E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación — Curso 2010-2011

Grados E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación — Asignatura: Cálculo I

Tema 2: Funciones reales de una variable real

Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Funciones elementales: gráfica, dominio, imagen, simetría y traslaciones.
- Definición de derivada. Tabla de derivadas.
- Problemas de optimización

1.- Clasificación de las funciones reales de variable real.

$$\text{Funciones}\begin{cases}\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteras (Polinómicas)}\\ \text{Fraccionarias (Racionales)}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

Las funciones elementales se clasifican de acuerdo con el siguiente esquema:

- Funciones algebraicas son aquellas en las que la variable x está afectada de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación de exponente racional.

- Funciones polinómicas (o racionales enteras) son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

- Funciones racionales (o racionales fraccionarias) son cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

- Funciones irracionales. Cuando la variable independiente aparece bajo el signo radical o elevada a exponente racional no entero:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad , \quad g(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + 5x}}$$

- Funciones trascendentes son aquellas que no son algebraicas:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}3x-tg\,x}{\cos x}\quad,\quad g(x)=e^{1/x}\quad,\quad h(x)=\log\,(x^2-4)$$

2.- Funciones simétricas.

Una función f es simétrica respecto del eje de ordenadas (función *par*) si verifica:

$$f(x)=f(-x)\,,\quad \forall x\in Dom\ f$$

Una función f es simétrica respecto del origen de coordenadas (función *impar*) si verifica:

$$f(x)=-f(-x)\,,\quad \forall x\in Dom\ f$$

3.- Funciones periódicas.

Una función f es periódica, de periodo T siendo $T>0$ si verifica:

$$f(x+T)=f(x)\qquad,\qquad \forall\ x\in Dom\ f$$

Llamaremos *periodo principal* de la función al menor valor positivo T que verifica $f(x+T)=f(x)\ \forall\ x\in Dom\ f$. Es fácil ver que si T es periodo también lo será cualquier múltiplo de T.

4.- Función inversa.

La función inversa de una función inyectiva f en un dominio D es una función que se denotará por f^{-1} que cumple

$$\forall y\in \operatorname{Im} f\qquad f^{-1}(y)=x\quad siendo\quad f(x)=y$$

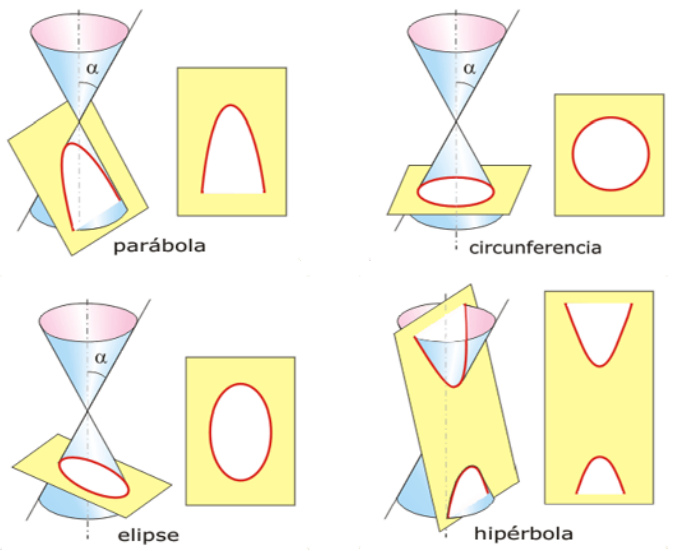
Una función y su inversa verifican las siguientes propiedades:

1) La composición de ambas es la función identidad
$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=I(x)=x$$
2) Las gráficas de f y de f^{-1}, referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.
3) $Dom\ f^{1}=\operatorname{Im} f\qquad\qquad \operatorname{Im} f^{-1}=Dom\ f$
4) Si $f(x)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, su inversa gozará de la misma propiedad.

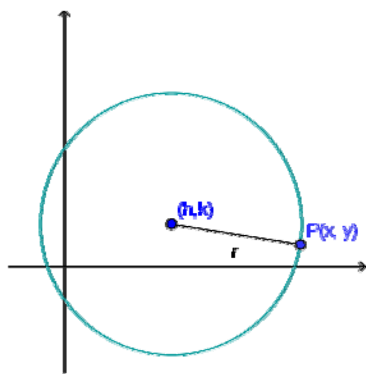
Ejemplo: La función $f(x)=x^2$ tiene por función inversa $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, ya que se verifica: $f\circ f^{-1}(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$; $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}\left(x^2\right)=\sqrt{x^2}=x$

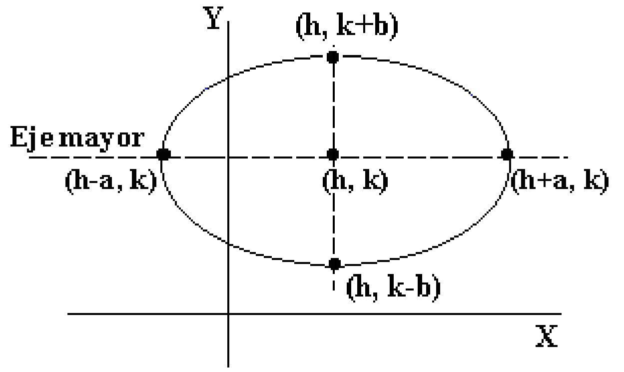
5.- Resumen de las cónicas.

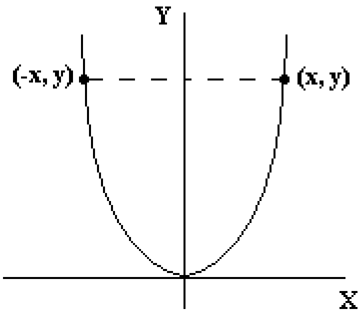
En la figura siguiente representamos gráficamente cómo se generan la cónicas, curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica mediante un plano.

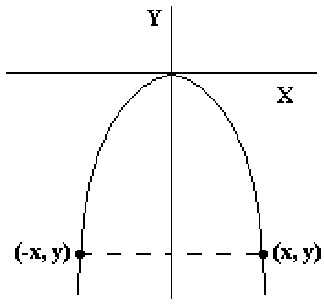


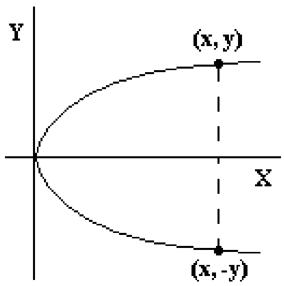
A continuación mostramos sus ecuaciones generales y las gráficas:

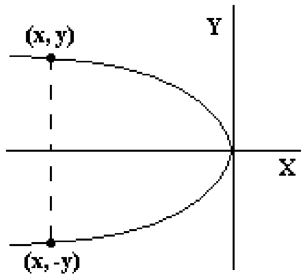
CIRCUNFERENCIA	
radio = r centro = (h,k) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ si el centro es (0, 0) $x^2+y^2=r^2$	

<table>
<tr><th>ELIPSE</th><td rowspan="2" colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Semiejes = a y b
centro = (h,k)

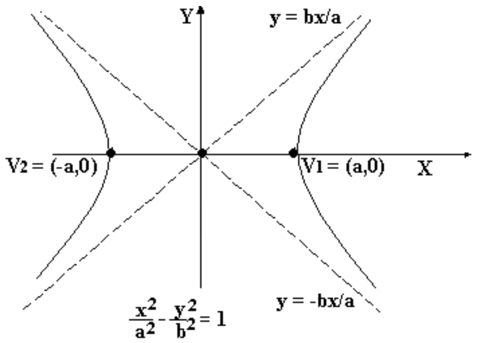
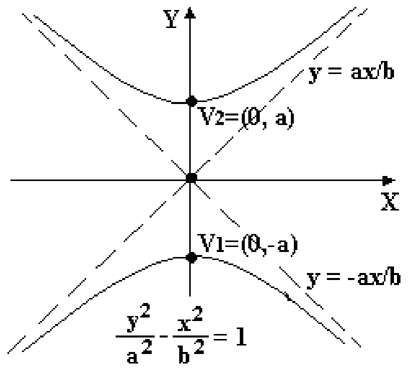
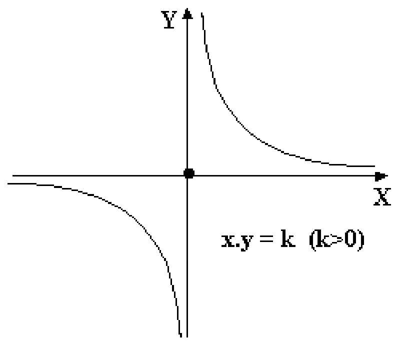
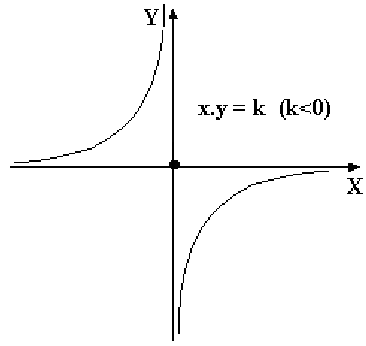
si el centro es (0, 0)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$</td></tr>
<tr><th>PARÁBOLAS</th><td rowspan="2">

$y = a.x^2$, $a > 0$</td><td rowspan="2">

$y = a.x^2$, $a < 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">vértice = $(0,0)$</td></tr>
<tr><td>

$x = a.y^2$, $a > 0$</td><td>

$x = a.y^2$, $a < 0$</td></tr>
</table>

HIPÉRBOLAS	
	
	

6.- Propiedades de las funciones elementales.

En las figuras siguientes recogemos las gráficas de las funciones elementales, junto con sus ecuaciones y propiedades correspondientes.

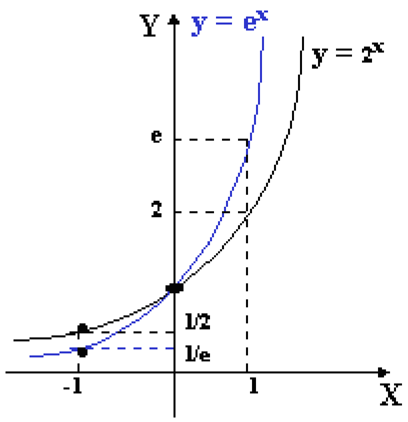
Función exponencial

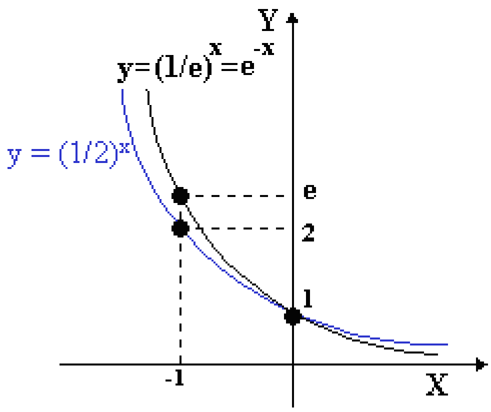
$$y = e^x$$

Dominio $= \mathbb{R}$; Imagen = $(0,\infty)$; no es ni par ni impar; no es periódica; es monótona estrictamente creciente; no está acotada (inferiormente está acotada por 0); no es suprayectiva.

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

Dominio $= \mathbb{R}$; Imagen = $(0,\infty)$; no es ni par ni impar; no es periódica; es monótona estrictamente decreciente; no está acotada (inferiormente está acotada por 0); no es suprayectiva.

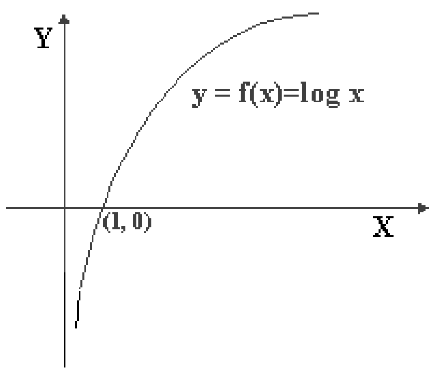


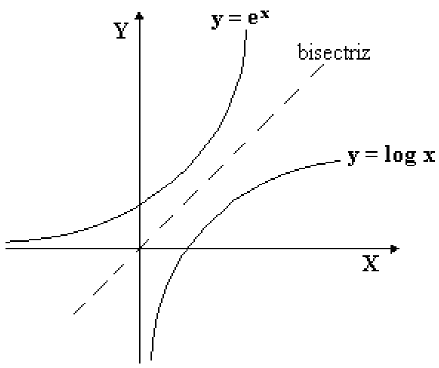


Función logarítmica

$$y = \log x$$

Dominio $= (0,\infty)$; Imagen = $\mathbb{R}$; no es ni par ni impar; no es periódica; es monótona estrictamente creciente; no está acotada; es biyectiva (inyectiva y suprayectiva). La función logarítmica, $y = \log(x)$, y la función exponencial, $y = e^x$, son inversas entre sí.



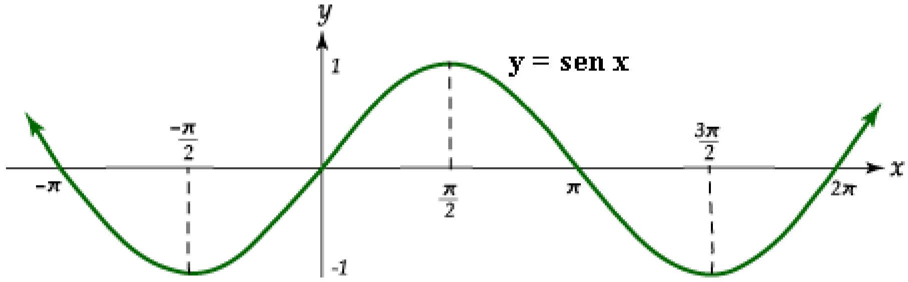


Funciones trigonométricas circulares y sus inversas

$y = \operatorname{sen} x$

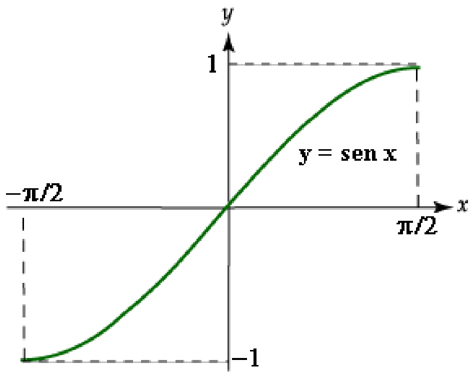
Dominio $= \mathbb{R}$; Imagen $= [-1,1]$; es impar; es periódica de período$= 2\pi$; no es monótona; está acotada (inferiormente por -1 y superiormente por 1); no es inyectiva; no es suprayectiva.

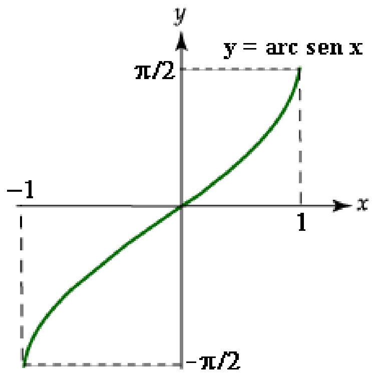
Restringiéndose al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ si es inyectiva (luego se puede definir su inversa) y es monótona estrictamente creciente.



$y = \operatorname{arc sen} x$

Dominio $= [-1,1]$; Imagen $= \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; es impar; no es periódica; es monótona estrictamente creciente; está acotada: inferiormente por $-\frac{\pi}{2}$ y superiormente por $\frac{\pi}{2}$; es inyectiva; no es suprayectiva.

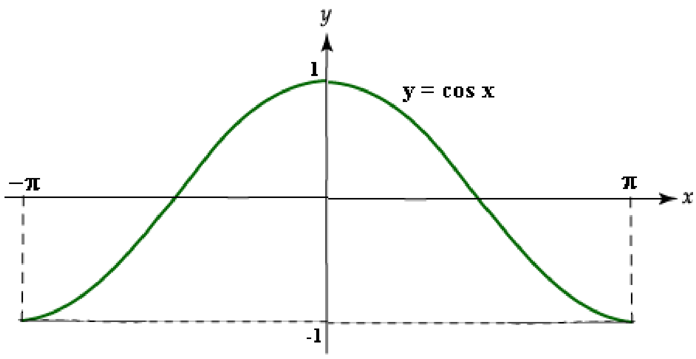




$y = \cos x$

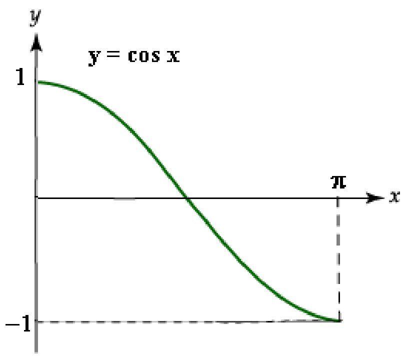
Dominio $= \mathbb{R}$; Imagen = $[-1,1]$; es par; es periódica de período 2π; no es monótona; está acotada (inferiormente por -1 y superiormente por 1); no es inyectiva; no es suprayectiva.

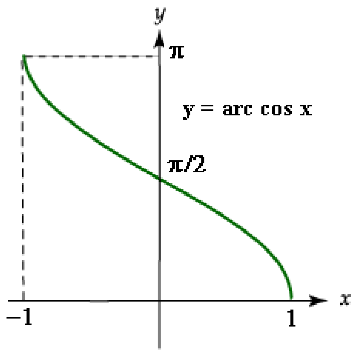
Si nos restringimos al intervalo $[0,\pi]$ si es inyectiva (luego se puede definir su inversa) y es monótona estrictamente decreciente.



$y = \arccos x$

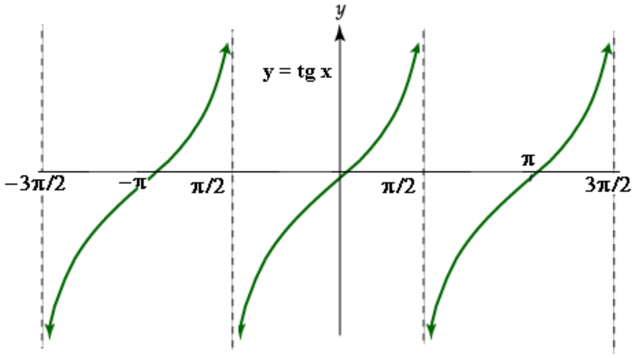
Dominio = $[-1,1]$; Imagen = $[0,\pi]$; no es ni par ni impar; no es periódica; es monótona estrictamente decreciente; está acotada (inferiormente por 0 y superiormente por π); es inyectiva; no es suprayectiva.





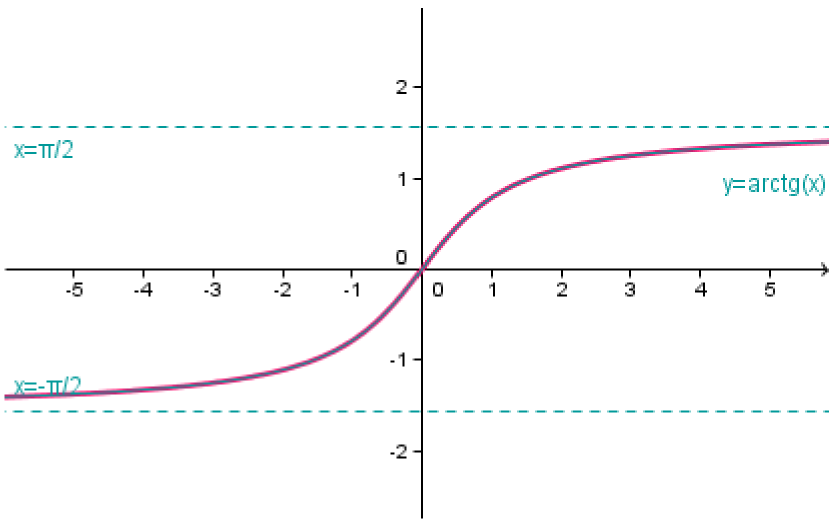
$y = \operatorname{tg} x$

Dominio $= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z} \right\}$; Imagen = $\mathbb{R}$; es impar; es periódica de período$=\pi$; no es monótona; no está acotada; no es inyectiva; es suprayectiva. Si nos restringimos al intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ si es inyectiva (luego se puede definir su inversa) y es monótona estrictamente creciente.



$y = \operatorname{arc\,tg} x$

Dominio = $\mathbb{R}$; Imagen = $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; es impar; no es periódica; es monótona estrictamente creciente; está acotada: inferiormente por $-\dfrac{\pi}{2}$ y superiormente por $\dfrac{\pi}{2}$; es inyectiva; no es suprayectiva.



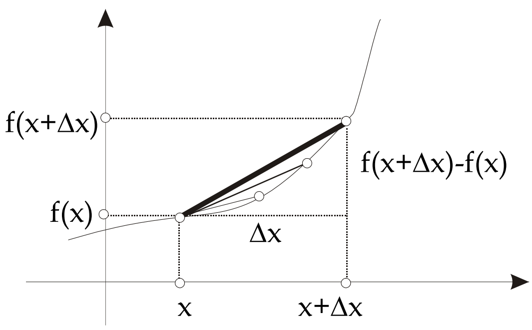
Resumen teórico

1. DERIVADA: DEFINICIÓN

La expresión

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

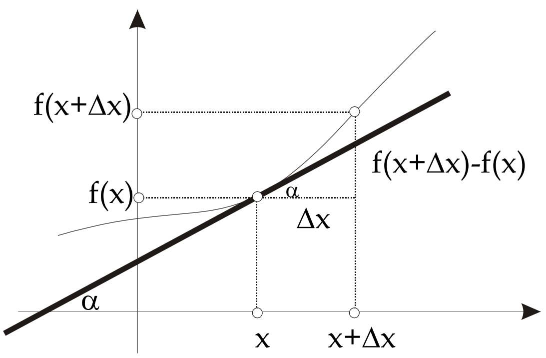
es la fórmula de la pendiente de la secante a la gráfica de la función f que une los puntos $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ y $(x, f(x))$. Se denomina *cociente incremental* de f en el punto x.



Definición (Derivada).- La derivada de una función $y=f(x)$ en un punto x es el límite del cociente incremental,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Este valor representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. Se denota por $f'(x)$ ó $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{df}{dx}$



$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

2. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Regla del producto por una constante	$\left[a\,f(x)\right]' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}$
Regla de la suma	$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$
Regla del producto	$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Regla del cociente	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena

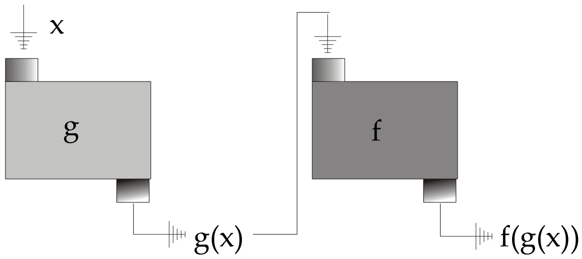
Si $y=f(u)$ es derivable en $g(x)$ y $u=g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ es derivable en x, siendo la derivada

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

que se puede expresar también con la siguiente notación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

y —— u —— x



Derivada de la función implícita

Cuando la función viene dada en forma explícita, es decir, de la forma $y=f(x)$ calcular la derivada de f se reduce a aplicar la definición o alguna de las reglas de derivación estudiadas. Sin embargo, muchas veces una función viene dada a través de una ecuación de la forma $F(x,y)=0$ en la que no es fácil, o resulta imposible, obtener explícitamente y en función de x. Este tipo de funciones reciben el nombre de *funciones implícitas de una variable*.

Definición *(Ecuación implícita)*.- Una ecuación de la forma $F(x,y)=0$ define a la variable y como función implícita de x en un dominio D si para todo x en D existe $y=f(x)$ de forma que se verifica $F(x,f(x))=0$ para todo x en D.

Para este tipo de funciones se debe proceder de la siguiente manera para obtener la derivada de y respecto de x:

1. Se derivan ambos miembros de la expresión con respecto a x, aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que y es función de x.

2. Se despeja la expresión $\dfrac{dy}{dx}$.

Por ejemplo, si se considera la función dada mediante $x^3y^2+y^8-3x-5=0$ se tendrá:

1. Derivando ambos lados de la igualdad y aplicando la regla de la cadena suponiendo que y es función de x

$$3x^2y^2+2x^3y\frac{dy}{dx}+8y^7\frac{dy}{dx}-3=0$$

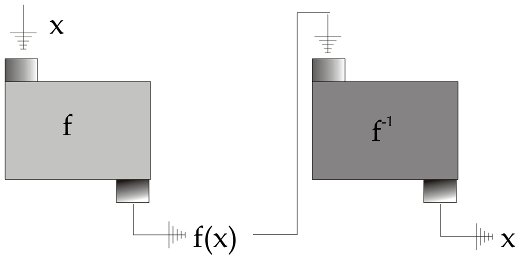
2. Despejando

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3x^2y^2}{2x^3y+8y^7}$$

Derivada de la función inversa

Si $y=f(x)$ es una aplicación inyectiva y derivable en a y además $f'(a)\neq 0$, entonces la función inversa, f^{-1}, también es derivable en $b=f(a)$, verificándose

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$



Derivada enésima

Si $y = f(x)$ es derivable en un dominio D queda definida la función derivada:

$$\begin{aligned} f': D &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

Si esta función $y = f'(x)$ a su vez es derivable se puede calcular su derivada, $y = (f')'(x)$, que recibe el nombre de derivada segunda. Se denota,

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Este proceso puede continuar y se tendría la derivada de orden n o derivada enésima que consistiría en derivar la función n veces. Si la función es $y = f(x)$ se denotará: $f^{(n}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

FÓRMULA DE LEIBNIZ (Derivada enésima de un producto).- Si f y g son derivables hasta el orden n entonces la función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable hasta el orden n y además

$$h^{(n}(x) = (f \cdot g)^{(n}(x) =$$

$$= \binom{n}{0} f(x) g^{(n}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1}(x) + \ldots + \binom{n}{n-1} f^{(n-1}(x) g'(x) + \binom{n}{n} f^{(n}(x) g(x)$$

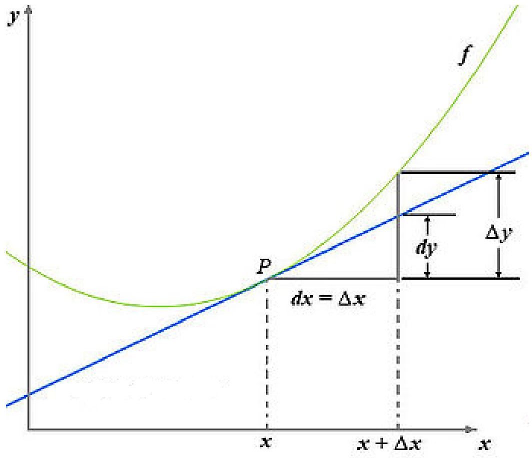
3. RECTA TANGENTE. APROXIMACIÓN LINEAL

Definición *(Diferencial).-* Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x,

- La diferencial de x es igual al incremento de x, $\Delta x = dx$

- La diferencial de y se define como $dy = f'(x)dx$

Interpretación geométrica: La diferencial de y para un incremento de x, $\Delta x = dx$, es igual al incremento de la ordenada de la recta tangente correspondiente a ese incremento de x.



Diferencial segunda

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [df'(x)]dx + f'(x)[d(dx)] =$$
$$= [f''(x)dx]dx + f'(x)d^2x = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

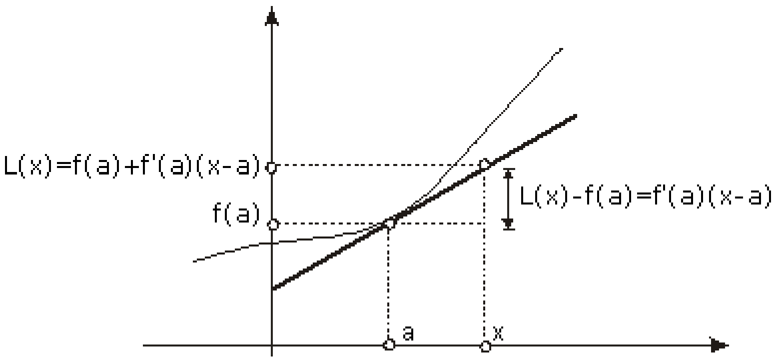
Aproximación lineal: Consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$ derivable en el punto a. Si dibujamos la tangente en el punto $(a, f(a))$ vemos que para valores x próximos al punto a, los valores que toma la ordenada de la recta tangente y la función casi coinciden. Diremos por ello que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a es una linealización (aproximación lineal) de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ tiene por pendiente $f'(a)$ se tendrá que su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

La expresión $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ se denomina *linealización* (aproximación lineal) de f en a

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$



4. POLINOMIOS DE TAYLOR

Definición *(Polinomio de Taylor)*.- Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto $x=a$. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto $x=a$ como

$$T_n\left[f(x);a\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k=$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso en que $a=0$ el *polinomio* se llama de *MacLaurin*.

Veamos algunas propiedades que nos permitirán obtener polinomios de Taylor a partir de otros conocidos

Sean f y g funciones que admiten polinomio de Taylor hasta el grado n en el punto a entonces se cumplen las propiedades siguientes:

- Linealidad: $T_n(\alpha f+\beta g;a)=\alpha T_n(f;a)+\beta T_n(g;a)$
- Derivación, integración: $\left[T_n(f;a)\right]'=T_{n-1}(f';a)$

Otras operaciones: Se puede obtener el polinomio de productos y cocientes de funciones a partir de los correspondientes a cada una de las funciones involucradas.

Definición *(Resto n-ésimo de Taylor).-* Sea f una función para la que existe $T_n\left[f(x);a\right]$. Se define el resto n-ésimo de Taylor correspondiente a la función f en el punto $x=a$, y lo escribiremos $R_n\left[f(x);a\right]$ como

$$R_n\left[f(x);a\right]=f(x)-T_n\left[f(x);a\right]$$

La expresión

$$f(x)=T_n\left[f(x);a\right]+R_n\left[f(x);a\right]$$

se llama *fórmula de Taylor* de $f(x)$ de grado n en el punto $x=a$.

En las proximidades del punto $x=a$ se verifica no sólo que el resto enésimo es pequeño (infinitésimo) sino que se hace pequeño en comparación con $(x-a)^n$. Esto se expresa en el siguiente resultado

TEOREMA DE TAYLOR: Si f es derivable n veces en el punto $x=a$ y $R_n\left[f(x);a\right]$ es su correspondiente resto de Taylor entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n\left[f(x);a\right]}{(x-a)^n}=0$$

EXPRESIONES DEL RESTO: Sea f es una función derivable $n+1$ veces en un intervalo abierto I, que contenga al punto $x=a$. Si $R_n\left[f(x);a\right]$ es el resto enésimo de Taylor correspondiente a la función f en el punto $x=a$ entonces:

(1) Resto de Cauchy

$$R_n\left[f(x);a\right]=\frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$$

siendo t un punto intermedio entre a y x.

(2) Resto de Lagrange

$$R_n\left[f(x);a\right]=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo t un punto intermedio entre a y x.

(3) Resto Integral

$$R_n\left[f(x);a\right]=\int_a^x \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

definido si la derivada $n+1$ de f es integrable en el intervalo I.

5. APLICACIONES DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR

Aproximación del valor de la función en un punto

Una de las aplicaciones de los polinomios de Taylor es la de aproximar el valor de una función en un punto por el valor que toma el polinomio de Taylor de cierto grado en un punto próximo. La acotación del resto permite además cuantificar el error cometido en la aproximación.

Cálculo de límites indeterminados

En el cálculo de límites de funciones surgen las mismas indeterminaciones que en el caso de sucesiones y se aplican las mismas técnicas para su resolución. Una de esas técnicas consiste en la comparación los órdenes de infinitud o los órdenes de magnitud de los infinitésimos que producen estas indeterminaciones.

Definición (Infinitésimo).- Una función $\varphi(x)$ es un infinitésimo para $x=a$ si tiende a cero cuando x se aproxima al punto a,

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

PROPOSICION.-

(a) La suma, diferencia y producto de infinitésimos para $x=a$ es un infinitésimo para $x=a$.

(b) El producto de un infinitésimo para $x=a$ por una función acotada en un entorno del punto a es un infinitésimo para $x=a$.

Definición (Infinitésimos del mismo orden, orden superior y orden inferior).- Se dice que

- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$ son dos infinitésimos del mismo orden para $x=a$ si

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\mu(x)}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

En este caso se escribe $\varphi(x)=O(\mu(x))$.

- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$ son equivalentes para $x=a$ si $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\mu(x)}=1$
- $\varphi(x)$ es de orden superior a $\mu(x)$ para $x=a$ si $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\mu(x)}=0$.

En este caso se escribe $\varphi(x)=o(\mu(x))$

Definición (Infinitésimos de orden p).- Decimos que un infinitésimo es de orden p para $x=a$ si $\varphi(x)=O\left((x-a)^p\right)$ es decir, si

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

PROPOSICION.- El orden de un infinitésimo para $x=a$ no varía al sumarle o restarle otro de orden superior para $x=a$.

Consideremos ahora $\varphi(x)$ un infinitésimo de orden p para $x=a$, esto significa que

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

En este caso se tiene que:

$$\varphi(x)-\lambda(x-a)^p=o\left((x-a)^p\right)\Leftrightarrow \varphi(x)=\lambda(x-a)^p+o\left((x-a)^p\right)$$

Definición (Parte principal de un infinitésimo).- Si $\varphi(x)$ un infinitésimo de orden p para $x=a$ y se cumple

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

La expresión $\lambda(x-a)^p$ se llama *parte principal* de dicho infinitésimo.

Nótese que $\varphi(x)$ es un infinitésimo equivalente a su parte principal.

PRINCIPIO DE SUSTITUCION.- Si en la expresión de un límite se sustituye un factor o divisor por su parte principal o por otro equivalente el valor del límite no se ve alterado.

IMPORTANTE: Cuando los infinitésimos aparezcan como sumandos la sustitución de un infinitésimo por otro equivalente puede conducir en general a errores

Tabla de equivalencias

(1) Si $x\to 0$ entonces $\operatorname{sen} x\approx x$

(2) Si $x\to 0$ entonces $1-\cos x\approx \dfrac{x^2}{2}$

(3) Si $x\to 0$ entonces $\operatorname{tg} x\approx x$

(4) Si $x\to 0$ entonces $\log(1+x)\approx x$

(5) Si $x\to 0$ entonces $\log(1+x^k)\approx x^k$ $\quad (k>0)$

(6) Si $x\to 0$ entonces $a^x-1\approx x\log a$

(7) Si $x\to 0$ entonces $\operatorname{arcsen} x\approx x$

(8) Si $x\to 0$ entonces $\operatorname{arctg} x\approx x$

(9) Si $x\to 0$ entonces $(1+x)^a\approx 1+ax$

(10) Si $x\to 0$ entonces $P_n(x)\approx$ término de menor grado

Definición (Infinitos).- Una función $\omega(x)$ es un infinito para $x=a$ si tiende a infinito cuando x se aproxima al punto a, es decir, si $\lim\limits_{x\to a}\omega(x)=\infty$

OBSERVACION.- Todo lo visto anteriormente para infinitésimos puede aplicarse a infinitos teniendo en cuenta que si $\omega(x)$ es un infinito para $x=a$ entonces

$$\varphi(x)=\frac{1}{\omega(x)} \text{ es un infinitésimo para } x=a$$

En particular, la sustitución de infinitos en la expresión de un límite se rige por las mismas reglas que las de los infinitésimos.

Definición (Infinitos de orden inferior, superior).- Sean $\omega(x)$ y $\tau(x)$ dos infinitos para $x=a$ se dice que:

- $\omega(x)$ es un infinito de orden inferior a $\tau(x)$ para $x=a$ si

$$\lim_{x\to a}\frac{\omega(x)}{\tau(x)}=0$$

- $\omega(x)$ es un infinito de orden superior a $\tau(x)$ para $x=a$ si

$$\lim_{x\to a}\frac{\omega(x)}{\tau(x)}=\infty$$

- $\omega(x)$ es un infinito del mismo orden que $\tau(x)$ para $x=a$ si

$$\lim_{x\to a}\frac{\omega(x)}{\tau(x)}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

En el caso particular de que $\lambda=1$ entonces se dice que son equivalentes.

Definición (Infinito de orden p).- Decimos que un infinito $\omega(x)$ para $x=a$ es de orden p si

$$\lim_{x\to a}\frac{\omega(x)}{\dfrac{1}{(x-a)^p}}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

A continuación, se dan en la tabla los denominados *órdenes fundamentales de infinitud* para x tendiendo a infinito. Según se avance de izquierda a derecha en las columnas los órdenes van decreciendo.

Potencial - Exponencial	Exponencial	Potencial	Logaritmo
x^{ax} $a>0$	b^x $b>1$	x^c $c>0$	$(\log_q x)^p$ $q>1\ \ p>0$

DETERMINACIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DE UN INFINITÉSIMO APLICANDO POLINOMIOS DE TAYLOR: Sea $y=f(x)$ una función que es un infinitésimo para $x=a$ con todas sus derivadas nulas hasta el orden $k-1$ en el punto a y cumpliendo $f^{(k}(a)\neq 0$.

Utilizando la fórmula de Taylor se tendrá:

$$f(x)=\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^k\right)$$

De esta expresión se deduce que el orden del infinitésimo $y=f(x)$ para $x=a$ es k y su parte principal es $\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Estudio local de una función

Definición (Extremo relativo).- Sea $y=f(x)$ una función real definida sobre un dominio D. Decimos que f tiene

- un *mínimo relativo* en un punto $a\in D$ si existe un intervalo $(a-r,a+r)$ contenido en D de forma que $f(x)>f(a)$ para $x\in(a-r,a+r)$, $x\neq a$.
- un *máximo relativo* en un punto $a\in D$ si existe un intervalo $(a-r,a+r)$ contenido en D de forma que $f(x)<f(a)$ para $x\in(a-r,a+r)$, $x\neq a$.

Si un punto es mínimo o máximo relativo se dice que es un extremo relativo o local.

Definición (Extremo absoluto).- Sea $y=f(x)$ una función real definida sobre un dominio D. Decimos que f alcanza

- su valor *mínimo absoluto* en un punto $a \in D$ si $f(x) > f(a)$ para $x \in D$, $x \neq a$.
- su valor *máximo absoluto* en un punto $a \in D$ si $f(x) < f(a)$ para $x \in D$, $x \neq a$.

Si un punto es mínimo o máximo absoluto se dice que es un extremo absoluto o global.

PROPOSICIÓN.- Consideremos una función $y = f(x)$ con derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto a entonces se podrá escribir

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1}(a) = 0$, entonces

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$ entonces en el punto a la función tiene un mínimo local.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$ entonces en el punto a la función tiene un máximo local.
- Si n es impar en el punto a hay un punto de inflexión.

Cálculo de derivadas

Calcular la derivada primera de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt[5]{3x^2}$

$$y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$$

2. $y = 5^{3x-4}$

$$\log y = (3x-4)\log 5 \ \rightarrow\ \frac{1}{y}y' = 3\log 5 \ \rightarrow\ y' = 5^{3x-4}(3\log 5)$$

3. $y = \log(x^2 + 7x)$

$$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$$

4. $y = x^2 \cos x$

$$y' = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$$

5. $y = \cos 3x^2$

$$y' = -6x \operatorname{sen} 3x^2$$

6. $y = \operatorname{tg} 7x$

$$y' = \frac{7}{\cos^2 7x}$$

También se puede resolver aplicando la derivada del cociente a la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x}$.

7. $y = \dfrac{2x^2}{x^3 - 1}$

$$y' = \frac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^4 - 4x}{(x^3-1)^2}$$

8. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}}$ (Sugerencia: utilizar derivación logarítmica)

Se toman logaritmos, $\log y = \frac{1}{3}\log(1+\operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{3}\log(1-\operatorname{sen} 2x)$

Se deriva,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\frac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{3}\frac{2\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x} = \frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{4}{3\cos 2x}$$

$$y' = \frac{4}{3\cos 2x}\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}}$$

9. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

10. $y=\dfrac{1}{\log\left(x^{1/2}+2x\right)}$

$$y=\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-1} \qquad y'=-\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-2}\frac{1}{x^{1/2}+2x}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+2\right)$$

$$y'=-\frac{1+4\sqrt{x}}{2\left(x+2x\sqrt{x}\right)\left[l\,\text{og}\left(\sqrt{x}+2x\right)\right]^{2}}$$