

Ecuaciones Lineales en Dos Variables

Una **ecuación lineal en dos variables** tiene la forma general $ax + by + c = 0$; donde a, b, c representan números reales y las tres no pueden ser iguales a cero a la misma vez.

Ejemplos	$2x + 3y - 2 = 0$	$5y - 3x = 4$
	$4x - 9y + 1 = 0$	$10a - 12b = 60$
	$7y = 21x$	$3x + 0y = 21$

Hallar la solución de una ecuación lineal en dos variables consiste en encontrar aquellos valores para cada variable que hacen cierta o satisfacen a la ecuación.

Halle la solución de las siguientes ecuaciones:

- $x + y = 12$ ¿Cuántas soluciones son posibles?
- $5x = 10y$ ¿Cuántas soluciones son posibles?

Solución de una ecuación lineal en dos variables

La solución de una ecuación lineal en dos variables de la forma general $ax + by + c = 0$, es un conjunto infinito de elementos de la forma (x, y) , **par ordenado**, que satisfacen a la ecuación.

Por ser éste un conjunto infinito no podemos enumerar a cada uno de sus elementos de manera que representamos al conjunto solución de la siguiente forma;

$$\{ (x,y) \mid ax + by + c = 0 \}$$

Se lee - “La solución es el conjunto de todo para ordenado x, y , tal que $ax + by = 0$ ”

Ejemplo El conjunto solución de la ecuación $3x + y = 5$ es $\{ (x,y) \mid 3x + y = 5 \}$.

Uno de los elementos de este conjunto solución lo es el par ordenado $(1,2)$, es decir, una solución posible la obtenemos cuando $x = 1$ y $y = 2$. Verifica esta solución.

¿El par ordenado $(3, -4)$ es un elemento de l conjunto solución de la ecuación anterior?

Práctica

Verifica si el par ordenado indicado es elemento del conjunto solución de la ecuación correspondiente:

a. $(1,1)$ $7x - 2y = 5$

b. $(-2, 3)$ $3x + y = 3$

Si queremos encontrar un elemento del conjunto solución debemos seguir un método algebraico.

Procedimiento para hallar un elemento del conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables (par ordenado) .

1. Asignar un valor real a una de las dos variables y sustituir este valor en la ecuación.
2. Simplificar la ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal en una variable que obtenemos al sustituir en el paso anterior. Despejar para la variable que nos queda.

*** Los valores que obtenemos para cada una de las variables es una de la infinita cantidad de pares de valores que satisfacen a la ecuación.

Práctica

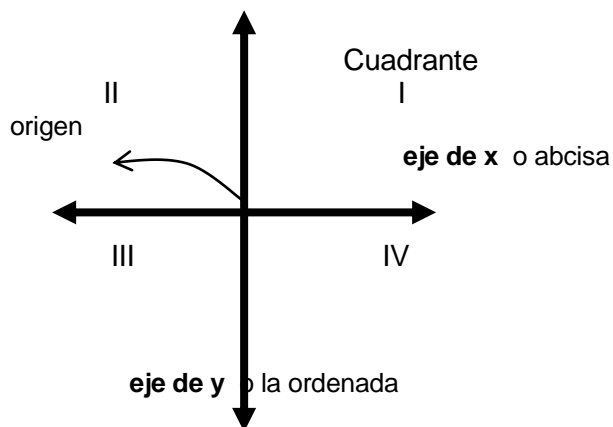
Halla dos elementos del conjunto solución para cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $4x - 2y = 8$

b. $3y - 5x = 9$

Sistema de Coordenadas Rectangulares

PLANO CARTESIANO: se define por dos rectas numéricas perpendiculares.

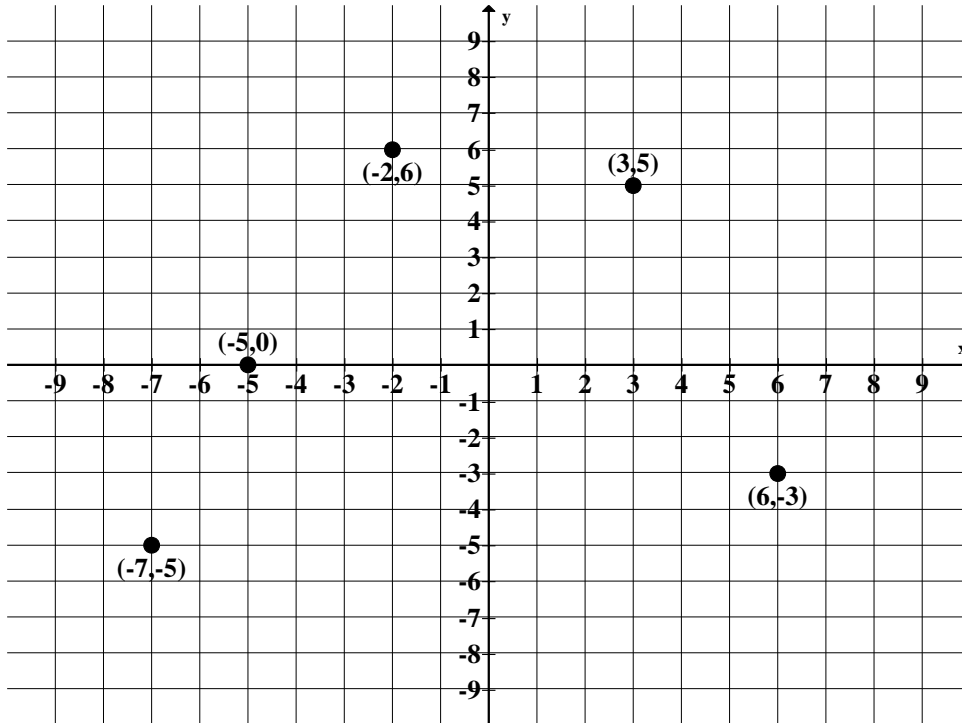


Todo par ordenado (x,y) se puede representar como un punto en el Plano Cartesiano.

El par ordenado (x,y) es la **coordenada del punto** y nos indica cuál es la dirección de éste en el Plano Cartesiano. El primer valor nos indica su posición horizontal con respecto al eje de x y el segundo valor nos indica su posición vertical con respecto al eje de y.

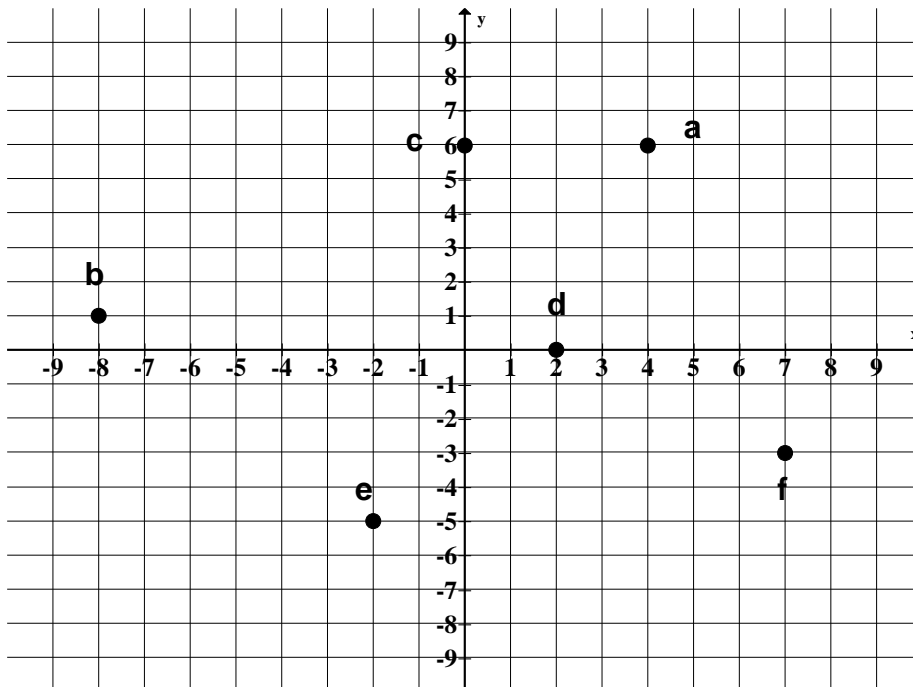
En el eje horizontal los valores positivos se encuentran a la derecha y los negativos a la izquierda. En el eje vertical los valores positivos se encuentran hacia arriba y los valores negativos hacia abajo.

Veamos los puntos con su respectiva coordenada en el siguiente Plano Cartesiano



Práctica

Indica la coordenada que le corresponde a cada punto en el Plano



- a) _____
- b) _____
- c) _____
- d) _____
- e) _____
- f) _____

Ya que el conjunto solución de una ecuación lineal en dos variables consiste en un conjunto infinito de pares ordenados, entonces podemos representar la solución de esta ecuación en el Plano Cartesiano con una gráfica.

La gráfica de una ecuación lineal en dos variables es una línea recta. Esta línea es la representación gráfica del conjunto solución de la ecuación.

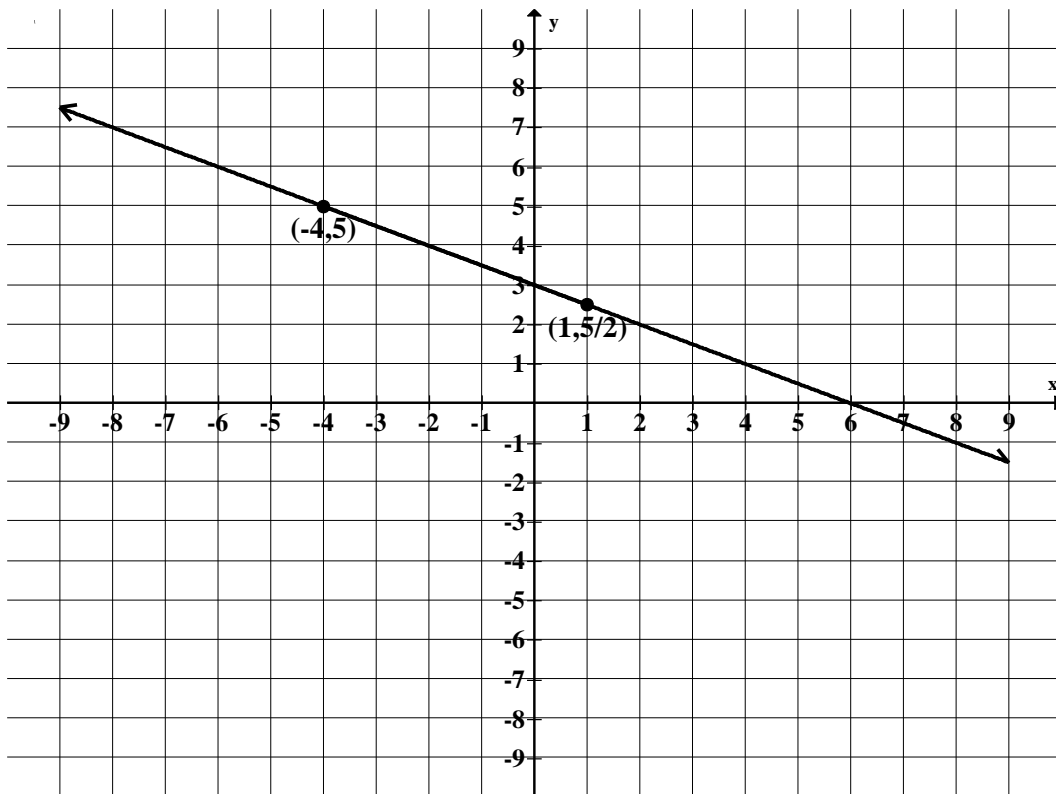
Para definir una línea, para dibujarla, hacen falta al menos dos puntos por lo tanto para dibujar la línea es necesario encontrar dos pares ordenados del conjunto solución. Se recomienda que se trabaje con tres puntos.

Ejemplo Dibuja la gráfica de la ecuación $2y + x = 6$

Necesitamos dos puntos para dibujar la gráfica, evaluamos la ecuación en dos valores distintos.

x	y
-4	5
1	5/2

Marcamos estos puntos en el Plano y los unimos con una línea recta.



Los **interceptos en los ejes** son puntos importantes de una línea.

Un **intercepto en x** es un punto de la línea que corta o intercepta el eje de x.

Este punto es de la forma **(x , 0)** , es decir, es un punto en el que su coordenada tiene a **y = 0**.

Un **intercepto en y** es un punto de la línea que corta o intercepta el eje de y.

Este punto es de la forma **(0 , y)** , es decir, es un punto en el que su coordenada tiene a **x = 0**.

Práctica

Observa la gráfica anterior; luego identifica y escribe la coordenada del intercepto en x y la del intercepto en y.

Verifica tu respuesta algebraicamente.

Intercepto en x	Intercepto en y
$2y + x = 6$	$2y + x = 6$
$y = 0$	$x = 0$
$2(0) + x = 6$	$2y + 0 = 6$
$x = 6$	$y = \frac{6}{2}$
	$y = 3$

PRÁCTICA NO. 1 PARA LA CLASE

$$3x - y = 5$$

$3x - y = 5$										
Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea										
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> </tbody> </table>	x		y							
x	y									

PRÁCTICA NO.2 PARA LA CLASE

$y + 5x = -2$										
Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea										
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px;">x</th> <th style="padding: 2px;">y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="height: 15px;"> </td><td> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td><td> </td></tr> <tr><td style="height: 15px;"> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	x		y							
x	y									

PRÁCTICA NO. 3 PARA LA CLASE

$y = -2$

Característica	Procedimiento	Gráfica							
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$									
Pendiente	Comportamiento de la línea								
Intercepto en x $y = 0$ (,)	Intercepto en y $x = 0$ (,)								
Dos puntos de la línea									
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x		y						
x	y								

PRÁCTICA NO. 4 PARA LA CLASE

$x = 5$

Característica	Procedimiento	Gráfica							
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$									
Pendiente	Comportamiento de la línea								
Intercepto en x $y = 0$ (,)	Intercepto en y $x = 0$ (,)								
Dos puntos de la línea									
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	x		y						
x	y								

LA PENDIENTE DE UNA LÍNEA

La **pendiente de una línea** es una medida de inclinación de esa línea con respecto al eje de x .

Observaciones sobre la **pendiente (m)**:

- * una línea crece o decrece a una razón constante
- * la pendiente de una línea es única
- * la pendiente es la razón del ascenso vertical con respecto al avance horizontal

$$m = \frac{\text{ascenso vertical}}{\text{avance horizontal}}$$

Fórmula para hallar la pendiente (m)

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, dos puntos de una línea, entonces la pendiente de esa línea es dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

EJEMPLO 1

La pendiente de la línea que pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(7, 15)$ es dada por

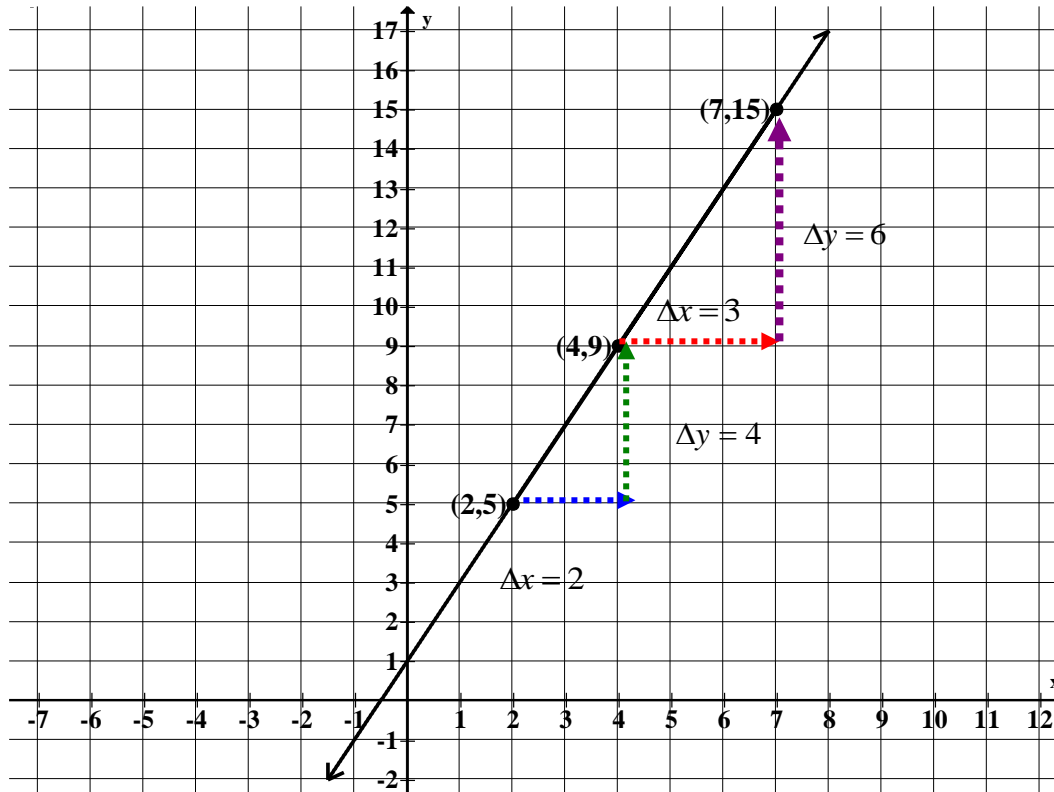
$$m = \frac{15 - 5}{7 - 2} = \frac{10}{5} = 2$$

Debido a que la pendiente representa una razón de cambio, el orden en que sustituimos los

puntos no afecta el resultado. Veamos
$$m = \frac{5 - 15}{2 - 7} = \frac{-10}{-5} = 2$$

La pendiente de esta línea es 2 , lo que significa que por cada unidad que x , se desplaza a la derecha el valor de y , aumenta dos unidades. Esto nos indica que si nos desplazamos 3 unidades a la derecha, el valor de y aumentará seis unidades, dos por cada unidad en x .

Dibujamos la gráfica marcando los puntos dados y observemos el comportamiento de esta línea y su pendiente.



Ya que la pendiente de una línea es única entonces no importa cuáles puntos de la línea utilicemos para determinar el comportamiento de la línea el resultado será el mismo.

Verifica el valor de la pendiente con los siguientes puntos de la gráfica anterior:

- a) (2,5) y (4,9)

- b) (4,9) y (7,15)

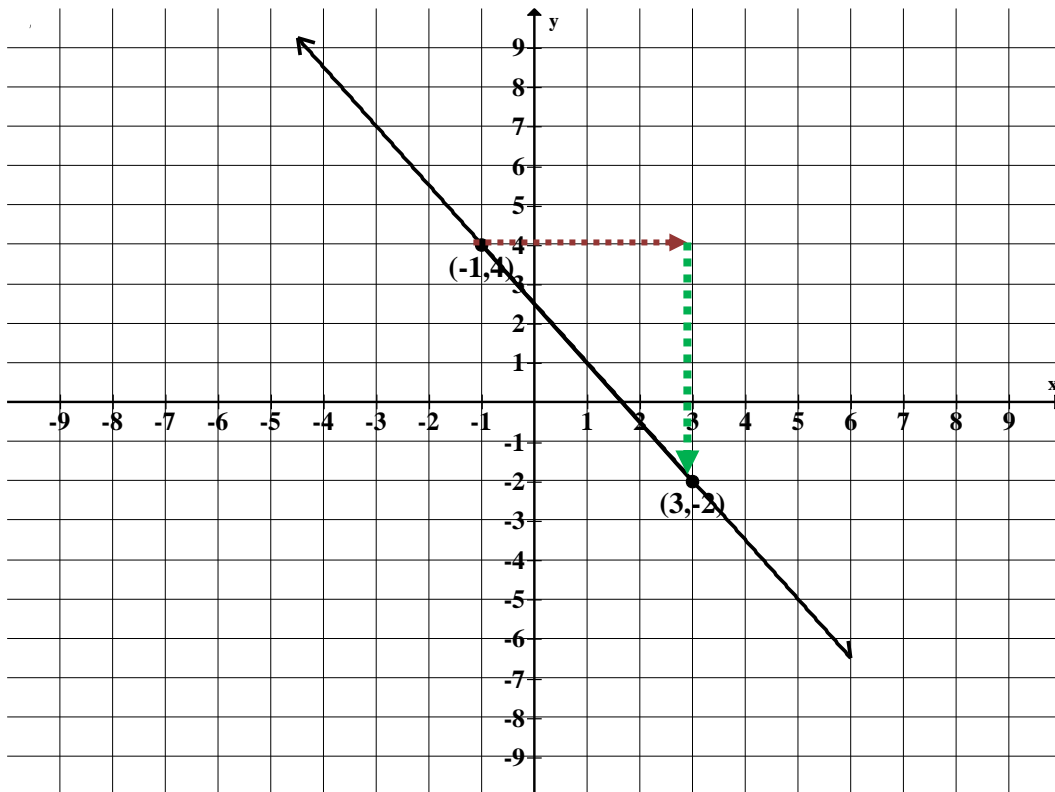
Decimos que el comportamiento de esta línea es creciente ya que a medida que observamos la gráfica hacia la derecha, al igual que leemos en inglés o español, el valor de y aumenta. .

EJEMPLO 2

La pendiente de la línea que pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$ es dada por

$$m = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

Dibujamos la gráfica marcando los puntos dados y observemos el comportamiento de esta línea y su pendiente.



La pendiente de esta línea es $-3/2 = -1.5$, esto significa que por cada unidad que se avanza horizontalmente en la gráfica, es decir en x , el valor de y **disminuye 1.5 unidades**.

Si comparamos los puntos marcados en la gráfica anterior observamos que cuando avanzamos en x , cuatro unidades el valor de y disminuye 6.

Decimos que el comportamiento de esta línea es decreciente ya que a medida que observamos la gráfica hacia la derecha, al igual que leemos en inglés o español, el valor de y disminuye. .

DISTINTOS TIPOS DE LÍNEAS Y SU COMPORTAMIENTO.

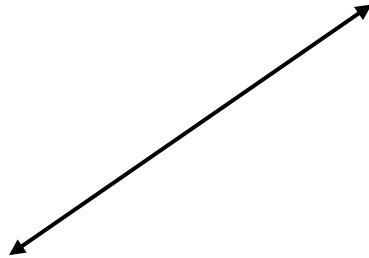
I Línea creciente

Comportamiento:

A medida que el valor de x aumenta el valor de y aumenta también.

La pendiente de una línea creciente es positiva, es decir , $m > 0$.

Esta línea tiene un intercepto en x y un intercepto en y .



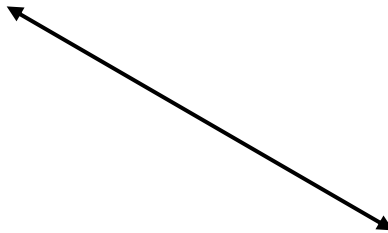
II Línea decreciente

Comportamiento:

A medida que el valor de x aumenta el valor de y disminuye.

La pendiente de una línea decreciente es negativa, es decir $m < 0$.

Esta línea tiene un intercepto en x y un intercepto en y



III Línea horizontal

Comportamiento:

Esta línea es paralela al eje de x . A medida que el valor de x aumenta el valor de y se mantiene constante.

La pendiente de una línea horizontal es cero, es decir $m = 0$, ya que no hay inclinación relativa con respecto al eje de x .

Esta línea siempre cortará el eje de y en el punto $(0,k)$.



La ecuación de esta línea es de la forma $y = k$, donde k es un número real.

IV Línea vertical

Comportamiento:

Esta línea es paralela al eje de y .

El valor de x se mantiene constante.

La pendiente de una línea vertical es indefinida.

Esta línea siempre cortará el eje de x en el punto $(x, 0)$.

La ecuación de esta línea es de la forma $x = k$, donde k es un número real.



Práctica

Calcula la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

1. Halla la pendiente de la línea que pasa por los puntos indicados e indica el comportamiento de la línea.

a) $(-3, 7)$ y $(4, 1)$

b) $(5, 12)$ y $(5, 8)$

c) $(8, -1)$ y $(4, 3)$

d) $(-6, 5)$ y $(2, 6)$

e) $(3, 3)$ y $(-1, -1)$

f) $(7, 1)$ y $(10, 1)$

2) Halla la pendiente de las siguientes líneas e indica el comportamiento de ésta.

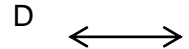
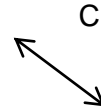
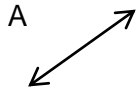
a) $y = 3x - 5$

b) $y = 2 - 5x$

c) $1 - y = x + 3$

Parea

1. $m > 0$
2. $m < 0$
3. $m = 0$
4. m indefinida



FORMA PENDIENTE INTERCEPTO

Una ecuación lineal en dos variables se puede expresar en la forma pendiente intercepto siempre que el coeficiente de la x no sea cero.

La forma pendiente intercepto consiste en expresar la ecuación despejada para la variable y .

NOTACIÓN

$$y = mx + b$$

donde m , es la pendiente de la línea y b , es la ordenada del intercepto en y de la línea.

Identifica la pendiente y el intercepto en y de cada ecuación.

a) $y = 3x - 5$

b) $y = 2 - 5x$

c) $y = -1$

Expresa las siguientes ecuaciones en la forma pendiente intercepto

a) $2y = x - 1$

b) $5y - 3x = 2$

c) $1 - y = 3x - 5$

Práctica

Ejercicio 1		$7y - 3x = -2$									
Característica	Procedimiento	Gráfica									
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y										
Pendiente											
Intercepto en x $y = 0$ (,)											
Intercepto en y $x = 0$ (,)											
Comportamiento de la línea											
Dos puntos de la línea <table border="1" data-bbox="284 1171 451 1318"><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr></table>	x			y							
x	y										

Ejercicio 2

$$16x - 6y = -4$$

Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea <table border="1" data-bbox="284 1039 451 1186"><thead><tr><th>x</th><th>y</th></tr></thead><tbody><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr></tbody></table>	x		y							
x	y									

Ejercicio 3

$x + 2y = 1$

Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea <table border="1" data-bbox="284 1071 451 1218"><thead><tr><th>x</th><th>y</th></tr></thead><tbody><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr></tbody></table>	x		y							
x	y									

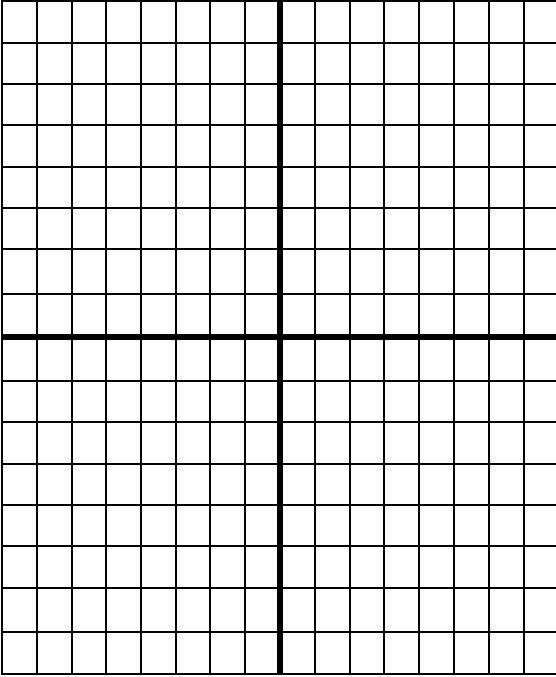
Ejercicio 4

$$5y - 3x = 2$$

Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea <table border="1" data-bbox="284 1102 451 1249"><thead><tr><th>x</th><th>y</th></tr></thead><tbody><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr></tbody></table>	x		y							
x	y									

Ejercicio 5

$$y = -3$$

Característica	Procedimiento	Gráfica								
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y									
Pendiente										
Intercepto en x $y = 0$ (,)										
Intercepto en y $x = 0$ (,)										
Comportamiento de la línea										
Dos puntos de la línea <table border="1" data-bbox="282 1104 451 1255"><thead><tr><th>x</th><th>y</th></tr></thead><tbody><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td></tr></tbody></table>	x		y							
x	y									

Ejercicio 6		$x = 2.5$									
Característica	Procedimiento	Gráfica									
Forma pendiente intercepto $y = mx + b$	Despejar para y										
Pendiente											
Intercepto en x $y = 0$ (,)											
Intercepto en y $x = 0$ (,)											
Comportamiento de la línea											
Dos puntos de la línea											
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> </tr> </tbody> </table>	x			y							
x	y										

FORMA PUNTO PENDIENTE

Esta fórmula nos permite determinar la ecuación de una línea si conozco la pendiente y un punto de esa línea.

$$\text{FÓRMULA } y = m(x - x_1) + y_1;$$

donde m es la pendiente y (x_1, y_1) es un punto de la línea.

Si me dan estos valores los sustituyo en la fórmula, simplificamos la expresión y finalmente obtenemos la ecuación correspondiente.

Ejemplo 1

Escribe la ecuación de la línea cuya pendiente es 5 y que pasa por el punto (1, 7).

Información dada: Pendiente $m=5$; punto (1,7)

$$\text{Fórmula } y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = 5(x - 1) + 7$$

$$y = 5x - 5 + 7$$

$$\text{Sustituir en la fórmula } y = 5x + 2$$

← Ecuación de la línea

Ejemplo 2

Escribe la ecuación de la línea cuya pendiente es -12 y que pasa por el punto (4, -3).

Información dada: Pendiente $m=-12$; punto (4,-3)

$$\text{Fórmula } y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = -12(x - 4) - 3$$

$$y = -12x + 48 - 3$$

$$\text{Sustituir en la fórmula } y = -12x + 45$$

← Ecuación de la línea

Ejemplo 3

Escribe la ecuación de la línea cuya pendiente es $\frac{1}{2}$ y que pasa por el punto (-2,10).

Información dada: Pendiente $m= \frac{1}{2}$; punto (-2,10)

$$\text{Fórmula } y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{1}{2}(x - (-2)) + 10$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 2) + 10$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 + 10$$

$$\text{stituir en la fórmula } y = \frac{1}{2}x + 11$$

← Ecuación de la línea

Ejemplo 4 Escribe la ecuación de la línea que pasa por los puntos (-2, 3) y (5, -4).

Falta la pendiente. Aunque no es dada podemos calcularla utilizando los dos puntos dados con la fórmula de pendiente.

Fórmula de pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Sustituir los puntos en la fórmula $m = \frac{3 - (-4)}{-2 - 5} = \frac{3 + 4}{-2 - 5} = \frac{7}{-7} = -1$

Fórmula $y = m(x - x_1) + y_1$

Sustituir en la fórmula la pendiente $m = -1$ y uno de los dos puntos dados.

$$y = -1(x - 3) + (-2)$$

$$y = -1x + 3 - 2$$

$$y = -1x + 1$$

$$y = -x + 1$$

← Ecuación de la línea

Si la información dada consiste en la pendiente y el intercepto en y, podemos sustituir esa información directamente en la ecuación de la forma pendiente intercepto y el procedimiento es más fácil.

Ejemplo 5

Escribe la ecuación de la línea cuya pendiente es $1/3$ y que pasa por el punto (0,20).

Información dada $m = 1/3$
(0,20) es la coordenada del intercepto en y por lo tanto $b = 20$

Sustituimos en $y = mx + b$ $y = \frac{1}{3}x + 20$ ← Ecuación de la línea

Casos de las líneas horizontales

Ejemplo 6 Determina la ecuación de la línea horizontal que pasa por el punto (-3,1)

Observación: la pendiente de una línea horizontal es $m = 0$ y el valor de y es constante.

En este caso sabemos que el único valor que tiene y será la ordenada del punto dado, es decir, el valor de y del punto. (-3,1)

La ecuación es $y = 1$.

Casos de las líneas verticales

Ejemplo 7 Determina la ecuación de la línea vertical que pasa por el punto $(-3,1)$

Observación: la pendiente de una línea vertical es indefinida y el valor de x es constante.

En este caso sabemos que el único valor que tiene x será la abscisa del punto dado, es decir, el valor de x del punto. $(-3,1)$ La ecuación es $x = -3$

Práctica Determina la ecuación de la línea

1. Halla la ecuación de la línea que pasa por los puntos $(8, -1)$ y $(4, 3)$.
2. Halla la ecuación de la línea cuya pendiente es 4 y que pasa por el punto $(5, -1)$.
3. Halla la ecuación de la línea horizontal que pasa por el punto $(7, -2)$.
4. La ecuación de la siguiente gráfica es:

