Podemos definir a las ecuaciones como una igualdad entre *expresiones algebraicas* (encadenamiento de números y letras ligados por operaciones matemáticas diversas),en la que intervienen una o más letras, llamadas *incógnita* (cuyo valor hay que averiguar). Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los miembros de la ecuación: *primer miembro* el de la izquierda, *segundo miembro* el de la derecha. Se denomina *solución* de una ecuación a un valor o conjunto de valores de la incógnita (x), para los cuales se verifica la igualdad.

Una ecuación puede tener ninguna, una o varias soluciones. Por ejemplo:

$5x - 9 = 1$ es una ecuación con una incógnita con una solución, $x = 2$

$x^2 + y^2 + 5 = 0$ es una ecuación con dos incógnitas sin solución, pues la suma de dos cuadrados es un número positivo, a partir del cual no se puede obtener 0 sumándole 5.

$2x + 3y = 15$ es una ecuación con dos incógnitas que tiene infinitas soluciones, algunas de las cuales son $x = 0$, $y = 5$; $x = 3$, $y = 3$; $x = 30$, $y = -15$.

Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución. Así, la ecuación $3x - 7 = x + 1$ es equivalente a $2x - 8 = 0$ porque ambas tienen como solución única $x = 4$.

Tipos De Ecuaciones

Las ecuaciones con una incógnita suelen tener un número finito de soluciones, mientras que en las ecuaciones con varias incógnitas encontramos infinitas soluciones, las que suelen ser estudiadas cuando forman sistemas de ecuaciones.

Podemos encontrar distintos tipos de ecuaciones con una incógnita: polinómica, racionales, exponenciales, trigonométricas…

Las ecuaciones polinómicas son de la forma $P_{(x)} = 0$, donde $P_{(x)}$ es un polinomio en x, que al trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

$3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ es una ecuación polinómica.

Las ecuaciones polinómicas de primer grado, $ax + b = 0$, se llaman ecuaciones lineales.

$5x + 7 = 3$ es lineal.

$(x - 5)^2 + 3 = x^2 - 1$, también lo es porque al desarrollar y simplificar se obtiene $-10x + 29 = 0$.

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, se llaman cuadráticas.

Son ecuaciones de este tipo: $x^2 - 5x + 3 = 0$, $(x - 2)^2 + 7x = 5 + x$.

Las ecuaciones radicales son aquellas en las que la incógnita está bajo un signo radical, como $\sqrt{2x-1} = 3$

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen cocientes de polinomios; por ejemplo:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x^2-1}$$

En las ecuaciones exponenciales la incógnita está en un exponente: $2^x + 4^{x+1} - 18 = 0$

En las ecuaciones trigonométricas la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica; por ejemplo:

$\operatorname{sen}(\pi/4 + x) - \cos x = 1$

Resolución De Ecuaciones

Resolver una ecuación es hallar su solución o soluciones, o bien concluir que no tiene solución. Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya fisonomía es más sencilla. Para averiguar el valor de *x* debe despejarse la letra incógnita. Para ello nos valemos de una propiedad matemática (propiedad uniforme) que nos permite poner un mismo número en ambos miembros de la expresión algebraica, siempre y cuando se mantenga la igualdad.

$4x - 7 + 7 = 1 + 7$ (por eso se dice que un numero que está restando "pasa" sumando).

$4x = 1 + 7$

$4x = 8$

$4x : 4 = 8 : 4$ (por eso se dice que un numero que está multiplicando "pasa" dividiendo)

Tiene una única solución: $x = 2$.

Sin embargo, hay tipos de ecuaciones para cuya resolución se requieren técnicas especiales. Es el caso, por ejemplo, de las ecuaciones cuadráticas y bicuadradas.

Resolución de ecuaciones cuadráticas

No existe una única forma de escribir la ecuación cuadrática.

La forma canónica: $f_{(x)} = a\,(x - v_x)^2 + v_y$ [donde $(-v_x\,;\,v_y)$ es la coordenada del vértice de la parábola]

La expresión polinómica $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$ representan diferentes formas de expresar la misma función. Veamos como se pasa de una a otra.

Partamos de una ecuación polinómica:

$f_{(x)} = ax^2 + bx + c$ Factoricemos *a*, para ello multiplicamos y dividimos toda la expresión por *a*.

Necesitamos que nos quede una sola *x* para ello fabricaremos un *trinomio cuadrado perfecto*. Recordar el tercer caso de factoreo:

Tomemos " " (donde está *x*) ¿Cómo encontramos el término faltante? igualemos los términos lineales (los que no están elevados al cuadrado) 2 *x y* = *x* .

Buscamos *"y"*, entonces despejémosla: *y* = . Observa que *y* en el trinomio está elevada al cuadrado, por lo tanto debemos sumar para obtener . Pero para mantener la igualdad si sumo debo restar:

distribuyamos *a* y operamos matemáticamente para que quede:

(que es la ecuación canónica)

Si tomamos esta ecuación y la igualamos a cero podemos desarrollar una fórmula que permita, directamente de la polinómica, hallar los ceros de la función (raíces)

Por ejemplo, la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$ de coeficientes $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$, se resuelve así:

Esta misma ecuación se podría haber resuelto despejando la *x*. Para ello, se multiplica la ecuación por 2:

$4x^2 + 10x + 6 = 0$

Se pasa el 6 al segundo miembro:

$4x^2 + 10x = -6$

Se suman 25/4 para completar un cuadrado perfecto (el cuadrado de una suma) en el primer miembro:

$4x2 + 10x + 25/4 = -6 + 25/4$

Simplificando:

$(2x + 5/2)^2 = 1/4$

$|2x + 5/2| = 1/2$ (las raíces al despejarlas quedan en módulo, y al sacar el módulo puede tener dos resultados, uno positivo y otro negativo).

$2x + 5/2 = \pm 1/2$

Como consecuencia del signo ±, la igualdad da lugar a dos ecuaciones:

$2x + 5/2 = 1/2$

$2x + 5/2 = -1/2$

Resolviéndolas se obtiene:

$2x + {}^5/_2 = 1/2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x1 = 1$

$2x + 5/2 = -1/2 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x2 = -{}^3/_2$

Siguiendo este largo proceso se obtienen las mismas soluciones que mediante la fórmula inicial. Es claro que la aplicación de ésta es un procedimiento mucho más cómodo. De hecho, la fórmula se obtiene algebraicamente a partir de la ecuación general mediante un proceso similar al que se ha seguido para resolver esta ecuación concreta.

Las ecuaciones de segundo grado de los tipos siguientes se llaman incompletas porque les falta uno de los términos:

$ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + c = 0$

Se pueden resolver aplicando la fórmula general, pero es más cómodo resolverlas despejando directamente la *x*.

En el primer caso,

$ax^2 + bx = 0 \rightarrow (ax + b)x = 0$

Una solución es $x = 0$ y la otra se obtiene resolviendo la ecuación lineal $ax + b = 0$. Por ejemplo:

$3x^2 + 5x = 0 \rightarrow (3x + 5)x = 0$

Las soluciones son: $x = 0$; $x = -5/3$.

En el segundo caso,

$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -c/a$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Por ejemplo:

$3x^2 - 17 = 0 \rightarrow 3x2 = 17$

$$|x| = \sqrt{\frac{17}{3}} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{17}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{17}{3}} \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones bicuadradas

Se llama bicuadrada a una ecuación polinómica de cuarto grado que no tiene términos de grado impar:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

Si se realiza el cambio de variable $x^2 = z$, con lo cual $x^4 = z^2$, entonces se transforma en una ecuación de segundo grado:

$az^2 + bz + c = 0$ (2)

Cada una de sus soluciones puede dar lugar a dos, una o ninguna solución de la ecuación inicial. Así, si *y* es solución de la ecuación (2), se verifica que:

si $z_1 > 0$, entonces $x_1 = \sqrt{z_1}$, $x_2 = -\sqrt{z_1}$ son raíces de (1);

si $z_1 = 0$, también $x_1 = 0$ es raíz de (1);

si $z_1 < 0$, $x_2 = z_1$ no da lugar a ninguna solución real de x.

Por ejemplo, la ecuación bicuadrada:

$x^4 - x^2 – 12 = 0$

se transforma, mediante el cambio de variable $x^2 = y$, en la ecuación de segundo grado:

$z^2 – z – 12 = 0$

Cuyas soluciones son

$$z=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}\begin{cases} z_1=\frac{1+7}{2}=4 \Longrightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \\ z_2=\frac{1-7}{2}=-3 \Longrightarrow x=\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

Por tanto, las únicas raíces reales de la ecuación son $x_1 = 2$, $x_2 = – 2$.

Sistema de ecuaciones:

Conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende hallar. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.

Las ecuaciones de un sistema suelen tener dos o más incógnitas, por lo que cada una de ellas puede tener infinitas soluciones. Se llama solución del sistema a una solución común a todas las ecuaciones que lo forman. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones o concluir que no tiene solución. Si dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones o ambos carecen de solución, se dice que son equivalentes.

Los sistemas de ecuaciones sin solución se llaman incompatibles y los que tienen solución, compatibles.

Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones $2x - 5y = 16$ y $4x + y = 10$ se expresa así

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+y=10 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -2$ porque es solución de ambas ecuaciones. Es, por tanto, un sistema compatible.

El sistema $\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 2x-5y=4 \end{cases}$ es incompatible, pues no tiene solución.

Los sistemas de ecuaciones lineales son especialmente interesantes por las múltiples aplicaciones que tienen en diversas ciencias.

Sistemas De Ecuaciones Lineales : Una ecuación con varias incógnitas es lineal si es de la forma $ax + by = c$,

$ax + by + cz = d, \ldots$, es decir, si las incógnitas aparecen sin exponentes (elevadas a 1).

Un sistema de ecuaciones lineales compatible, o bien tiene solución única (es determinado), o tiene infinitas soluciones (es indeterminado).

Existen varios métodos elementales para resolver sistemas de ecuaciones: el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción. A continuación se aplican en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra, la cual se transformará en una ecuación con una incógnita que se puede resolver. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra. Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

por el método de sustitución conviene despejar la *y* de la segunda ecuación:

$y = 10 - 4x$

Ahora se sustituye su valor en la primera:

$2x - 5(10 - 4x) = 16$

Se resuelve la ecuación resultante, pues sólo tiene una incógnita:

$2x - 50 + 20x = 16$

$22x = 66$

$x = 66 : 22 = 3$

Ahora el valor de *x* se sustituye en la expresión de *y* obtenida antes:

$y = 10 - 4x = 10 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$

Se ha obtenido así la solución $x = 3$, $y = -2$.

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Para resolver por igualación el sistema anterior:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

se puede despejar la *x* en ambas ecuaciones e igualar sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{16 + 5y}{2} \\ x = \dfrac{10 - y}{4} \end{array}\right\} \frac{16 + 5y}{2} = \frac{10 - y}{4} \Rightarrow 4(16 + 5y) = 2(10 - y) \Rightarrow 64 + 20y = 20 - 2y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20y + 2y = 20 - 64 \Rightarrow 22y = -44 \Rightarrow y = \frac{-44}{22} \Rightarrow y = -2$$

Por último, se sustituye el valor de *y* en alguna de las expresiones de *x*:

$$x = \frac{16 + 5y}{2} = \frac{16 + 5(-2)}{2} = 3$$

Se ha obtenido la solución $x = 3$, $y = -2$.

El método de reducción consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

Para resolver por reducción el mismo sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por 2 con el fin de que el coeficiente de la *x* sea el mismo en ambas ecuaciones:

$4x - 10y = 32$

$4x + y = 10$

Ahora, restando miembro a miembro se obtiene la ecuación siguiente:

$-11y = 22 \rightarrow y = 22 : (-11) \rightarrow y = -2.$

Y se sustituye en una de las ecuaciones iniciales:

$2x - 5(-2) = 16$

$2x + 10 = 16$

$2x = 6$

$x = 3$

La solución es $x = 3$, $y = -2$.

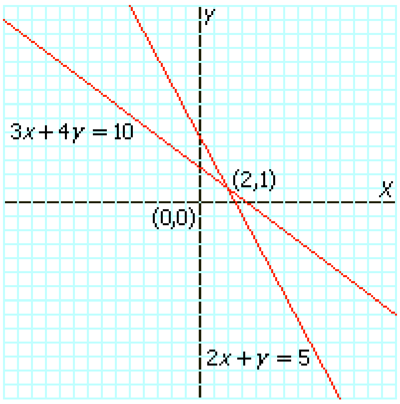
Representación gráfica: Una ecuación lineal con dos incógnitas, $ax + by = c$, se representa mediante una recta.

La representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en un par de rectas. Si éstas se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema. Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible. Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado: sus soluciones son los puntos de la recta.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

se representa del siguiente modo:



El punto en que se cortan las rectas, (2,1), es la solución del sistema: $x = 2$, $y = 1$.

Una ecuación lineal con tres incógnitas, $ax + by + cz = d$, se representa mediante un plano. La representación de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas consiste en tres planos cuya posición relativa determina que el sistema sea compatible o incompatible. Si los tres planos se cortan en un punto, el sistema es compatible determinado y si se cortan en una recta, el sistema es compatible indeterminado, pues tiene infinitas soluciones