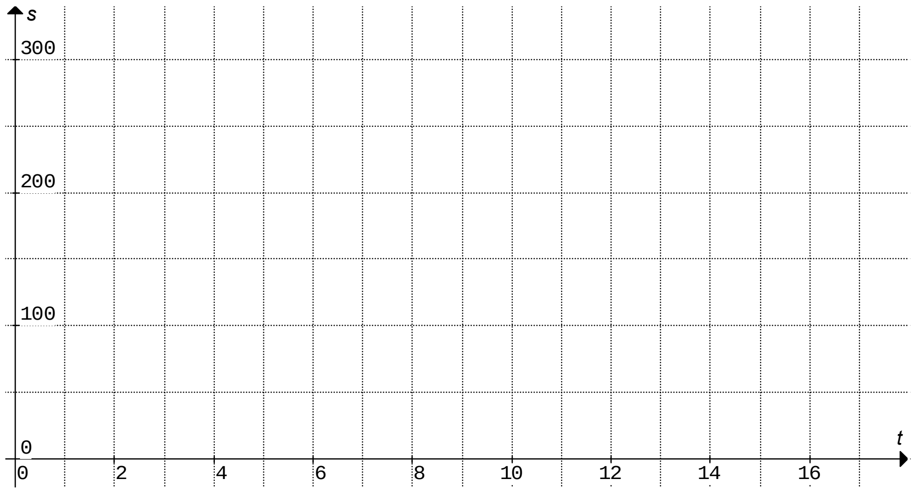
2. Completa la tabla siguiente:

t	$s(t) = 80t - 4.9t^2$	Variación (cambio) de la altura: $\Delta s_n = s(t_n) - s(t_{n-1})$	Variación (cambio) del cambio de la altura
$t_0 = 0$	$s(t_0) = 0$		
$t_1 = 1$	$s(t_1) = 75.1$	$\Delta s_1 = s(t_1) - s(t_0) = 75.1$	
$t_2 = 2$			$\Delta s_2 - \Delta s_1 =$
$t_3 = 3$			
$t_4 = 4$			
$t_5 = 5$			
$t_6 = 6$			
$t_7 = 7$			
$t_8 = 8$			
$t_9 = 9$			
$t_{10} = 10$			
$t_{11} = 11$			

Después de completar la tabla, se observa que la variación de la variable independiente (Δt) es constante, es decir, *el cambio* que resulta ser constante es el **segundo** cambio, en resumen, *el cambio del cambio* es constante.

Como ya hemos visto, la velocidad promedio de la pelota del tiempo t_1 al tiempo t_2, está dada por $$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

3. Traza la gráfica de la función $s(t)$.



4. ¿Cuál es la velocidad de la pelota durante sus primeros 3 segundos, esto es, en el intervalo de 0 a 3 segundos? ¿Y en el intervalo de 2 a 3 segundos?

   Velocidad en los primeros tres segundos =

   Velocidad de 2 a 3 segundos =

5. Interpreta geométricamente las velocidades promedio que determinaste en la pregunta 4, para ello, traza las rectas correspondientes que contribuyen a la interpretación. Ubica en la gráfica a Δs y a Δt para cada velocidad promedio encontrada. ¿Qué representa en cada caso $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

Si no te queda claro como hacer lo anterior revisa lo que hicimos en la Unidad 1, Actividad 4. La revisión que hagas también te servirá para entender mejor lo que sigue.

6. Ahora determina la velocidad instantánea, o razón de cambio instantáneo cuando *t* = 3. Con este fin trata de establecer un proceso infinito que nos permita dar el resultado. Para ello completa la tabla siguiente:

Intervalo de tiempo	$v = \frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$
De 2.9 a 3	
De 2.99 a 3	
De 2,999 a 3	
De 2.9999 a 3	
De 2.99999 a 3	
De 2.999999 a 3	
De 2.9999999 a 3	
De 2.99999999 a 3	
De 2.999999999 a	
De 2.9999999999 a 3	
De 2.99999999999 a 3	
De 2.999999999999 a 3	
De 2.9999999999999 a 3	

Si utilizas calculadora, uno de los problemas a los que te enfrentarás es que llega el momento, en que el dispositivo no puede trabajar de manera exacta con tantos decimales. Afortunadamente, observando el patrón que se va generando en la sucesión infinita correspondiente a la velocidad promedio, puedes decir cuál es la respuesta.

La tabla nos muestra que conforme *t* se acerca cada vez más y más a 3 en este proceso infinito, la velocidad promedio se va aproximando cada vez más y más a un valor límite ***L***, es decir, $\lim_{t \to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = L$

Es pertinente aclarar que este límite que acabas de determinar es un límite que se llama **límite por la izquierda**, pues el proceso infinito que se realizó fue con valores que están a la izquierda del 3. Si se hubiese hecho el proceso infinito con valores que están a la derecha del 3 y se fueran acercando tanto como quisiéramos a 3, entonces tendríamos un proceso infinito en el que nos acercamos por la derecha, por esta razón se le llama **límite por la derecha** de la función**.** Cuando los valores de ambos límites coinciden, se dice que el límite de la función **existe** para el valor considerado, en nuestro caso para *t = 3.* Lo anterior se puede sintetizar como sigue:

$$\text{Si } \lim_{t \to 3^-} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = L \text{ y } \lim_{t \to 3^+} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = L \text{, entonces } \lim_{t \to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = L$$

Es muy importante resaltar el resultado anterior (llamado teorema bilateral) pues hay casos, que veremos posteriormente, en donde no coinciden los límites por la izquierda y por la derecha, por esta razón el límite no existirá.

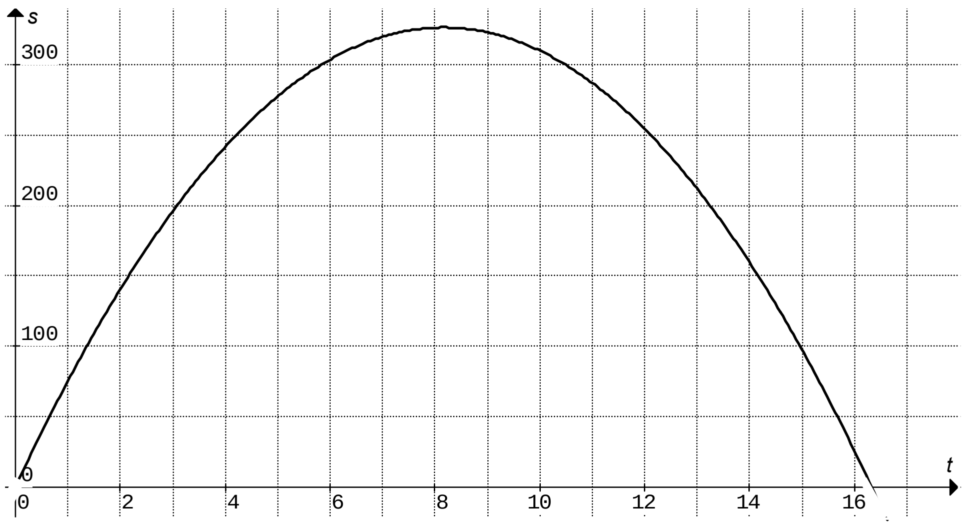
7. Pasemos ahora a verificar que el límite por la derecha es igual al límite por la izquierda, es decir que $\lim_{t \to 3^-} \frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t \to 3^+} \frac{s(t)-s(3)}{t-3}$, para lo cual te invitamos a completar la siguiente tabla.

Intervalo de tiempo	$v = \frac{s(t)-s(3)}{t-3}$
De 3.1 a 3	
De 3.01 a 3	
De 3.001 a 3	
De 3.0001 a 3	
De 3.00001 a 3	
De 3.000001 a 3	
De 3.0000001 a 3	
De 3.00000001 a 3	
De 3.000000001 a 3	
De 3.0000000001 a 3	
De 3.00000000001 a 3	
De 3.000000000001 a 3	

8. ¿Por qué podemos afirmar que existe $v(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t)-s(3)}{t-3}$?

Porque:

9. La siguiente es la gráfica de la función *s* con respecto a *t*, te pedimos que en ella realices la interpretación geométrica de la velocidad promedio de: 0 a 3 segundos, de 1 a 3 segundos, de 2 a 3 segundos, de 2.5 a 3 segundos, de 3 a 4 segundos, de 3 a 3.5 segundos y la velocidad instantánea cuanto $t = 3$.



En conclusión podemos afirmar que las pendientes de las rectas secantes se identifican con velocidades promedio, o razones de cambio promedio, y que en general la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(t,s(t))$ equivale a la velocidad o razón de cambio instantáneo de *s* con respecto a *t*.

Las pendientes de las rectas secantes a la curva que representan a una función son, equivalentes a la razón de cambio promedio y en nuestro problema se identifican con las velocidades promedio. En general, a partir de un proceso infinito podemos determinar la razón de **cambio instantánea** de una función $f(x)$, en $x = a$, representado por:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En caso de que este límite exista, se le llama **derivada** de f en $x = a$, la cual se denota por $f'(a)$, se le interpreta como la **razón de cambio instantánea** y geométricamente representa la pendiente de la recta tangente en el punto $(a,f(a))$ de la gráfica de $f(x)$.

Así pues, la derivada de la función *s* cuando $t = 3$ se simboliza como

$$v(3) = s'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$$

y representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *s* en el punto $(3,s(3))$.

Tal y como hicimos en la Actividad 4 de la Unidad 1, podemos simplificar el proceso infinito para determinar la velocidad instantánea cuando t = 3seg, mediante el procedimiento siguiente:

$$\begin{aligned} s'(3) = v(3) &= \lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \\ &= \lim_{t\to 3}\frac{(80t-4.9t^2)-(80(3)-4.9(3)^2)}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3}\frac{-4.9t^2+80t-195.9}{t-3} \\ &= \lim_{t\to 3}(-4.9t+65.3) \end{aligned}$$

Hecho lo anterior, podemos preguntarnos qué ocurre con el $\lim_{t\to 3}(-4.9t+65.3)$ cuando nos acercamos a 3, ya sea por la izquierda o por la derecha. La pregunta se puede contestar si entendemos lo que ocurre con -4.9*t* conforme *t* tiende a 3, por la izquierda o por la derecha, porque como 65.3 es una constante, esa cantidad no variará conforme *t* se acerque a 3.

Claro que el $\lim_{t\to 3}(-4.9t)$ = -14.7, por lo que $\lim_{t\to 3}(-4.9t+65.3)$ = -14.7 + 65.3 = 50.6, de donde: $s'(3) = v(3) = \lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = 50.6\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$

10. Utilizando las ideas anteriores determina la velocidad instantánea de la pelota cuando *t* = 5 seg, es decir encuentra *s*'(5) = *v*(5).

Siguiendo el procedimiento simplificado, podemos seguir encontrando la velocidad instantánea para diferentes valores de *t*, pero te pedimos que ahora lo hagas no para un valor particular de *t*, sino en general, para cualquier valor de *t*, es decir para *t* = *T*.

Para encontrar el resultado, además de efectuar correctamente la división indicada cuando se calcula la derivada de una función, deberás resolver adecuadamente y comprender lo que sigue.

Actividad 3

Responde a las preguntas siguientes:

a) ¿ $\lim_{t\to 3} t$ ¿ b) ¿ $\lim_{t\to 5} t$? c) ¿ $\lim_{t\to a} t$? d) ¿ $\lim_{t\to 3} 5t$?

e) ¿ $\lim_{t\to x} 4t$? f) ¿ $\lim_{t\to 3} t^2$? g) ¿ $\lim_{t\to 4} 5t^2$? h) ¿ $\lim_{t\to b} 7t^2$?

En cada uno de los incisos anteriores se está trabajando con una función, porque en general los límites (que estamos tratando) tienen la forma $\lim_{x\to a} f(x)$.

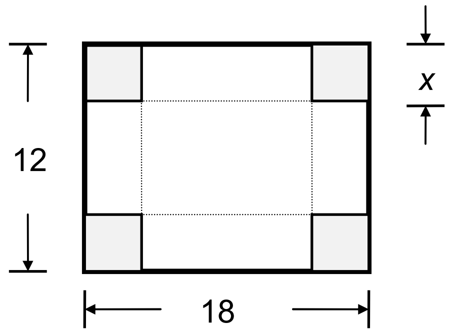
Te sugerimos que para que comprendas mejor los resultados que obtuviste tabules parte del proceso infinito en cada caso.

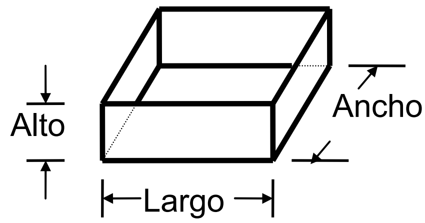
Determina la velocidad instantánea de la pelota cuando *t* = *T*. Para hacerlo te proponemos que hagas lo siguiente:

a) Substituyas *s(t)* y *s(T)* en la fórmula de la derivada $s'(T) = \lim_{t \to T} \frac{s(t) - s(T)}{t - T}$

b) Efectúes la división indicada.
c) Calcules el límite correspondiente.

Actividad 4.
Con un cartón rectangular de 12 cm por 18 cm, se desea construir una caja sin tapa cortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas del cartón y doblando para formar los costados de las cajas, como se muestra en la figura:





¿Lo recuerdas? Es la actividad 5 de la Unidad 1. Te sugerimos revisarla.

1. Escribe la fórmula del volumen de la caja en función de *x*, *V(x)*= _________.
2. ¿Cuál es el dominio de la función *V*? D_V = ___________________
3. Completa la tabla siguiente determinando los resultados numéricos.

x	$V(x)$	Variación (cambio) del volumen	Variación (cambio) del cambio del volumen	Variación (cambio) del cambio del cambio del volumen
0	$V(0) = 0$			
1	$V(1) =$	$\Delta V_1 = V(1) - V(0) =$		
2			$\Delta(\Delta V_1) = \Delta V_2 - \Delta V_1 =$	
3				$\Delta(\Delta V_2) - \Delta(\Delta V_1) =$
4				
5				
6				

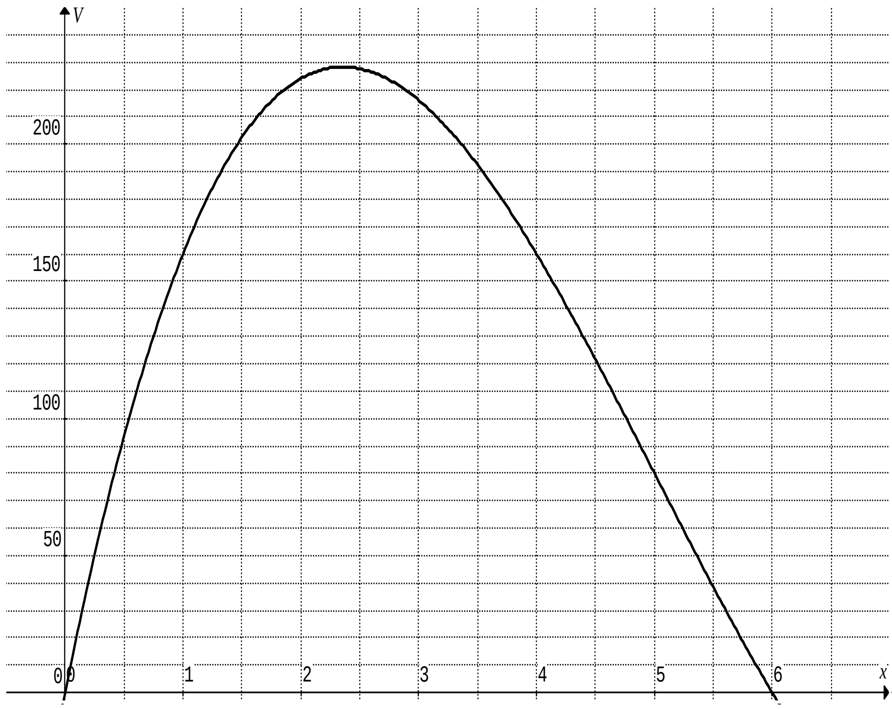
Con tus resultados anteriores habrás verificado que en el caso de la función polinomial de tercer grado (función cúbica) tomando intervalos del mismo tamaño ([0,1], [1,2], [2,3],…), el *cambio* que resulta ser constante es el **tercer** cambio.

Al respecto podemos resumir nuestra experiencia, la cual inicia con la función lineal de la Actividad 1, luego pasa con la función cuadrática en la Actividad 2 hasta llegar a lo anterior. En intervalos del mismo tamaño las funciones lineales tienen variación (cambio) constante; la funciones cuadráticas tienen una variación de la variación (cambio del cambio), constante; y en las funciones cúbicas el tercer cambio (el cambio del cambio del cambio), permanece constante. Claro que algo similar ocurre con las funciones de cuarto, quinto, *n*-ésimo grado, esto es, que las funciones de grado *n*-ésimo tienen un cambio constante en el *n*-ésimo cambio, en intervalos del mismo tamaño.

4. El volumen está variando conforme varia x. Cuál será la razón de cambio promedio del volumen de:
   a) $x = 0$ a $x = 1$.   b) $x = 2$ a $x = 4$ c) $x = 3$ a $x = 5$

   La variación o razón de cambio promedio la debiste calcular utilizando la fórmula $V = \dfrac{V_f - V_i}{x_f - x_i} = \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$

5. En la representación gráfica de la función V, dibuja las rectas que pasan por los puntos que se te indica, determina su pendiente e indica qué relación tienen con la razón de cambio promedio, señalando en cada caso a ΔV e Δx .
   a) $(0, V(0))$ y $(1, V(1))$ b) $(2, V(2))$ y $(4, V(4))$ c) $(3, V(3))$ y $(5, V(5))$



Seguramente has observado que las pendientes de las rectas secantes que pasan por las parejas de puntos indicados son iguales a las razones de cambio promedio respectivas.

6. Encuentra la razón de cambio instantánea del volumen para $x = 2$, es decir determina el resultado de $V'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{V(x) - V(2)}{x - 2}$.

   $$V'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{V(x) - V(2)}{x - 2} =$$

7. Encuentra la razón de cambio instantánea del volumen para $x = 3$.

   $$V'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{V(x) - V(3)}{x - 3} =$$

Podemos continuar preguntando o resolviendo casos particulares de la razón de cambio instantáneo, pero es más conveniente resolver el caso general.

8. Determina la razón de cambio instantáneo del volumen cuando $x = a$ cm. Te pedimos completes los pasos que te indicamos, tomando en cuenta que $V(x) = (18-2x)(12-2x)x$. o bien haz el producto $V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 216x$

   a) Substituye los valores de $V(x)$ y $V(a)$ en la fórmula $V'(a) = \lim_{x \to a} \frac{V(x)-V(a)}{x-a}$

   b) Efectúa la división indicada.

$$\frac{\mathrm{V(x)-V(a)}}{\mathrm{x-a}} =$$

   c) Calcula el límite del cociente resultante.

$$\lim_{\mathrm{x \to a}} \frac{\mathrm{V(x)-V(a)}}{\mathrm{x-a}} =$$

A continuación te mostramos como se determina $V'(4)$ con el fin de que te sirva de ejemplo para verificar lo que hiciste.

$$\begin{aligned}
V'(4) &= \lim_{x \to 4} \frac{V(x)-V(4)}{x-4} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(4x^3 - 60x^2 + 216x) - (4(4)^3 - 60(4)^2 + 216(4))}{x-4} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{4(x^3 - 4^3) - 60(x^2 - 4^2) + 216(x-4)}{x-4} \\
&= \lim_{x \to 4} (4(x^2 + 4x + 4^2) - 60(x+4) + 216) \\
&= \lim_{x \to 4} (4x^2 - 44x + 40) \\
&= 4(4)^2 - 44(4) + 40 \\
&= -72
\end{aligned}$$

Como bien te puedes dar cuenta, hicimos uso de los límites siguientes: $\lim_{x \to 4} 4x^2 = 4(4^2) = 64$, $\lim_{x \to 4} (-44x) = -44(4) = -176$ y $\lim_{x \to 4} 40 = 40$. Además, El agrupamiento que hicimos en la tercera línea, el cual te recomendamos realices siempre que sea posible, fue para utilizar los resultados que te invitamos a comprobar

9. Comprueba y completa lo siguiente:

   a) $\frac{x^2 - a^2}{x-a} = x + a$

   b) $\frac{x^3 - a^3}{x-a} = x^2 + ax + a^2$

   c) $\frac{x^4 - a^4}{x-a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

   d) $\frac{x^5 - a^5}{x-a} =$

e) $\dfrac{x^n - a^n}{x-a} =$

¿En todos los incisos anteriores x puede tomar cualquier valor?

10. Es muy importante no olvidar el significado geométrico de la derivada, por lo que te pedimos dibujes las rectas tangentes a la grafica de V en los puntos $(2, V(2))$, $(3, V(3))$ y $(4, V(4))$ y verifiques que sus pendientes son iguales a las razones de cambio instantáneo de V cuando x = 2, 3 y 4, respectivamente. La verificación la puedes realizar. de manera aproximada, dibujando la recta tangente y tomando dos puntos por donde pasa para calcular su pendiente.

Gracias al trabajo realizado, estamos en condiciones de encontrar el volumen máximo que puede alcanzar la caja.

11. Contesta cuidadosamente a cada una de las preguntas siguientes:
    a. ¿Qué significado geométrico tiene $V'(1)$?

    b. ¿Cómo se encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de V en el punto $(3.5, V(3.5))$?

    c. ¿Ubica en la gráfica para qué valor de x la derivada de la función $V'(x)$ es igual a cero?

    d. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta tangente para el volumen máximo de la caja?

En la respuesta de la pregunta 8 obtuviste que $V'(x) = 12x^2 - 120x + 216$. Ahora, después de responder a las preguntas anteriores te quedará claro que el volumen máximo de la caja se obtiene para el valor de x en donde la pendiente de la recta tangente es cero. Lo anterior lo podemos decir de otra forma, que el volumen máximo se obtiene para el valor de x en donde la derivada de V es cero.

12. Determina el valor de x para el cual la caja tiene el volumen máximo. Para hacerlo te sugerimos resuelvas la ecuación de segundo grado que resulta de igualar a cero la derivada.

Si no pudiste resolver lo anterior, te pedimos analices como lo hacemos nosotros:

Partimos de la ecuación de segundo grado $V'(x) = 12x^2 - 120x + 216$ = 0, para encontrar sus raíces, primero reduzcamos al máximo sus coeficientes, hasta obtener la ecuación $x^2 - 10x + 18 = 0$, ahora se deben de identificar los valores de *a, b* y *c*, después sustituirlos en la fórmula general para encontrar el o los valor(es) correspondiente de x.

Así pues, $x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)18}}{2(1)}$, que después de simplificar queda como $x = 5 \pm \sqrt{7}$. Finalmente, considerando el dominio de la función llegamos a la conclusión de que el resultado exacto es: $x = 5 - \sqrt{7}$.

El valor de x para el cual la caja tiene su volumen máximo es $x = (5 - \sqrt{7})$ cm y dicho volumen es $V(5 - \sqrt{7}) = (80 + 56\sqrt{7})$ cm^3. Si deseamos encontrar el resultado con decimales es imposible, pues hemos obtenido números irracionales, es decir que no tienen periodo. Sin embargo, es posible escribir una solución aproximada si se desea, por ejemplo que el lado de los cuadrados que se van a cortar midan x ≈ 2.3542486889354094094983842463607 cm y el volumen de la caja $V(5 - \sqrt{7})$ ≈ 228.16207341961707306809048220388 cm^3. Conforme la aplicación que se desee darle se selecciona la aproximación que más conviene, pero las matemáticas, en este caso, proporcionan el resultado exacto.

Ejercicio 1.
Encuentra la derivada de la función en el punto que se indica, utilizando la definición de derivada $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$,

1. $f'(-1)$ si $f(x) = -2x^2 + 5$.

2. $f'(4)$ si $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x - 1$

Ejercicios.

1. En la tabla se muestra la estatura (en centímetros) de Emilio, medida cada año durante sus primeros 14 años.

Edad	Estatura
0	51
1	75
2	79
3	94
4	99
5	110
6	114
7	122
8	127
9	132
10	138
11	143
12	148
13	154
14	167

a) ¿Si *E* nos representa la edad de Emilio y *H* su altura, la función *E*(*H*) es lineal?
b) ¿La función es lineal, cuadrática, cúbica o de otro tipo? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuál es el cambio o variación de estatura entre los 4 y los 14 años?

d) ¿Creció Emilio más rápidamente durante los primeros cuatro años de vida o en los siguientes 10 años?

Recuerda que para contestar este tipo de pregunta es necesario utilizar la razón o rapidez de cambio promedio. Las unidades de medida de la razón son, en este caso, centímetros por año.

2. Los altos niveles de PCB (bifenil policlorado, un contaminante industrial) en el ambiente, afectan a los pelícanos. En la siguiente tabla se muestra que a medida que aumenta la concentración de PCB en los huevos de los pelícanos decrece su grosor, por lo que es muy probable que se rompan. En la tabla c representa los niveles de PCB en partículas por millón (pmm) y *g* el grosor de los huevos de pelícano, medido en milímetros (mm)

c (pmm)	87	147	204	289	356	452
g(c) (mm)	0.44	0.39	0.28	0.23	0.22	0.14

a) Encuentra la rapidez de cambio promedio del grosor *g* de los cascarones a medida que cambia *c* de 87 a 452.
b) ¿Cuándo es mayor la rapidez de cambio promedio en el grosor: de 87 a 147, de 356 a 452 o de 87 a 452?
c) ¿Qué unidades de medida tiene la rapidez de cambio promedio?
d) ¿Qué significado tiene el que los resultados sean negativos?

3. En la siguiente tabla se muestra la producción mundial de bicicletas de algunos años seleccionados entre 1950 y 1990. La producción de bicicletas está dada en millones.

A (año)	1950	1960	1970	1980	1990	1993
b (millones)	11	20	36	62	90	108

a) Encuentra el cambio de producción de bicicletas *b* entre 1950 y 1990. Da unidades.
b) Encuentra la rapidez de cambio promedio entre 1950 y 1990, da las unidades de medida e interpreta tu respuesta en términos de *b.*
c) Encuentra la rapidez de cambio promedio entre 1950 y 1960 y entre 1990 y 1993, da las unidades de medida, compara los resultados e interprétalos.

4. ¿Cuál de las siguientes tablas de valores representan funciones lineales, cuáles cuadráticas y cuáles cúbicas?

a)

x	0	1	2	3
f(x)	25	30	35	40

b)

x	0	2	4	6	8
f(x)	1	5	17	37	65

c)

x	-3	0	3	6
f(x)	10	16	22	28

d)

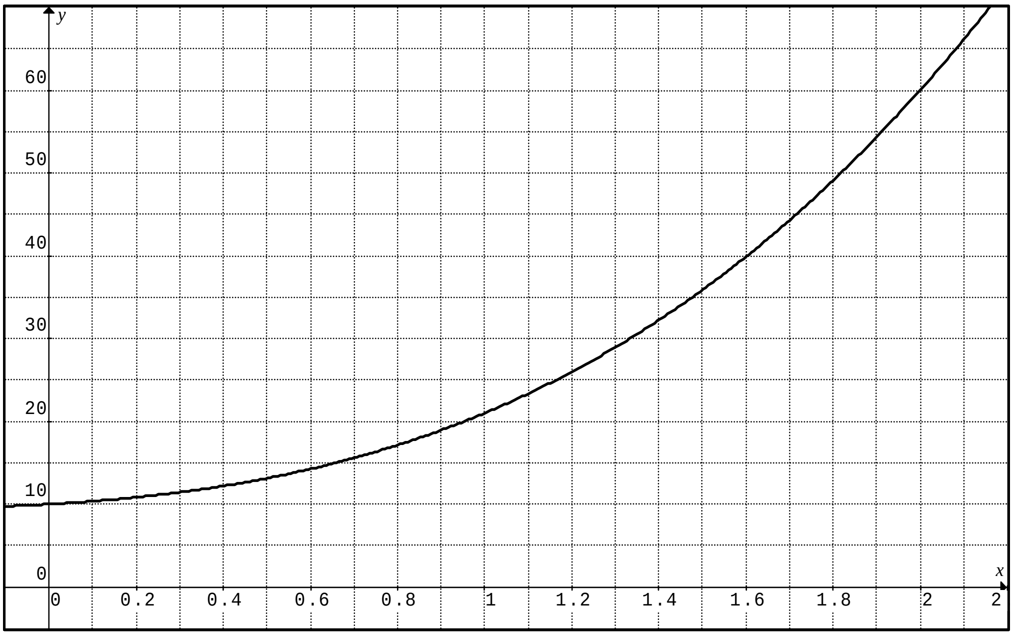
x	–2	–1	0	1	2
f(x)	–4	1	0	–1	4

5. El costo (en pesos) de producir *x* unidades de cierto artículo es:

$$C(x) = 0.5x^2 + 10x + 500$$

a) Encuentra la razón de cambio promedio de *C* con respecto a *x* cuando el costo de producción cambia de $x = 100$ a $x = 105$ y sus unidades de medida.
b) Encuentra la razón de cambio instantánea de *C* con respecto a *x*, cuando $x = 100$.

6. Una partícula se está moviendo conforme la ecuación $s(t) = 3t^3 + 5t^2 + 3t+10$ (con *s* en metros y *t* en segundos), como se muestra en la gráfica de la función *s(t)*.



Determina:

a) Su velocidad promedio durante los primeros dos segundos.

b) Su velocidad instantánea exactamente a los dos segundos, esto es,

$$v(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

c) En la gráfica traza la recta que pasa por los puntos (0,*s*(0)) y (1,*s*(1)), y determinar su pendiente; traza la recta tangente en el punto (2,*s*(2)).

7. Determina:
   a) La función que se está derivando y en qué punto.
   b) Mediante una tabla encuentra el número al que se va aproximando su derivada en el proceso de límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$$

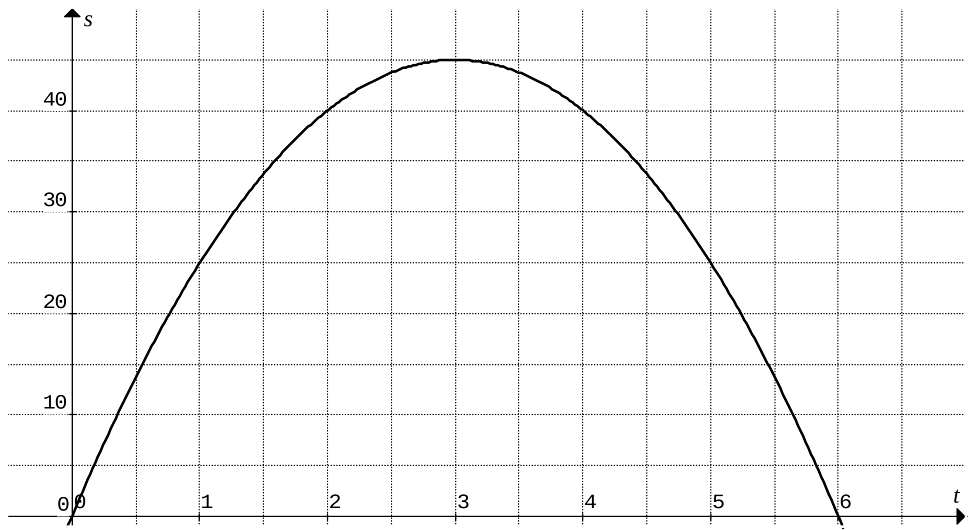
x	$\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$
-0.9	
-0.99	
-0.999	
-0.9999	
-0.99999	
-0.999999	
↓	↓
-1	
↑	↑
-1.000001	
-1.00001	
-1.0001	
-1.001	
-1.01	
-1.1	

8. Se lanza una pelota hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 30 m/seg, su altura *s* en metros transcurridos *t* segundos, esta dada por $s(t) = 30t - 5t^2$. Determina:
   a) Su velocidad promedio para el periodo de *t* =2 seg a *t* = 5 seg.

b) Completa la tabla y con base en ella determina su velocidad instantánea cuando t = 5 seg.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio= $\frac{s(t)-s(5)}{t-5}$
De 2 a 5 seg.	
De 3 a 5 seg.	
De 4 a 5 seg.	
De 4.9 a 5 seg.	
De 4.99 a 5 seg.	
De 4.999 a 5 seg.	
De 4.9999 a 5 seg.	
De 4.99999 a 5 seg.	
De 4.999999 a 5 seg.	
De 4.9999999 a 5 seg.	
De 4.99999999 a 5 seg.	
De 4.999999999 a 5 seg.	
De 4.9999999999 a 5 seg.	-20

c) Con base en la gráfica de la función $s(t) = 30t - 5t^2$: (i) traza la recta que pasa por los puntos (2,s(2)), (5,s(5)) y determina su pendiente gráficamente y mediante fórmula; (ii) traza la recta tangente que pasa por el punto (5,s(5)) y determina su pendiente gráficamente y mediante fórmula; (iii) Qué relación guarda esto con los incisos a y b?



9. Desde lo alto de un edificio de 125 metros de altura, se deja caer una pelota y ésta se desplaza hacia el suelo durante un tiempo t, medido en segundos. La distancia que recorre la pelota está dada por la función: $s(t) = 5t^2$.
   a) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo?
   b) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota durante el tiempo que cae?
   c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota exactamente a los dos segundos?
   d) ¿Con qué velocidad viaja la pelota cuando choca contra el suelo?
10. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 m/s. Su altura después de t segundos se expresa con la función: $s(t) = 40t - 5t^2$. Encuentra la velocidad cuando $t = 3$.

11. La función $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$ denota el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta. En dicha expresión t se mide en segundos, encuentra la velocidad de la partícula en los instantes: $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$. Usa la función derivada $s'(t)$ describiendo brevemente, en cada caso, el proceso de límite involucrado.
12. El combustible de un cohete se quema totalmente transcurridos 30 segundos de vuelo. En los primeros t segundos el cohete alcanza una altura $h(t) = 10t^3$ metros.
    a) ¿Cuál es la velocidad promedio del cohete durante sus primeros 30 segundos?
    b) ¿A qué velocidad viaja el cohete cuando $t = 10$ seg?
    c) ¿A qué velocidad está viajando el cohete en el momento en que se le agota el combustible?
13. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 2x$ en el punto P(1, –1). Bosqueja la gráfica.
14. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y= x^3 - x + 1$ en el punto P(2, 7).
15. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva: $f(x) = 5 - x - 2x^2$ en el punto P(–1, 4)
16. Determina cuáles son las funciones que se están derivando en un punto, para qué punto y, mediante una tabla, el número al que se van aproximando los siguientes límites, o lo que es lo mismo, las derivadas:

    a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x-12}{x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x^2-3)-5}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x^2+x-1)}{x+1}$
17. Utilizando la definición de derivada $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, determinar:

    a) $f'(2)$ si $f(x) = 3x - 2$ b) $f'(-1)$ si $f(x)=2x^2-4$

    c) $f'(3)$ si $f(x)=5x^2-4x$ d) $f'(0)$ si $f(x)=-2x^2+7x+1$

    e) $f'(4)$ si $f(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ f) $f'(-5)$ si $f(x)=-4x^3+3x^2-7x+9$
18. Un globo de 5cm de radio se está inflando por lo que su radio va aumentado. Determina la razón de cambio promedio del volumen del globo (suponiendo que es una esfera) con respecto a su radio
    a) Cuando aumenta de 5 a 7 cm.
    b) Cuando aumenta de 6 a 7 cm.
    c) Su razón de cambio instantáneo a los 6 cm.