

## Conceptos Básicos de Probabilidad

Debido a que el proceso de obtener toda la información relevante a una población particular es difícil y en muchos casos imposible de obtener, se utiliza una muestra para estimar la información necesaria para la toma de decisiones.

Muestra ( n ) → inferencia → Población

$$\bar{X} = 8 \quad \text{estimado de} \quad \mu = 7.5$$

Tomemos por ejemplo una compañía como Elly Lilly de Puerto Rico. Si la empresa desea introducir un nuevo producto al mercado, sería absurdo pretender que toda la población pruebe el producto. En este caso, se da a probar el producto a una muestra de consumidores y con base a los resultados de esa muestra se decide si el producto se elabora o no.

Ahora bien, como los resultados obtenidos a partir de una muestra difieren de los resultados que se obtendrían si se observara la población total o universo, existe un riesgo al tomar la decisión. Es en este caso que se utiliza la **PROBABILIDAD** como una medida de riesgo.

## **DEFINICIONES BASICAS**

**Experimento.** Cualquier acción cuyo resultado se registra como un dato.

**Espacio Muestral ( S ).** El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

**Ejemplo.** Supongamos el lanzar un dado al aire y observaremos los resultados siguientes:

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad S = \{ 6 \}$$

**Ejemplo.** En el lanzamiento de dos monedas tenemos;

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \} \quad S = \{ 4 \}$$

**Evento.** Es el resultado de un experimento.

Cuando cada evento es seleccionado al azar, el experimento se denomina aleatorio o al azar.

**Evento Simple ( E ).** Cada uno de los posibles resultados de un experimento y que no se puede descomponer.

En el caso del lanzamiento del dado, cada uno de los posibles números en la cara del dado es un evento simple.

Cuando los eventos se representan en un diagrama de Venn ( ver más adelante ) se denominan puntos muestrales.

**Evento Compuesto.** Los eventos A, B, C, etc., son eventos compuestos si se componen de dos o más eventos simples.

**Ejemplos de eventos simples y compuestos**

**Evento simple: Lanzamiento de un dado**

$$A = \{ \text{evento que salga un \# impar} \}$$

$$A = \{ 1, 3, 5 \}$$

$$B = \{ \text{el número sea } \leq 4 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

**Evento Compuesto: Lanzamiento de dos monedas**

$$A = \text{el evento de observar una cara}$$

$$A = \{ \text{HH, HT, TH, TT} \}$$

**Existen varias maneras de representar un espacio muestral particular. Consideremos dos de ellas;**

- a) mediante una tabla de contingencia
- b) mediante un diagrama de Venn

**a. Tabla de Contingencia o de clasificación cruzada**

En una tabla de frecuencia los datos se organizan de modo que sólo consideramos una variable a la vez. A los fines de estudiar de manera simultánea la respuesta de dos variables categóricas, se utiliza lo que se conoce como una tabla de contingencia. Para este tipo de tabla se establece una clasificación cruzada entre las variables analizadas. Por ejemplo, se puede relacionar mediante una tabla de contingencia las variables sexo ( m, f ) y el área de estudio (concentración); sexo y rango académico; ventas de productos por área geográfica y tipo de productos, etc.,

El ejemplo que se presenta a continuación clasifica las variables por rango académico y sexo.

Sexo	<u>Rango académico</u>				
	Instructor	Auxiliar	Asociado	Profesor	
Hombre	100	170	80	50	400
Mujer	90	145	50	25	310
	190	315	130	75	710

Pregunta, ¿puedes construir una tabla de probabilidad basado en la tabla de contingencia? Adelante!!!!!!!!!!!!!!

### b. CONJUNTOS. Operaciones con Conjuntos

Un diagrama de Venn ayuda a visualizar un experimento. Se representa por un diagrama rectangular representando el espacio muestral  $S$  y que contiene los eventos simples marcados por  $E_1, E_2, \dots, E_6$ . Como un evento  $A$  es una colección de eventos simples, los puntos muestrales de ese evento se localizan en el interior del evento  $A$  ( $E_2, E_3, E_6$ )

Unión. La unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto  $C$  que está formado por los elementos de  $A$ , de  $B$  o de ambos.

$$A \cup B = C \quad \{ x / x, A, x, B \text{ o } x, a \text{ ambos} \}$$

**Intersección.** La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto C que está formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente.

$$A \cap B = C \{ x / x, A \text{ y } x, B \}$$

**Complementos.** El complemento de un conjunto A que se denota por  $A^c$  es el evento que consta de todos los resultados en el espacio muestral que no están contenidos en A.

$$A^c = \{ x \in S \mid x \notin A \}$$

$$A^c + A = S$$

Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, su intersección será nula o vacía. En este caso A y B se dicen eventos **mutuamente excluyentes.**

$$A \cap B = \{ \Phi \}$$

**Técnicas de Conteo.**

El análisis de los problemas de probabilidad se facilita a través de métodos sistemáticos de conteo de los grupos y arreglos de los datos.

**Principio de Multiplicación:**

Si un experimento puede describirse como una secuencia de k pasos y en cada paso hay  $n_1$  resultados en el primer paso,  $n_2$  resultados en el segundo paso,  $n_3$

resultados en el tercer paso, y así sucesivamente, entonces el número de eventos que pueden ocurrir será,

$$(n_1) \cdot (n_2) \cdot (n_3) \cdot (n_4) \cdot \dots \cdot (n_k)$$

**Ejemplos.**

1) Lanzar dos dados:  $(n_1) \cdot (n_2) = (6) \cdot (6) = 36$

2) Suponga que se desea formar un comité de tres miembros en el cuál se elegirá un presidente, un vicepresidente y un tesorero. Hay dos candidatos para la presidencia, 4 para la vicepresidencia y 3 para el tesorero. ¿De cuántas formas se puede formar el comité?

# de formas para escoger presidencia : 2

# de formas para escoger vicepresidencia : 4

# de formas para escoger el tesorero : 3

# formas para escoger las posiciones:  $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

**Definición de Factorial.** El simbolo  $n!$  que se lee “n factorial” se refiere al producto de todos los enteros desde n hasta 1.

$$n! = n (n - 1) (n - 2) (n - 3) \dots \dots \dots 3.2.1$$

definición:  $0! = 1$  ( cero factorial es 1 )

ejemplos;  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \therefore 5! = 5 \cdot 4!$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 4! = 4 \cdot 3!$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 3! = 3 \cdot 2!$$

$$2! = 2 \cdot 1$$

## Muestras Ordenadas.

**Permutación ( P ).** Cada arreglo de datos donde el orden es importante y que puede realizarse tomando algunos datos o todos los datos contenidos en el grupo.

$$n = \# \text{ de datos} \quad r = \text{grupo tomado de } n \text{ ( } r < n \text{ )}$$

### Caso 1. ( $n = r$ )

$${}_n P_n = n !$$

**Ejemplo.** Se tienen 6 máquinas de escribir y 6 personas para operar las máquinas, ¿de cuántas maneras se pueden asignar las personas a las máquinas?

**Solución:**  ${}_6 P_6 = 6 ! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

**Ejemplo.** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras A, B, C tomándolas todas a la vez?

**Solución:**  ${}_3 P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  [ ABC, BCA, CAB, BAC, CBA, ACB ]

### Caso 2 ( $r < n$ ). Muestras ordenadas sin repetición.

En éste caso cada observación se toma una sola vez, porque la unidad después de observada no se regresa a la población de donde proviene.

$${}_N P_n = \frac{N!}{[N - n]!}$$

**N- # de elementos diferentes disponibles (población)**

**n- # número de elementos tomados de N (muestra)**

**Ejemplo. Un examen de candidatura consta de 5 partes que pueden obtenerse de un total de 10 temas. ¿de cuántas maneras se pueden escoger las 5 partes?**

$${}_{10}P_5 = \frac{10!}{[10 - 5]!}$$

$${}_{10}P_5 = \frac{10!}{5!} = 5! = 120$$

**Ejemplo.**

Haga una lista de las permutaciones que pueden formarse con los #s : 1, 2, 3 y 4 tomando dos a la vez.

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$$

**Muestras no ordenadas sin repetición.** Cuando el orden en que se seleccionan los objetos no importa, tenemos lo que se denomina una Combinación.

**Combinaciones.** Número de formas diferentes que se pueden seleccionar n objetos de un total de N objetos distintos sin importar el orden ( juego de póker, ej. ).

$${}_NC_n = N! / n! (N - n)!$$

**Ejemplo.**

Se dispone de 8 personas, 5 hombres y 3 mujeres, para formar un comité de 5 personas. ¿de cuántas maneras se puede formar el comité si debe incluir 3 hombres y 2 mujeres?

$${}_n C_n = {}_8 C_5 = [{}_5 C_3] [{}_3 C_2] = [5! / 3! (5-3)!] [3! / 2! (3-2)!]$$

$${}_n C_n = {}_8 C_5 = [10] [3] = 30$$

¿Qué significa la palabra probabilidad?

En general, la palabra se refiere a la posibilidad relativa de que ocurra un evento.

**Ejemplos,**

- a) la posibilidad de seleccionar una carta de un mazo
- b) la posibilidad que un producto nuevo tenga aceptación en el mercado
- c) la posibilidad de que un estudiante seleccionado al azar en una clase tenga un promedio de B

**Probabilidad Clásica y Probabilidad Subjetiva.**

La probabilidad clásica es aquella que se toma de manera objetiva y que puede considerarse de dos maneras: a priori y a posteriori.

**Probabilidad a Priori.** La probabilidad de un evento A, P(A), es la medida del chance de que ese evento ocurra.

En este caso los resultados del experimento son igualmente probables. Este método fue desarrollado por Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{\# de maneras que A puede ocurrir}}{\text{\# total de resultados posibles}}$$

$$P(A) = \frac{A \quad (\text{eventos que corresponden a A})}{S \quad (\text{eventos totales en el espacio muestral S})}$$

**Ejemplo.** Se lanzan dos monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean cara (H)?

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \} \quad P(HH) = \underline{\quad}$$

**Ejemplo.** Se lanzan dos dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor de 7?

$$S = \{ 36 \} \quad 1,1 \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad \dots \quad 6,1 \quad 6,2 \dots \quad 6,6$$

$$P(\sum d > 7) = 15 / 36$$

**Probabilidad a posteriori.** En el caso que los eventos no poseen igual posibilidad de ocurrencia, el problema de asignar las probabilidades ocurre a posteriori.

El concepto de probabilidad a posteriori lo desarrolla Richard Von Mises y está basado en el principio siguiente:

Si un experimento se realiza un número grande de veces,  $N$  por ejemplo, y sea  $n$  el número de veces que ocurre un evento  $E$ . Entonces, se observa experimentalmente el hecho de que a medida  $N$  aumenta la relación  $n / N$  tiende a un valor estable  $p$ . Ese valor  $p$  se llama la probabilidad de  $E$  y se escribe  $p(E)$ .

El método a priori se conoce también como de frecuencia relativa y es apropiado cuando se tienen los datos para estimar la proporción del tiempo que ocurrirá el evento en el experimento si el experimento se repite un número grande de veces.

**Ejemplo.**

La tabla siguiente muestra el número de hornos microondas vendidos por día en una tienda de ventas al detal del área metropolitana de San Juan

# de microondas (E)	# de días
0	15
1	48
2	25
3	22
4	10

**Determinar la probabilidad de que el número de microondas que se vendan actualmente sean:**

- a) 3      b) menos de 2      c) más de 1      d) por lo menos 2  
 e) entre 1 y 3 ambos incluidos      f) exactamente 4

**Probabilidad Subjetiva.** Se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento basado en la experiencia previa, la opinión personal o la intuición del individuo. En este caso después de estudiar la información disponible, se asigna un valor de probabilidad a los eventos basado en nuestro grado de creencia de que el evento puede ocurrir.

**Reglas Básicas de Probabilidades Para Eventos Simples.**

- 1. Ley Fundamental de Probabilidad.** Una probabilidad siempre estará comprendida entre 0 y 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- 2.  $\sum P(A) = 1$ .** La suma de las probabilidades de todos los eventos simples posibles del espacio muestral es 1.

- 3. Ley del Complemento.** Si  $A^c$  es el complemento de  $A$ , entonces,

$$P(A^c) + P(A) = 1$$

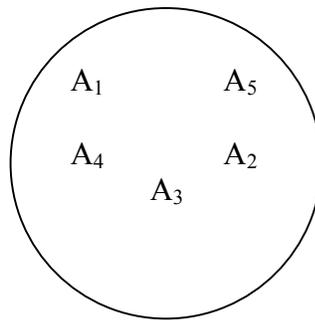
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

**Definición.** La probabilidad de un evento  $A$  cualquiera, es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples contenidos en  $A$ .

Por ejemplo, si las probabilidades de  $A_1, A_5, A_4, A_2, A_3$

son  $.10, .25, .05, .15, .08$  respectivamente, entonces,  
 $P(A) = .10 + .25 + .05 + .15 + .08 = .63$



### **Proceso Para Calcular la Probabilidad de un Evento.**

- 1) Haga una lista de todos los eventos contenidos en el espacio muestral.**
- 2) Asigne la probabilidad que corresponda a cada evento simple.**
- 3) Determine los eventos simples que constituyen el evento de interés.**
- 4) Sume las probabilidades de todos los eventos simples que constituyen el evento de interés.**

## Regla de Suma de Probabilidades

**a. Eventos Mutuamente Excluyentes.** Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) \quad [ P(A \cap B) = 0 ]$$

**b. Eventos No Mutuamente Excluyentes.** Dos eventos A y B son no mutuamente excluyentes si ambos pueden ocurrir simultáneamente.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Probabilidad Condicional e Independencia

En muchas ocasiones la probabilidad de que ocurra un evento depende de lo que ha ocurrido con otro evento. En este caso tenemos lo que se llama probabilidad condicional.

**Def.** La probabilidad condicional de A, dado que ha ocurrido el evento B, se escribe  $P(A/B)$ . O sea, es la probabilidad de que ocurra un evento A cuando se conoce cierta información relacionada con la ocurrencia de otro evento B.

$P(A/B)$  probabilidad de que ocurra A dado que B ha ocurrido.

$P(B/A)$  probabilidad de que ocurra B dado que A ha ocurrido.

$P(A/B) = P(A \_ B) / P(B)$  probabilidad condicional de A  
 $P(B/A) = P(A \_ B) / P(A)$  probabilidad condicional de B

$P(A \_ B)$ . Es la probabilidad conjunta porque denota la intersección de dos eventos, A y B.

$P(A)$  y  $P(B)$  se denominan probabilidades marginales

### Eventos Independientes y Dependientes

Se dice que dos eventos son independientes si y solo si,

$$P(A/B) = P(A)$$

Se dice que dos eventos son dependientes si la ocurrencia de uno de ellos afecta la ocurrencia del otro.

$$P(A/B) \neq P(A)$$

### Regla de Multiplicacion de Probabilidad

Esta regla de probabilidad se deriva de la definicion de probabilidad condicional y utiliza el concepto de interseccion de eventos para su aplicación.

a. Si A y B son eventos independientes, entonces,

$$P(A \_ B) = P(A) \cdot P(B)$$

b. Si A y B son eventos dependientes, entonces,

$$P(A \_ B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \_ B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

### Ejemplos de probabilidad.

Un importador de piñas recibe un cargamento de 500 cajas de la República Dominicana. Los datos de piñas dañadas en cada caja se muestran a continuación. El cálculo de las probabilidades correspondientes se muestra en la columna (3).

(1) Evento ( E ) ( # de piñas dañadas)	(2) # de cajas	(3) P ( E )
0	385	$385 / 500 = .77$
1	90	$90 / 500 = .18$
2	14	$14 / 500 = .028$
3	11	$11 / 500 = .022$

### Ejemplo de probabilidad condicional.

La tabla a continuación nos presenta el ascenso a catedráticos de los profesores de una institución durante los últimos 5 años.

**Tabla de Ascenso al rango de Catedrático**

	Hombres	Mujeres	Totales
Ascendido A	278	26	304
No ascendido A'	662	194	856
<b>Totales</b>	<b>940</b>	<b>220</b>	<b>1,160</b>

En la tabla de las probabilidades las probabilidades conjuntas aparecen en el interior de la tabla y las probabilidades marginales en los márgenes. Estas últimas se llaman probabilidades marginales.

**Tabla de Probabilidades Conjunta**

	Hombres	Mujeres	Totales
A	.24	.02	.26
A'	.57	.17	.74
Totales	.81	.19	1.00

A- ascendido	A'- no ascendido
--------------	------------------

¿cuál es la probabilidad de que un profesor seleccionado al azar sea hombre (H) y fue ascendido?

$$P(H\_A) = 278 / 1160 = .24$$

¿cuál es la probabilidad de que un profesor seleccionado al azar sea hombre (H) y no fue ascendido?

$$P(H\_A') = 662 / 1160 = .57$$

¿cuál es la probabilidad de que un profesor seleccionado al azar sea mujer (M) fue ascendido?

$$P(M\_A) = 26 / 1160 = .02$$

**¿cuál es la probabilidad de que un profesor seleccionado al azar sea mujer (M) y no fue ascendido?**

$$P(M\_A') = 194 / 1160 = .17$$

**Calculemos ahora las probabilidades condicionales.**

**a. probabilidad de que un profesor escogido al azar sea ascendido dado que es hombre (H)**

$$P(A/H) = 278 / 940 = .30$$

**Alternativamente**

$$P(A\_H) = P(H) \cdot P(A/H)$$

$$P(A/H) = \frac{P(A\_H)}{P(H)} = .24 / .81 = .30$$

**b. probabilidad de que un profesor escogido al azar sea ascendido dado que es hombre (M)**

$$P(A/M) = 26 / 220$$

**Alternativamente**  $P(A\_M) = P(M) \cdot P(A/M)$

$$P(A/M) = \frac{P(A\_M)}{P(M)} = .02 / .19 = .12$$

**Nota.** Hay una pequeña diferencia entre los dos valores debido al redondeo.

## Ejercicios de Probabilidades para Solucionar

1. Una urna contiene 10 bolas, 6 blancas y 4 negras. Si se saca una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca? Respuesta .60
  
2. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas,
  - a) la probabilidad de que la carta sea un rey ( .071 )
  - b) la probabilidad que sea un As de corazón rojo ( .019 )
  - c) la probabilidad que la carta sea negra ( .5 )
  - d) la probabilidad que la carta sea de espada (.25 )
  
3. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un As o un Rey? (.1538 )
  
4. Se saca una bola de una urna que contiene 12 bolas, 7 azules y 5 blancas, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul o blanca
  
5. Un individuo que entra a una farmacia tiene una probabilidad de comprar pasta dental de .45, de comprar desodorante de .35 y de comprar ambos de .25. Si ese individuo entra a la farmacia, ¿cuál es la probabilidad de que compre pasta dental o desodorante? (.55)
  
6. Se saca una carta de un mazo de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga un As o una carta roja? (.538)

- 7. En la población de Puerto Rico se ha estimado que la probabilidad de fumar es de .65 y la de fumar ocasionalmente de .20, ¿cuál es la probabilidad de no fumar para esa población?**
- 8. En una universidad 40% poseen un diploma en el idioma Francés, 30% poseen un diploma en el idioma Italiano y 10% poseen un diploma en ambos idiomas. Si se escoje un miembro de esa comunidad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que posea un diploma de Francés o Italiano?**
- 9. Suponga que un distribuidor de autos recibe 12 nuevos modelos, 8 automáticos y 4 estándares. Si se venden cuatro autos el próximo mes, ¿cuál es la probabilidad de que los autos vendidos sean dos automáticos y dos estándares? ¿cuál es la probabilidad de que los 4 sean o automáticos o estándares? ( .33 ) y ( .1434 )**
- 10. La probabilidad de que ocurra el evento A es .35, la probabilidad de que ocurra el evento B es .10. si A y B son eventos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento  $P(A \cap B)$ ? ( .415 )**
- 11. 55 por ciento de las personas de Puerto Rico viven en el área metropolitana de San Juan ( SJMA ). Además, 70 por ciento de esas personas se sienten felices y 40 por ciento de todas las personas de PR viven en el SJMA y son felices.**

**Demostrar si los eventos vivir en el SJMA y ser felices son eventos dependientes o independientes.**

- 12. Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes y si  $P(A) = .30$  y  $P(B) = .45$ , determinar  $P(A \cap B)$  y  $P(A / B)$**
- 13. El 50% de las personas de una comunidad poseen una cámara digital y una computadora. Además, 30% posee una computadora y 40% una cámara digital. ¿Cuál es la probabilidad que si seleccionamos una persona al azar posea una cámara o una computadora?**