Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Quinta Edición, 2010/2011

TRABAJO: Triángulos y progresiones

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- Enric Fita Sanmartín
- Andrea Gabaldón Moreno
- Pedro Morcillo Vilar
- Gracia Perales Díez
- José Vicente Perales Díez

TUTOR:

- Pep Amorós Tapia

CENTRO: IES Pere Boïl (Manises, Valencia)

TRIÁNGULOS

Y PROGRESIONES

Índice

1. Introducción y antecedentes.

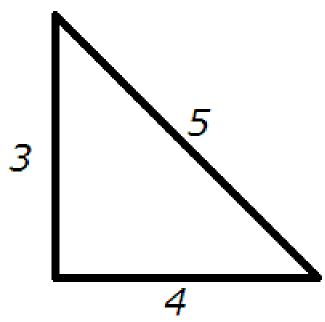
1.1. Triángulos en la historia

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Los babilonios y los egipcios (hace más de 3000 años) fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para la construcción de pirámides. También se desarrolló a partir de los primeros esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la astronomía.

Posteriormente los griegos como Herón, Euclides la siguieron investigando y enseñando al resto de la humanidad. Y así hasta nuestros días las peculiaridades de los triángulos fueron siendo investigadas por distintos matemáticos, destacando Pitágoras, Thales de Mileto y Eratóstenes.

Además cabe destacar de la cultura egipcia dela trigonometría, el triángulo rectángulo sagrado egipcio cuyos lados están en progresión aritmética 3, 4 y 5, o sus medidas guardan estas proporciones.

Cabe destacar que el triángulo egipcio tiene distintas propiedades: Al ser un triángulo rectángulo tiene las mismas propiedades que este, pero además tiene propiedades relacionadas con el cubo de sus lados y el área, o propiedades musicales o de proporciones, propiedades relacionadas con medidas angulares y astronómicas y propiedades relacionadas con las secciones de las pirámides de Guiza.



2. Objetivos

Los objetivos a conseguir en el trabajo son los siguientes:

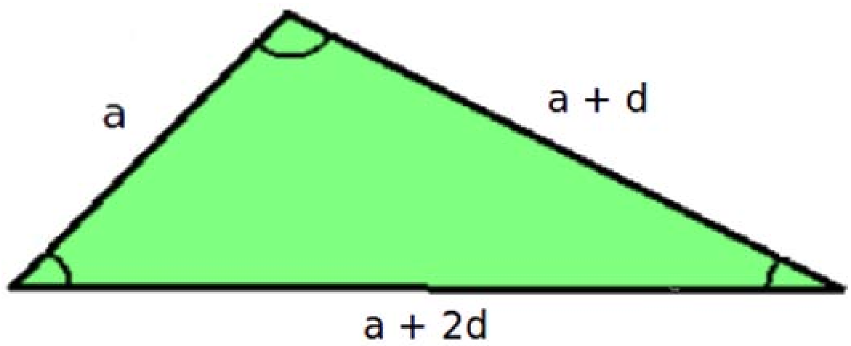
- Determinar si existen o no triángulos cuyas lados o ángulos estén o en progresión aritmética o en progresión geométrica.
- Encontrar relaciones sencillas que nos permitan reconocer los distintos tipos de triángulos: Rectángulos, acutángulos…
- Encontrar si existen o no triángulos cuyos lados están en progresión aritmética y sean números primos.

3. Triángulos en Progresión Aritmética (TPA)

Triángulos cuyos lados o ángulos están en progresión aritmética.

3.1. Lados en progresiones aritméticas (lpa)

En esta parte del trabajo se investigará sobre las progresiones aritméticas que sigue cualquier tipo de triángulo centrándonos básicamente en sus lados. Para ello tomamos los lados del triángulo de la siguiente forma:



Partimos de las siguientes condiciones:

$a > 0$ $\qquad$ $d > 0$ (si $d = 0$ el triángulo es equilátero)

Puesto que la condición general para formar un triángulo es que la suma de los lados menores (a y b) sea mayor que el tercero, debe cumplirse que:

$a + a + d > a + 2d$; por lo que $\mathbf{a > d}$

La condición que hemos hallado para que un triángulo tenga sus lados en progresión aritmética es que el lado menor ha de ser mayor que la

diferencia.

Casos particulares:

-Triángulos rectángulos:

Partiendo de las condiciones anteriores y añadiendo el teorema de Pitágoras, deducimos que:

$(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$

$a^2 + 4ad + 4d^2 = a^2 + a^2 + 2ad + d^2$

$-3d^2 - 2ad + a^2 = 0$

Al resolver esta última ecuación obtenemos que:

$$d = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{-6} = \frac{2a \pm 4a}{-6} = \begin{cases} -a \\ \frac{a}{3} \end{cases}$$

$$d = \frac{a}{3}$$

Por tanto, la condición para que un triángulo cuyos lados están en progresión aritmética sea rectángulo es que la diferencia de la progresión sea igual a la tercera parte del lado menor.

Con esta misma condición, a partir del teorema del coseno, podemos deducir que si:

a, b, c $c^2 < a^2 + b^2$ acutángulo $c^2 > a^2 + b^2$ obtusángulo

Si $(a+2d)^2 < a^2 + (a+d)^2 \leftrightarrow 0 < d < \frac{a}{3}$ el triángulo será acutángulo.

Si $(a+2d)^2 > a^2 + (a+d)^2 \leftrightarrow a > d > \frac{a}{3}$ el triángulo será obtusángulo.

Ejemplos:

- Triángulos cuyos lados son números enteros en progresión aritmética:

Hay infinitos. Si *a = 10* y *d = 6* el triángulo resultante sería (10, 16, 22)

- Triángulos rectángulos cuyos lados son números enteros en progresión aritmética:

Hay infinitos, pero condicionados, ya que todos son semejantes al triángulo cuyos lados son (3, 4, 5)

- Triángulos cuyos lados son números primos menores que 100 en progresión aritmética:

LADOS TRIÁNGULO	d	a/3	TIPO
3, 5, 7	2	1	Obtusángulo
7, 13, 19	6	7/3	Obtusángulo
7, 19, 31	12	7/3	Obtusángulo
11, 17, 23	6	11/3	Obtusángulo
17, 23, 29	6	17/3	Obtusángulo
17, 29, 41	12	17/3	Obtusángulo
19, 31, 43	12	19/3	Obtusángulo
29,41,53	12	29/3	Obtusángulo
23, 41, 59	18	23/3	Obtusángulo
31, 37, 43	6	31/3	Acutángulo
41, 47, 53	6	41/3	Acutángulo
47, 53, 59	9	47/3	Acutángulo
47, 59, 71	12	47/3	Acutángulo
37, 67, 97	30	37/3	Obtusángulo
61, 67, 73	6	61/3	Acutángulo
67, 73, 79	6	67/3	Acutángulo
53, 71, 89	18	53/3	Obtusángulo
59, 71, 83	12	59/3	Acutángulo
61, 79, 97	12	61/3	Acutángulo

Observamos que es imposible encontrar un triángulo cuyos lados sean números primos en progresión aritmética y cuyo perímetro también sea número primo, puesto que el perímetro sería P=a+a+d+a+2d=3(a+d) múltiplo de 3.

Pero ahora, dado un número primo cualquiera ¿forma parte de un triángulo cuyos tres lados sean número primos en progresión aritmética?

Hemos llegado a la conclusión de que no podemos llegar a saber la respuesta puesto que, tras investigar, hemos encontrado que diferentes matemáticos ya han intentado encontrar un teorema que lo explique pero no han llegado a ningún tipo de conclusión definitiva. Estos teoremas son:

- El teorema de Dirichlet

  Toda progresión aritmética: a, a+q, a+2q, a+3q…

  con enteros a y q primos entre sí, contiene infinitos números primos.

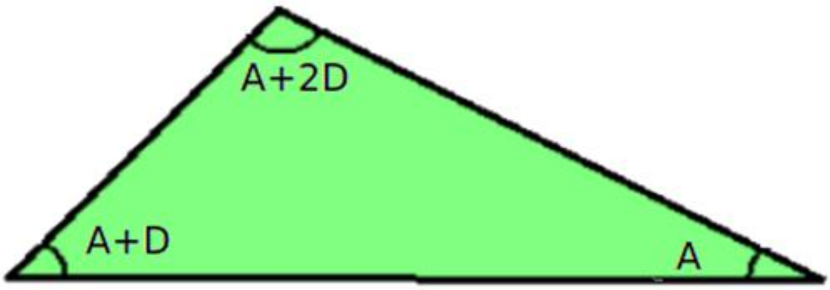
- Teorema de Green y Tao: En el conjunto de los números primos existen progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Es obvio que no puede haber progresiones aritméticas infinitas de números primos.

  Como consecuencia, para un número natural *k* arbitrario, existe una progresión aritmética de *k* terminos de números primos.

  Si lo aplicamos a nuestro caso, tomamos k número primo y en el caso que la diferencia d fuera menor que k, existiría el triángulo.

3.2. Ángulos en progresiones aritméticas (APA)

En esta parte del trabajo se investigará sobre las progresiones aritméticas que sigue cualquier tipo de triángulo centrándonos básicamente en sus ángulos. Para ello tomamos los ángulos del triángulo de la siguiente forma.



Como ocurre en todos los triángulos, la suma de los tres lados debe ser 180º. Por lo que:

A + (A+D) + (A + 2D) = 180º

3A + 3D = 180º

A + D = 60º

Observando la condición anterior, podemos afirmar que **basta que el triángulo tenga un ángulo de 60º para que sus ángulos se encuentren en progresión aritmética.**

Casos particulares:

D = 0   En este caso el triángulo resultante sería equilátero (60º, 60º, 60º).

D = 30º En este caso el triángulo resultante sería rectángulo (30º, 60º, 90º).

Como podemos observar dependiendo de la diferencia podemos obtener un tipo de triángulo u otro, por lo que llegamos a la conclusión de que:

-Cuando D > 30 se trata de un triángulo obtusángulo.

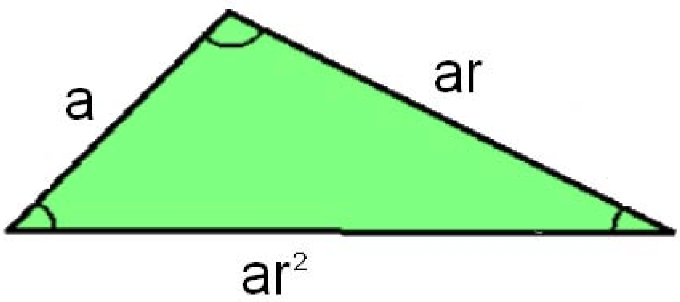
-Cuando D < 30 se trata de un triángulo acutángulo.

4. Triángulos en Progresión Geométrica (TPG)

Triángulos cuyos lados o ángulos están en progresión geométrica.

4.1. Lados en progresiones geométricas (lpg)

En este apartado veremos el comportamiento de los triángulos cuando sus lados forman una progresión geométrica.



Para ello impondremos la condición necesaria para que tres medidas formen un triángulo, es decir, que la suma de los lados más pequeños sea mayor que el lado con mayor longitud. Sea a_1 la medida del lado menor y r la constante por la que se irán multiplicando los lados, así pues $a_1+a_1r>a_1r^2$. Si resolvemos la inecuación:

$$a_1+a_1r>a_1r^2 \qquad a_1+a_1r-a_1r^2>0$$

$a_1(1+r-r^2)>0$

En primer lugar llegamos a la conclusión de que $a_1>0$, obviamente, esto quiere decir que los lados del triángulo tienen que ser positivos, ya que no existen lados negativos de un polígono.

Continuemos resolviendo:

$-r^2+r+1>0$ Resolvemos primero la ecuación: $1+r-r^2=0$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)1}}{2(-1)} \qquad r=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{-2}$$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{-2}\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2}=r_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\[2ex]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2}=r_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

La primera solución no nos sirve, ya que, como se ha explicado anteriormente, este valor es negativo y por tanto no existiría triángulo.

La segunda solución es un número muy conocido, el llamado número de oro, el cual se representa por el símbolo ϕ y equivale aproximadamente a 1,6180339. Su valor exacto coincide con el obtenido en $r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esto quiere decir que r ∈ (0, ϕ). Sin embargo, añadiremos que el valor de los lados no debe estar entre los valores 0 y 1, así evitamos que la progresión sea decreciente, por lo tanto, la solución final de la inecuación es r ∈ (1, Φ), o sea, que para que un triángulo tenga los lados en progresión geométrica es obligatorio que la razón se encuentre entre 1 y Φ.

Casos particulares:

Por ejemplo, las medidas 1, 1,1 y 1,21 forman un triángulo (1+1,1>1,21) y además están en progresión geométrica de razón 1,1. Otro triángulo de este tipo es aquel cuyos lados miden 2, 3 y 4,5 (2+3>4,5) cuya razón de progresión es 1,5. La razón no puede ser superior al número de oro porque entonces ya no formaría triangulo, por ejemplo: 3, 6 y 12; en este caso la razón de progresión es igual a 2, pero la condición de triángulo no se cumple (3+6>12), como esta desigualdad no es cierta, estas tres longitudes no forman triángulo.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un caso especial y concreto son los triángulos rectángulos, recordemos que son aquellos en los que existe un ángulo recto. Según el teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2$. Si aplicamos la fórmula a este caso obtenemos:

$$a_1{}^2+(a_1r)^2=(a_1r^2)^2$$

$$a_1{}^2+a_1{}^2r^2=a_1{}^2r^4$$

$$a_1{}^2(-r^4+r^2+1)=0$$

$$-r^4+r^2+1=0$$

$$r^2=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4*(-1)*1}}{2*(-1)}$$

$$r^2=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{-2}\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2}=r_1{}^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\[2ex]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2}=r_2{}^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}r_1=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}\\[2ex]r_2=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\end{cases}$$

La solución de $r_1$no es válida ya que es un radical negativo y por tanto no existe, de modo que nos quedaremos con $r_2=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ó $r_2=\sqrt{\Phi}$.

Esto quiere decir que para un triángulo sea rectángulo cuyos lados formen progresiones geométricas es necesario que la razón sea $\sqrt{\Phi}$. De este modo obtenemos el triángulo cuyos lados miden 1, $\sqrt{\Phi}$ y Φ. Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras llegamos a que $1+\Phi=\Phi^2$, propiedad del número de oro muy conocida.

Por último vamos a comprobar con el teorema del coseno qué triángulos cuyos lados formen progresiones geométricas serán acutángulos u obtusángulos. **Si la razón para un ángulo recto es igual a $\sqrt{\Phi}$, entonces las razones en el intervalo (1, $\sqrt{\Phi}$) formarán ángulo agudo y las razones entre ($\sqrt{\Phi}$, Φ) formarán un ángulo obtuso.** O sea:

Si $(ar^2)^2 < a^2+ar^2 \leftrightarrow 0<r<\sqrt{\phi}$ el triángulo será acutángulo.

Si $(ar^2)^2 > a^2+ar^2 \leftrightarrow 0>r>\sqrt{\phi}$ el triángulo será obtusángulo.

- Para un triángulo acutángulo: (razón 1,1)

- Ejemplo 1: Lados 1, 1,1 y 1,21.
- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
- $1{,}21^2=1{,}1^2+1^2-2\cdot 1{,}1\cdot 1\cdot\cos\alpha$ $\quad 1{,}4641=1{,}21+1-2{,}2\cdot\cos\alpha$
- $-0{,}7459=-2{,}2\cdot\cos\alpha$ $\quad \cos\alpha=0{,}339$ $\quad \alpha=70{,}18°$
- El ángulo es agudo. Se ha comprobado que las razones entre (1, $\sqrt{\Phi}$) formarán triángulos acutángulos.

Para un triángulo obtusángulo: (razón 1,5)

Ejemplo 2: Lados 1, 1,5 y 2,25.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot \cos\beta$$

$$2{,}25^2=1{,}5^2+1^2-2\cdot1{,}5\cdot1\cdot \cos \beta \qquad 5{,}0625=2{,}25+1-3\cdot \cos \beta$$

$1{,}8125=-3\cdot\cos\beta$ $\qquad \cos \beta=-0{,}604 \qquad \beta=127{,}16°$

El ángulo es obtuso. Se ha comprobado que las razones entre ($\sqrt{\Phi}$, Φ) formarán triángulos obtusángulos.

Casos particulares:

Triángulos cuyos lados sean números enteros.

Ahora veremos unos casos especiales que cumplan esta propiedad, a continuación se muestra una tabla con triángulos cuyos lados formen progresiones geométricas cuyas medidas sean números enteros menores o iguales que 100, para ello, la razón debe ser un número racional. Como los números racionales entre 1 y Φ los podemos expresar como fracciones irreducibles, además de los infinitos triángulos cuya razón de progresión sea 1, procuraremos que el numerador sea "algo" mayor que el denominador de forma que el cociente no sobrepase a Φ, evitando las fracciones equivalentes que dan lugar a triángulos semejantes.

r	L_1	L_2	L_3
3/2	4	6	9
4/3	9	12	16
5/4	16	20	25
6/5	25	30	36
7/6	36	42	49
8/7	49	56	64
9/8	64	72	81
10/9	81	90	100

r	L_1	L_2	L_3
7/5	25	35	49
9/7	49	63	81
8/5	25	40	64
10/7	49	70	100

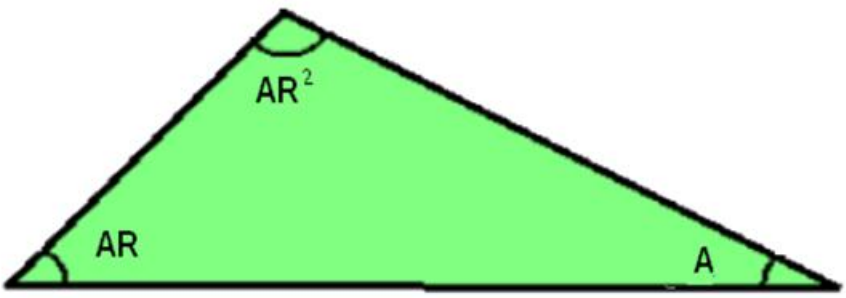
La primera tabla muestra las razones cuyo numerador es una unidad mayor que el denominador (el lado mayor de cada triángulo es igual al menor del siguiente triángulo) y en la segunda el numerador es dos o tres unidades más grande que el denominador.

Las fracciones 4/2 y 5/3 son mayores que Φ y las fracciones 6/4, 8/6, 10/8, 9/6, no son irreducibles, por lo que no es necesario ponerlas. 11/10, 11/9, 11/8 generan triángulos con algún lado mayor que 100.

Además, no existen triángulos con lados en progresión geométrica cuyas longitudes sean números primos, ya que si p y q son primos y los dos primeros lados de un triángulo cuya razón es r= q/p, el tercer número sería q^2p, que no puede ser primo. Tampoco existen los triángulos rectángulos cuyos lados sean números enteros ya que la razón de dichos triángulos tiene que ser obligatoriamente $\sqrt{\Phi}$, un número irracional.

4.2 Ángulos en progresión geométrica (APG)

En esta parte del trabajo se investigará sobre las progresiones geométricas que sigue cualquier tipo de triángulo centrándonos básicamente en sus ángulos. Para ello tomamos los ángulos del triángulo de la siguiente forma.



Como ocurre en todos los triángulos, la suma de los tres lados debe ser 180º. Por lo que:

$A+AR+AR^2=180$

Sacando factor común la *A*.

$A(R^2 +R+1)=180$

Algunos ejemplos de triángulos en progresión geométrica en los ángulos se encuentran en el anexo 1, donde se observa que no hay triángulos con ángulos enteros, excepto el equilátero.

Casos particulares:

Triángulos rectángulos.

Como en un triángulo rectángulo, el mayor ángulo es el de 90º, en este caso es AR^2. Al mismo tiempo, como la suma de los ángulos debe ser 180º, podemos decir que $A+AR=90$. De esta forma podemos igualar de la siguiente manera.

$$\begin{cases} AR^2=90 \\ A+AR=90 \end{cases} \quad \rightarrow \quad AR^2=A+AR \quad \rightarrow \quad A(R^2-R-1)0$$

Como A no puede ser 0, solo puede ser: $R^2-R-1=0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos como raíz positiva el número de oro: $R=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

De esta forma el triángulo rectángulo, seria este:

Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo3
34,376941	55,623059	90

5. Resultados

Los principales resultados se han recogido en esta tabla:

Triángulos

	PA	PG
LADOS	$d<a$	$r\in(1,\phi)$
ÁNGULOS	$A+D=60º$	$A\cdot(1+R+R^2)=180º$

Triángulos rectángulos

	PA	PG
LADOS	$d=\frac{a}{3}$	$r=\sqrt{\phi}$
ÁNGULOS	$D=30º$	$R=\phi$

6. Conclusiones

Nos habíamos marcado como objetivos determinar si existen o no triángulos cuyas lados o ángulos estén o en progresión aritmética o en progresión geométrica; encontrar relaciones sencillas que nos permitan reconocer los distintos tipos de triángulos y encontrar si existen o no triángulos cuyos lados están en progresión aritmética y sean números primos. Como conclusiones hemos obtenido:

- Condiciones para que existan los triángulos:

APA: basta que el triángulo tenga un ángulo de 60º para que sus ángulos se encuentren en progresión aritmética.

Ipa: para que un triángulo tenga sus lados en progresión aritmética el lado menor ha de ser mayor que la diferencia

APG: La condición de existencia para cualquier ángulo es: $A(1+R+R^2)=180º$

Ipg: Partiendo de que $a>0$ y $r>1$ obtenemos que para que existan triángulos cuyos lados estén en progresión geométrica $r \in (1, \Phi)$

- Encontrar relaciones sencillas que nos permitan reconocer los distintos tipos de triángulos: Rectángulos, acutángulos…

APA: Cuando:

D = 0 se trata de un triángulo equilátero (60º, 60º, 60º).

D = 30º se trata de un triángulo rectángulo (30º, 60º, 90º).

D > 30 se trata de un triángulo obtusángulo.

D < 30 se trata de un triángulo acutángulo.

Ipa: La condición para que un triángulo cuyos lados están en progresión aritmética sea rectángulo es que la diferencia de la progresión sea igual a la tercera parte del lado menor. Además si $d < \frac{a}{3}$ el triángulo será acutángulo y si $d > \frac{a}{3}$ el triángulo será obtusángulo

Por tanto habrá infinitos triángulos cuyos lados son números enteros en progresión aritmética y triángulos rectángulos cuyos lados son números enteros en progresión aritmética, pero éstos últimos están condicionados ya que todos son semejantes al triángulo cuyos lados son (3, 4, 5).

APG: Hemos llegado a la conclusión de que si R=ϕ es rectángulo. Además en el anexo tenemos una tabla donde clasificamos por obtusángulos o acutángulos en las razones comprendidas entre $1 \leq R \leq 3$.

Ipg: Para que un triángulo sea rectángulo cuyos lados formen progresiones geométricas es necesario que la razón sea $\sqrt{\Phi}$. De este modo obtenemos el triángulo cuyos lados miden 1, $\sqrt{\Phi}$ y Φ, o semejante. Si la razón pertenece al intervalo (1, $\sqrt{\Phi}$) formarán un triángulo acutángulo y para razones del intervalo ($\sqrt{\Phi}$, Φ) formarán un triángulo obtusángulo.

No existen triángulos con lados en progresión geométrica cuyas longitudes sean números primos. Tampoco existen los triángulos rectángulos cuyos lados sean números enteros ya que la razón de dichos triángulos tiene que ser obligatoriamente $\sqrt{\Phi}$, un número irracional.

7. Bibliografía

CORBALÁN, FERNANDO. La proporción aurea. RBA.

APOSTOL, Tom M. Introducción a la teoría analítica de números. Capitulo 7. Reverte.

VIQUIPÈDIA. Teoremas de Tao y Green.

8. Anexos

8.1. Triángulos cuyos ángulos están en progresión geométrica con razón comprendida entre 1≤R≤3

Razón	Ángulo 1	Ángulo 2	Ángulo 3	Tipo
1	60	60	60	acutángulo
1,05	57,0975	59,9524	62,9500	acutángulo
1,1	54,3807	59,8187	65,8006	acutángulo
1,15	51,8359	59,6112	68,5529	acutángulo
1,2	49,4505	59,3407	71,2088	acutángulo
1,25	47,2131	59,0164	73,7705	acutángulo
1,3	45,1128	58,6466	76,2406	acutángulo
1,35	43,1396	58,2385	78,6219	acutángulo
1,4	41,2844	57,7982	80,9174	acutángulo
1,45	39,5387	57,3311	83,1301	acutángulo
1,5	37,8947	56,8421	85,2632	acutángulo
1,55	36,3453	56,3352	87,3195	acutángulo
1,6	34,8837	55,8140	89,3023	acutángulo
1,65	33,5040	55,2815	91,2145	obtusángulo
1,7	32,2004	54,7406	93,0590	obtusángulo
1,75	30,9677	54,1935	94,8387	obtusángulo
1,8	29,8013	53,6424	96,5563	obtusángulo
1,85	28,6967	53,0889	98,2144	obtusángulo
1,9	27,6498	52,5346	99,8157	obtusángulo
1,95	26,6568	51,9807	101,3625	obtusángulo
2	25,7143	51,4286	102,8571	obtusángulo
2,05	24,8190	50,8790	104,3020	obtusángulo
2,1	23,9680	50,3329	105,6991	obtusángulo
2,15	23,1586	49,7909	107,0505	obtusángulo
2,2	22,3881	49,2537	108,3582	obtusángulo
2,25	21,6541	48,7218	109,6241	obtusángulo
2,3	20,9546	48,1956	110,8498	obtusángulo
2,35	20,2874	47,6754	112,0372	obtusángulo
2,4	19,6507	47,1616	113,1878	obtusángulo
2,45	19,0426	46,6543	114,3031	obtusángulo
2,5	18,4615	46,1538	115,3846	obtusángulo
2,55	17,9060	45,6603	116,4337	obtusángulo
2,6	17,3745	45,1737	117,4517	obtusángulo
2,65	16,8658	44,6943	118,4399	obtusángulo
2,7	16,3785	44,2220	119,3995	obtusángulo
2,75	15,9116	43,7569	120,3315	obtusángulo
2,8	15,4639	43,2990	121,2371	obtusángulo
2,85	15,0345	42,8482	122,1174	obtusángulo
2,9	14,6223	42,4045	122,9732	obtusángulo
2,95	14,2264	41,9680	123,8056	obtusángulo
3	13,8462	41,5385	124,6154	obtusángulo

La razón por la que pasa de ser acutángulo a obtusángulo es que entre ambos está R = Φ , es decir, cuando el triángulo es rectángulo.

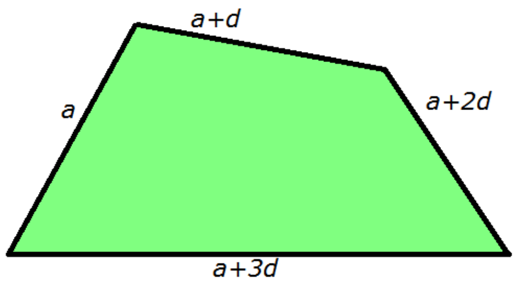
8.2. Cuadriláteros

8.2.1. Cuadriláteros cuyos lados están en PA

Para completar el trabajo en el siguiente anexo vamos a comprobar si también pueden existir cuadriláteros cuyos lados estén en PA.

Siguiendo el esquema de todos los apartados anteriores, para hablar de sus lados podemos definir un cuadrilátero de la siguiente forma:

$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d$



La condición para poder construir el cuadrilátero podría definir de la siguiente forma:

$a + a + d + a + 2d > a + 3d$

$3a + 3d > a + 3d$

$3a > a$

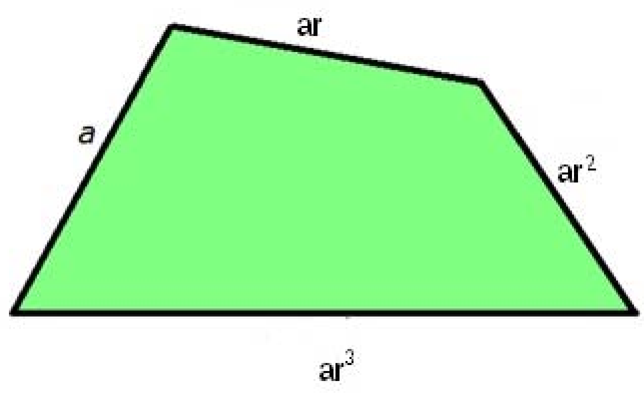
Por lo tanto, esto quiere decir que siempre se podrán formar cuadriláteros cuyos lados estén en progresión aritmética.

8.2.2. Cuadriláteros cuyos lados están en PG.

Por otra parte, para completar el trabajo en el siguiente apartado vamos a comprobar si también pueden existir cuadriláteros cuyos lados estén en PG.

Siguiendo el esquema de todos los apartados anteriores, para hablar de sus lados podemos definir un cuadrilátero de la siguiente forma:

A, ar, ar^2, ar^3



La condición para poder construir el cuadrilátero podría definir de la siguiente forma: $a+ar+ar^2 > ar^3$

Pasando ar^3 al otro lado y sacando factor común a, obtenemos:

$a(1+r+r^2-r^3)>0$

Como el lado no puede ser 0, solo $(1+r+r^2-r^3)$ puede serlo, por lo que:

$-r^3+r^2+r+1=0$ si representamos $f(r) =-r^3+r^2+r+1$ que solo corta en r=1,8392868….

Por lo que: $1< r< 1,8392868…$.

De esta forma, para que el cuadrilátero sea posible siguiendo una progresión geométrica, r debe de estar entre 1 y 1.8392868...