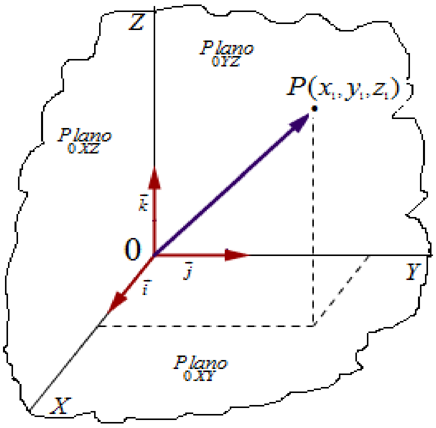
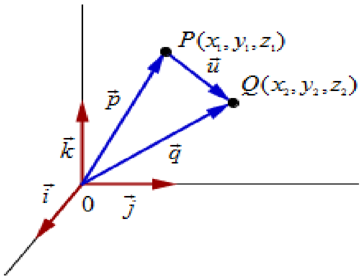
Ecuaciones de rectas y planos.

Coordenadas en el espacio. Planos coordenados.



Un punto O y una base B $\Rightarrow B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *de los vectores del espacio constituyen un sistema de referencia en el espacio. Se escribe:* $S:\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *(Para mayor comodidad, la base de los vectores libres del sistema de referencia se elegirá siempre ortonormal).*
Fijado un punto O, cualquier otro punto P es el extremo de un vector cuyo origen es O. Todos los puntos quedan determinados por un vector (que se llama vector de posición) $\left[\overrightarrow{OP}\right]$*. El punto O recibe el nombre de origen.*

El vector $\left[\overrightarrow{OP}\right]$ *tiene unas coordenadas* (x_1,y_1,z_1) *respecto de la base B, que se pueden tomar como coordenadas del punto P respecto del origen O y la base B.*
Correspondencia entre las coordenadas del vector de posición $\vec{p}\equiv\left[\overrightarrow{OP}\right]$ *y las coordenadas del punto* $P(x_1,y_1,z_1)$: $\left[\overrightarrow{OP}\right]=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}\Rightarrow\vec{p}\equiv\left[\overrightarrow{OP}\right]=(x_1,y_1,z_1)$.
Los tres vectores de la base B determinan con el origen los tres ejes coordenados: OX, OY, OZ.
Los planos OXY, OYZ y OZX, se denominan planos coordenados del sistema de referencia.



Las coordenadas de un vector libre $\vec{u}=\left[\overrightarrow{QP}\right]$ *respecto de la base* $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$*, se obtienen restando las coordenadas del punto Q de las correspondientes de P en el sistema de referencia:* $S:\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

$$P(x_1,y_1,z_1)\,y\;Q(x_2,y_2,z_2)\Rightarrow\vec{u}=\left[\overrightarrow{QP}\right]=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

Formas Geométricas y Ecuaciones.

Las coordenadas de los puntos se pueden utilizar para la determinación de diferentes figuras del espacio. Para ello hay que valerse de las llamadas ecuaciones de la figura. Una o varias ecuaciones que relacionen las tres coordenadas (x,y,z)*, se pueden interpretar como el conjunto de los puntos del espacio que las verifican. Dicho conjunto recibe también el nombre de lugar geométrico.*
Si se dan las ecuaciones de dos figuras, su intersección puede determinar una tercera figura, cuyos puntos verificaran simultáneamente las ecuaciones de cada una de las dos primeras.
A veces, las ecuaciones de un cierto lugar geométrico dan las coordenadas de un punto cualquiera $X(x,y,z)$ *del mismo en función de una variable* ***t****, que puede tomar cualquier valor. Esta variable recibe el nombre de parámetro, y las ecuaciones dadas en función de él, ecuaciones paramétricas.*
Cada valor de ***t*** *da las coordenadas de un punto X de la figura correspondiente, y cada punto corresponde a algún valor del parámetro.*

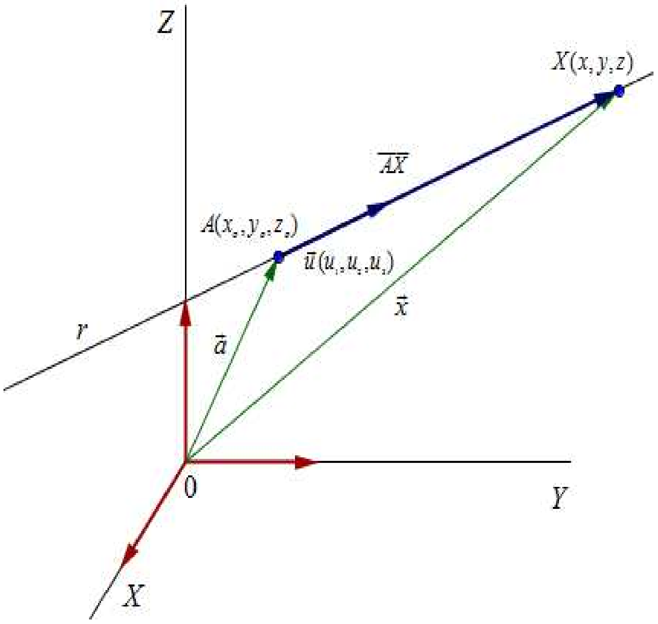
Determinación lineal de una recta.

*Una recta **r** en el espacio viene determinada por un punto* $A(x_o, y_o, z_o)$ *y una dirección* $\vec{u}$ *(vector libre no nulo) que se llama vector director de la recta:* $\boxed{r(A,\vec{u})}$ *(Determinación lineal de la recta r).*

ECUACIONES DE LA RECTA:

Ecuación vectorial.

*Para la determinación de las ecuaciones de la recta basta considerar que un punto variable X pertenece a la recta **r**, sí y solamente sí el vector* $\overrightarrow{AX}$ *está contenido en dicha recta, es decir si* $\overrightarrow{AX}$ *y* $\vec{u}$ *son linealmente dependientes o proporcionales* $\Rightarrow \overrightarrow{AX} = t\vec{u}\,(*)$, $t \in R$ *de manera que, al variar el parámetro **t** en R, el punto X va recorriendo toda la recta **r**.*



Si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ *es el vector de posición de A y* $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ *el vector de posición del punto variable X, la ecuación anterior* $(*)$ *queda:*
$\vec{x} - \vec{a} = t\vec{u}$, *despejando* $\vec{x}$ *tenemos:*
$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}}$ *que es la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto A y tal que* $\vec{u}$ *es un vector director de la misma,*
Al ser X $= (x, y, z)$, $A = (x_o, y_o, z_o)$ *y* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *se verifica:*

$$\boxed{(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(u_1, u_2, u_3)}$$

*Al variar el valor de **t** se obtienen los distintos vectores de posición de todos los puntos X de la recta, de manera que a cada valor de **t** le corresponde un punto de la recta y recíprocamente.*

Ecuaciones paramétricas.

Si despejamos las coordenadas por separado, se obtienen las llamadas:

Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = x_o + u_1 \cdot t \\ y = y_o + u_2 \cdot t \\ z = z_o + u_3 \cdot t \end{cases}}$

Ecuaciones en forma continua:

*A veces interesa que las ecuaciones no dependan de ningún parámetro, por lo que despejando **t** en las ecuaciones paramétricas e igualando:*

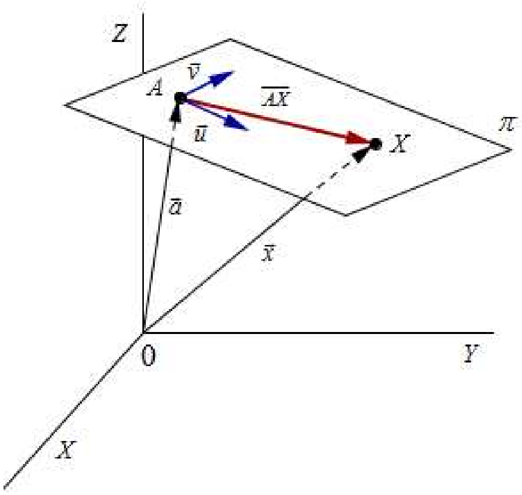
$$t = \frac{x - x_o}{u_1}; t = \frac{y - y_o}{u_2}; t = \frac{z - z_o}{u_3} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_o}{u_1} = \frac{y - y_o}{u_2} = \frac{z - z_o}{u_3}} \Rightarrow$$ *Ecuaciones continuas de la recta **r***

Cuando alguna de las coordenadas (u_1,u_2,u_3) *sea igual a cero es preferible utilizar las ecuaciones paramétricas.*
El uso del plural se debe a que la igualdad de las tres razones da lugar a dos ecuaciones independientes: $\frac{x-x_o}{u_1}=\frac{y-y_o}{u_2}$ *y* $\frac{y-y_o}{u_2}=\frac{z-z_o}{u_3}$.

Si nos dan dos puntos de una recta $A(x_o,y_o,z_o)$ *y* $B(x_1,y_1,z_1)$*, obtendríamos de forma análoga la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:* $\boxed{\frac{x-x_o}{x_1-x_o}=\frac{y-y_o}{y_1-y_o}=\frac{z-z_o}{z_1-z_o}}$

Que es un caso particular de las ecuaciones de la recta en forma continua. Cuya determinación lineal es: $\boxed{r\left(A,\overrightarrow{AB}\right)}$.

DETERMINACIÓN DE UN PLANO. ECUACIONES.



Una superficie plana, o plano, está determinado por un punto A del espacio y dos vectores no nulos y no paralelos (no proporcionales). Determinación lineal del plano: $\pi(A,\vec{u},\vec{v})$
Cualquier punto X del plano determina con A un vector libre $\overrightarrow{AX}$ *completamente contenido en dicha superficie, es decir, que es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *:* $\boxed{\overrightarrow{AX}=s\vec{u}+t\vec{v}}$ *;*
s,t∈ R (parámetros)⇒ como $\overrightarrow{AX}$ *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ $\Rightarrow \boxed{det\left(\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}\right)=0}$

Ecuación vectorial del plano.

En el sistema de referencia $S:\left\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$*, si* $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ *y* $\vec{x}=\overrightarrow{OX}$*, son los vectores de posición de los puntos A y X respectivamente, se cumple:* $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$ *, es decir* $\Rightarrow \boxed{\vec{x}=\vec{a}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}}\Rightarrow$ *Ecuación vectorial* del plano π.
Que en función de las coordenadas es : $\boxed{(x,y,z)=(x_o,y_o,z_o)+s(u_1,u_2,u_3)+t(v_1,v_2,v_3)}$

Al variar ***s*** *y* ***t*** *se obtienen los distintos vectores de posición de todos los puntos X del plano, de manera que a cada par de valores de* ***s*** *y* ***t*** *corresponde un punto del plano y recíprocamente.*

Ecuaciones paramétricas del plano.

De la ecuación vectorial se deduce: $\boxed{\begin{cases} x=x_o+su_1+tv_1 \\ y=y_o+su_2+tv_2 \\ z=z_o+su_3+tv_3 \end{cases}}\Rightarrow$ *Ecuaciones paramétricas* del plano π.

Ecuación general del plano.

De $\boxed{\det\left(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ *desarrollando este determinante se obtiene una expresión de la forma:* $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ $\Rightarrow$ *que es la ecuación general del plano, ó de otra forma:*

El punto $X(x,y,z)$ *pertenece al plano:*

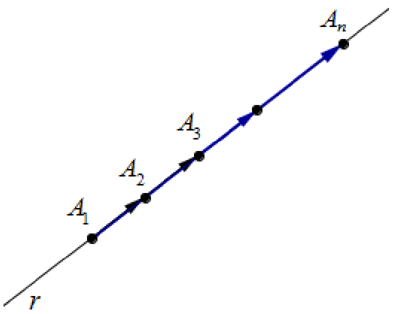
$\begin{cases} x = x_o + su_1 + tv_1 \\ y = y_o + su_2 + tv_2 \\ z = z_o + su_3 + tv_3 \end{cases}$, *sí y solamente sí el sistema de ecuaciones:* $\begin{cases} u_1 s + v_1 t = x - x_o \\ u_2 s + v_2 t = y - y_o \\ u_3 s + v_3 t = z - z_o \end{cases}$ *es Compatible*

Indeterminado es decir: $rango\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x-x_o \\ u_2 & v_2 & y-y_o \\ u_3 & v_3 & z-z_o \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ *lo cuál se cumple cuando*

$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-x_o \\ u_2 & v_2 & y-y_o \\ u_3 & v_3 & z-z_o \end{vmatrix} = 0,$ *que desarrollando queda* $\Rightarrow \boxed{ax+by+cz+d=0}$.

Puntos alineados.

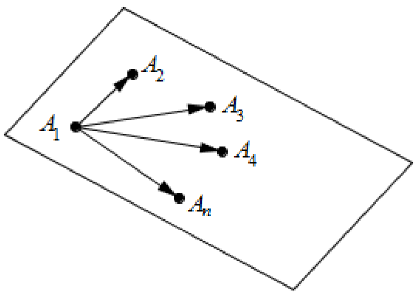
Tres o más puntos están alineados cuando pertenecen a la misma recta.



Sean $A_1, A_2, A_3, ...A_n$, *n puntos; la condición necesaria y suficiente para que estén alineados es que los vectores.* $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}.........\overrightarrow{A_1A_n}$, *sean proporcionales, es decir:* $A_1, A_2, A_3, ...A_n$, *están alineados* $\Leftrightarrow \boxed{rango\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_3}\right) = 1}$

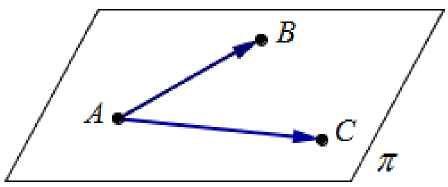
Puntos coplanarios.

Cuatro o más puntos del espacio son coplanarios cuando pertenecen al mismo plano.



Sean $A_1, A_2, A_3, ...A_n$, *n puntos no alineados; la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarios, es que entre los vectores:* $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}.........\overrightarrow{A_1A_n}$, *solo haya dos linealmente independientes, es decir:*
$A_1, A_2, A_3, ...A_n$
son coplanarios $\Leftrightarrow \boxed{rango\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_3}\right) = 2}$

Plano que pasa por tres puntos.



Dados tres puntos no alineados, existe un único plano que los contiene. Si las coordenadas de A, B, y C son: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ *y* (x_3, y_3, z_3) *respectivamente* $\Rightarrow$ *los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$ *están contenidos en el plano, tenemos pues un plano determinado por un punto cualquiera por ejemplo el A y dos vectores directores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AC}$, $\pi(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, *las ecuaciones paramétricas del plano son:*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_2)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_2)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)s + (z_3 - x_2)t \end{cases}$$

con lo que la ecuación general es el resultado de desarrollar el determinante:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow det\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

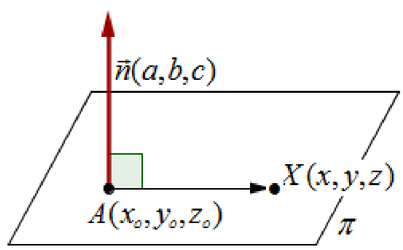
Otra forma de escribir la ecuación del plano que pasa por tres puntos, fácil de recordar y que se obtiene a partir de la anterior aplicando algunas propiedades de los determinantes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

a partir de esta fórmula, cuatro puntos: A,B,C,D están en el mismo plano, es decir son coplanarios, si se cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

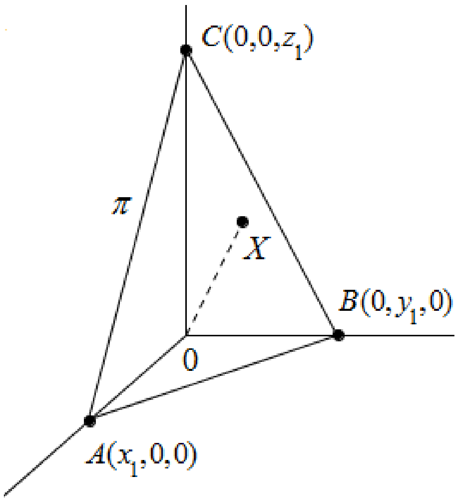
Ecuación normal del plano.



Sea $A(x_o, y_o, z_o)$ *un punto del plano, cualquier punto X del plano determina con A un vector* $\overrightarrow{AX}$ *y sí representamos por* $\vec{n}$, *un vector normal al plano. Se cumple:* $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0} \Rightarrow$ *Ecuación normal del plano* π. *Si sustituimos las coordenadas de A,* $\vec{x}$, *y* $\vec{n}$ *en la expresión anterior obtenemos:* $(a, b, c) \cdot [(x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o)$, *ó bien:* $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$; *(donde a, b, c son componentes del vector normal* $\vec{n}$*).*

Ecuación segmentaria del plano.

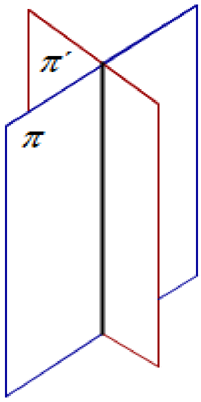


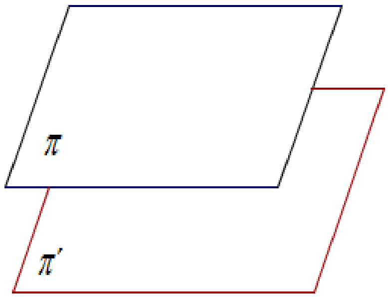
Un plano no paralelo a ninguno de los tres ejes y que no pasa por el origen, corta a los ejes en tres puntos. Sean: $A(x_1,0,0)$, $B(0,y_1,0)$ *y* $C(0,0,z_1)$ *estos tres puntos.*
Aplicando a estos puntos la expresión $\det\left(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Rightarrow$ *Ecuación del plano que pasa por tres puntos, y despejando se obtiene:* $\boxed{\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{y}{y_1}+\dfrac{z}{z_1}=1}$ *Ecuación segmentaria del plano* π.

$x_1 \rightarrow$ *abscisa en el origen;* $y_1 \rightarrow$ *ordenada en el origen;* $z_1 \rightarrow$ *cota en el origen.*

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS.

Entre dos planos π *y* π' *se pueden dar tres posiciones relativas, que se caracterizan por los puntos comunes a ambos:*





Planos secantes. Tienen una recta común.

Planos paralelos. No tienen puntos comunes.

Planos coincidentes. Son el mismo plano. Todos los puntos comunes

Si sus ecuaciones son: $\pi: ax+by+cz+d=0$; $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$, *las posiciones relativas Se obtienen a partir del estudio del sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right\} \text{Cuyas matrices asociadas son: } A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Las tres posiciones vienen dadas según los rangos de A *y* A'.

Planos Secantes	***Planos paralelos***	***Planos coincidentes***
S. Compatible Indeterminado *(Con un grado de libertad)*	***Sistema Incompatible***	***S. Compatible Indeterminado*** *(Con dos grados de libertad)*
rango(A)=rango (A´)=2	*rango(A)=1 $\neq$ rango(A´)=2*	*rango(A)=rango (A´)=1*
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS.

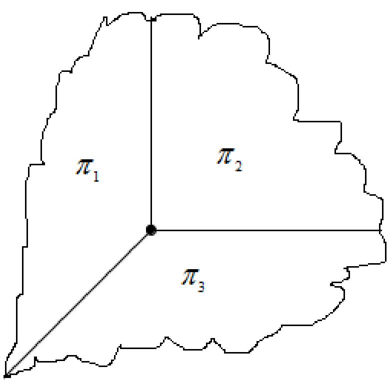
El estudio de las posiciones relativas de tres planos requiere el análisis de los puntos que tienen en común, esto es de la naturaleza del sistema que forman las tres ecuaciones.
Si los tres planos tienen de ecuaciones:
$\pi_1 : ax + by + cz + d = 0; \quad \pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0; \quad \pi_3 : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$

El sistema formado por estas ecuaciones lleva asociadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

En el que se pueden dar los siguientes casos:

1. Los tres planos tienen un único punto común



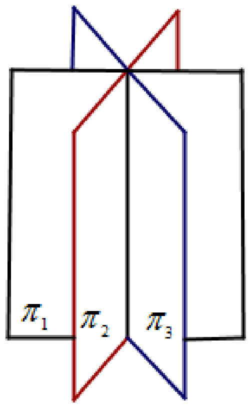
Rango(A)=rango (A´)=3.

Sistema Compatible Determinado.

(*Una sola solución que es el punto común*)

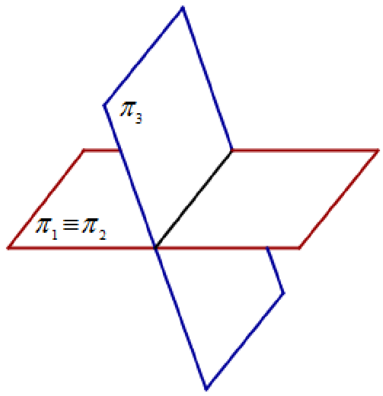
2. Los tres planos tienen una recta común. *Rango (A)=rango (A´)=2.* ***Sistema Compatible Indeter_ minado*** *con un grado de libertad. Hay dos situaciones posibles:*

a) Tres planos distintos.



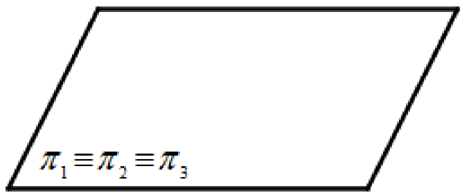
Los coeficientes de los tres planos no son proporcionales.

b) Dos planos coincidentes y el tercero secante a ellos



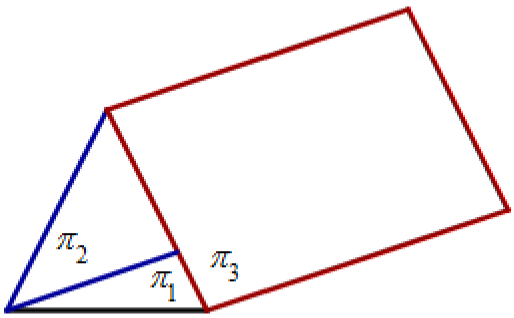
Los coeficientes de π_1 y π_2 son proporcionales.

3. Los tres planos son coincidentes. *Rango(A)=rango(A´)=1.* ***Sistema Compatible Indeterminado*** *con dos grados de libertad.*



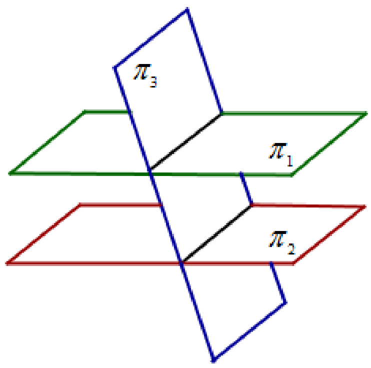
4. Los tres planos no tienen puntos comunes. *Rango de (A)=2$\neq$ rango de (A´)=3.*
Sistema Incompatible*. Hay dos posibles situaciones:*

a) Los planos se cortan dos a dos.



Forman una superficie prismática.
No tienen los coeficientes proporcionales

b) Dos planos paralelos y el tercero secante a ellos.



Dos planos tienen los coeficientes de las variables proporcionales (π_1 y π_2):

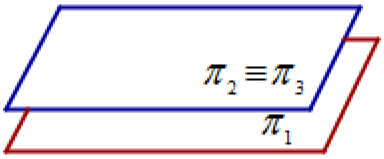
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}.$$

5. Los tres planos son paralelos o dos coincidentes y uno paralelo. *Rango (A)=1$\neq$rango de (A´)=2.* ***Sistema Incompatible.*** *Hay dos posibles situaciones:*

a) Tres planos paralelos.

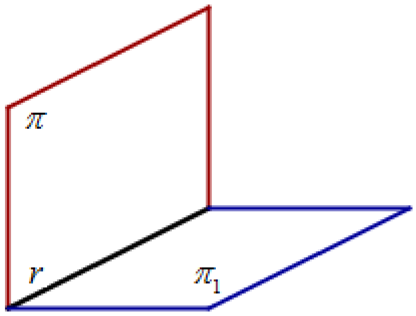
Los coeficientes de las variables proporcionales.

b) Dos planos coincidentes y el tercero paralelo a ellos.



Todos los coeficientes de π_2 y π_3 proporcionales y los de π_1 proporcionales a ellos solo los de las variables.

Ecuación de la recta como intersección de dos planos.



Sean : $\pi : ax+by+cz+d=0;\quad \pi_1 : a´x+b´y+c´z+d´=0$.
La intersección de dos planos es una resta.
Los puntos de la recta intersección son aquellos que verifican simultáneamente las ecuaciones de ambos planos.
Esto permite utilizar las ecuaciones de los planos secantes para definir la recta:

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a´x+b´y+c´z+d´=0 \end{cases}$$

Como para que dos planos describan una recta deben de ser secantes es imprescindible que el $rango\begin{pmatrix} a & b & c \\ a´ & b´ & c´ \end{pmatrix}=2$. *Para obtener las ecuaciones paramétricas de la recta es suficiente obtener la solución general del sistema indeterminado que forman las ecuaciones generales de los dos planos.*

Ejemplo: Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $r:\begin{cases} 3x+2y-2z+1=0 \\ 2x+y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$rango\ (A)=rango\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ con\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0 \Rightarrow rango(A)=2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow rango(A)=rango(A´)=2<n^{o}\ de\ incógnitas \Rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado***.

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y=2z-1 \\ 2x+y=-z+2 \\ z=t\ \ y\ \ t\in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=2t-1 \\ 2x+y=-t+2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 2t-1 & 2 \\ -t+2 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2t-1+2t-4}{-1}=5-4t$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2t-1 \\ 2 & -t+2 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-3t+6-4t+2}{-1}=7t-8 \Rightarrow Solución(Ec.\ paramétrica\ de\ la\ recta):(5-4t,-8+7t,t)$$

$r:\begin{cases} x = 5-4t \\ y=-8+7t \\ z = t \end{cases}$ *La información que se puede sacar es que un punto de esta recta es* $P(5,-5,0)$, *y un vector director es* $\vec{u}(-4,7,1)$.

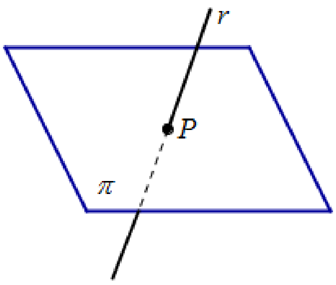
Si nos piden la ecuación de la recta como intersección de dos planos, cuando nos la dan en forma continua, basta determinar las ecuaciones resultantes de igualar dos pares de fracciones de las tres que constituyen la recta en forma continua.

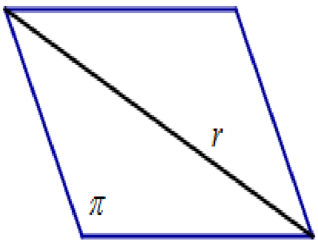
Ejemplo. Para expresar la recta: $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ *como intersección de dos planos se igualan dos pares de igualdades y se opera:* $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}$; $\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ *con lo que se obtienen las ecuaciones:* $\begin{cases} 3x-6=2y+2 \\ 4y+4=3z-9 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} 3x-2y \quad -8=0 \\ \quad 4y-3z+13=0 \end{cases}$ (*Recta dada como intersección de dos planos*)

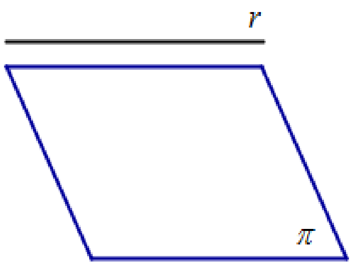
POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO.

Entre un plano y un a recta, se pueden dar tres posiciones relativas:

a) Recta y plano secantes. *b) Recta contenida en el plano.* *c) Recta y plano paralelos*







Si la ecuación del plano es: $\pi: ax+by+cz+d=0$, *y la recta viene dada como intersección de dos planos* $r:\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases} \Rightarrow$ *la posición relativa viene dada por el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores. En este sistema las matrices asociadas son:*

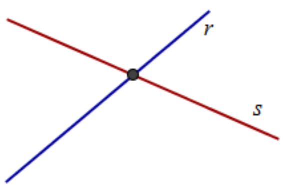
$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ *y* $A'=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$, *que dado que como las dos últimas ecuaciones forman una recta el rango* $A \geq 2$. *Por lo que se tiene:*

Recta y plano secantes	***Recta contenida en el plano***	***Recta y plano paralelos***
La recta y el plano tienen un único punto común.	*La recta y el plano tienen una cantidad infinita de puntos comunes.*	*La recta y el plano no tienen ningún punto común.*
Sistema Compatible Determinado	***Sistema Compatible Indeterminado***	***Sistema Incompatible***
Rango(A)=3=rango(A´)	*Rango(A)=rango(A´)=2*	*Rango(A)=2$\neq$ rango(A´)=3*

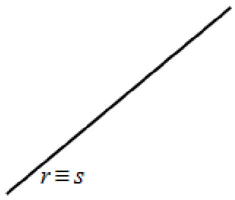
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

*Dos rectas **r** y **s** en el espacio pueden adoptar las siguientes posiciones relativas.*

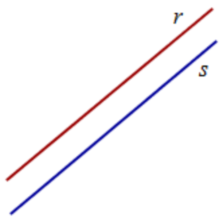
a) Rectas secantes



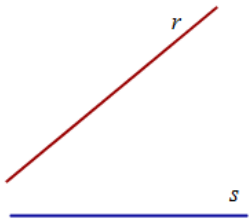
b) Rectas coincidentes



c) Rectas paralelas



d) Rectas que se cruzan (en distintos planos)



*Si **r** y **s** están dadas como intersección de dos planos.*

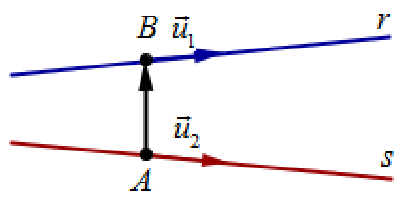
$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

Su posición relativa viene dada por el estudio del sistema formado por las cuatro ecuaciones, cuyas matrices asociadas son:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A'=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

Las posiciones anteriores corresponden a las posibles soluciones del sistema. El rango (A)≥ 2, ya que tanto las dos primeras ecuaciones como las dos últimas determinan una recta en cada caso.

<table>
<tr><th>Rectas Secantes</th><th>Rectas coincidentes</th><th>Rectas paralelas</th><th>Rectas que se cruzan</th></tr>
<tr><td>Las rectas tienen un punto común</td><td>Las rectas tienen todos los puntos comunes</td><td colspan="2">Las rectas no tienen ningún punto común</td></tr>
<tr><td>S. Comp. Determinado</td><td>S. Comp. Indeterminado</td><td colspan="2">Sistema Incompatible</td></tr>
<tr><td>$rang(A)=3=rang(A')$</td><td>$rang(A)=2= rang(A')$</td><td>$rang(A)=2\neq rang(A')=3$</td><td>$rang(A)=3\neq rang(A')=4$</td></tr>
</table>

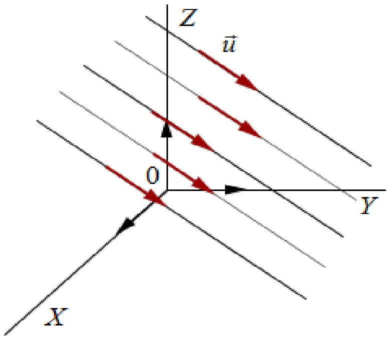


** Si **r** y **s** vienen dadas por sus ecuaciones continuas o paramétricas. Se estudian los vectores directores de ambas rectas $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y un vector $\overrightarrow{AB}$ que une un punto de cada una de ellas.*

<table>
<tr><th>Rectas Secantes</th><th>Rectas coincidentes</th><th>Rectas paralelas</th><th>Rectas que se cruzan</th></tr>
<tr><td colspan="3">·Las rectas están en un mismo plano
·Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes.</td><td rowspan="3">· No hay ningún plano que las contenga.

· Los vectores $\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ son linealmente independientes.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">· Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ son linealmente independientes.</td><td colspan="2">· $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ son linealmente dependientes.</td></tr>
<tr><td>· $\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ tienen la misma dirección</td><td>· $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ tienen la misma dirección, pero $\overrightarrow{AB}$ no</td></tr>
<tr><td>$rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB})=2=$
$=rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$</td><td>$rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB})=1$</td><td>$rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB})=2\neq$
$\neq rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2)=1$</td><td>$rango(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB})=3$</td></tr>
</table>

Familias de rectas paralelas.

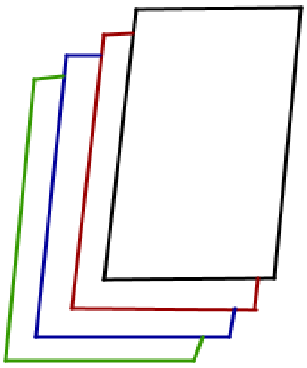


Todas las rectas que tienen como vector director $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ *son paralelas entre si, forman una familia de rectas paralelas de ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = \alpha + u_1 t \\ y = \beta + u_2 t \\ z = \gamma + u_3 t \end{cases}$$

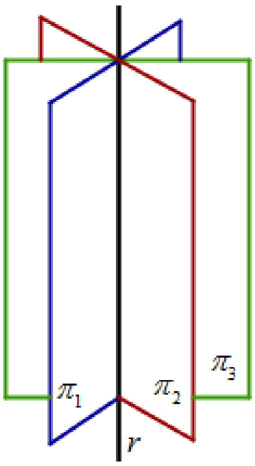
Donde (α, β, γ) *son las coordenadas de un punto del espacio, que en cada caso, determina una recta concreta de la familia.*

Familia de planos paralelos.



Los planos $3x + 4y - 2z + 1 = 0$, *y* $3x + 4y - 2z - 3 = 0$ *son paralelos y también son paralelos a cualquier plano de la forma* $3x + 4y - 2z + \alpha = 0$. *Todos estos planos forman una familia de planos paralelos.*
El conjunto de los planos de ecuaciones general:
$\boxed{ax + by + cz + \alpha = 0}$ *, es una familia de planos paralelos entre sí (donde* $\alpha \in R$*, es un parámetro variable).*

Haces de planos secantes.



Dada una recta ***r*** *del espacio, el conjunto de todos los planos que contienen recibe el nombre de haz de planos de arista* ***r.***
Conocidas las ecuaciones generales de dos de los planos de un haz: $\pi_1 \equiv ax + by + cz + d = 0; \pi_2 \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$,
cualquier otro plano perteneciente al mismo forma con los anteriores un conjunto de tres planos con una recta común.
Si la ecuación del nuevo plano es $\pi_3 \equiv a''x + b''y + c''z + d'' = 0$,
Los tres planos forman una recta común sí se cumple la condición $\text{rango}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$

La tercera fila debe ser combinación lineal de las dos primeras ya que estas son independientes por tratarse de dos planos distintos.

$$(a'', b'', c'', d'') = \alpha(a, b, c, d) + \beta(a', b', c', d')$$

Los coeficientes de la ecuación de un plano del haz han de ser de la forma:

$a'' = \alpha a + \beta a'$; $b'' = \alpha b + \beta b'$; $c'' = \alpha c + \beta c'$; $d'' = \alpha d + \beta d'$.

Estas igualdades hacen posible escribir la ecuación de todos los planos del haz a partir de las ecuaciones de dos planos cualesquiera que pertenecen al mismo.

Dada la recta $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ *la ecuación general del haz de plano de arista **r** es:*

$\boxed{\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0}$, *donde* α *y* β *son parámetros que pueden variar en el conjunto de los números reales, dando lugar, en cada caso a uno de los planos del haz.*