

## GUÍA DE EJERCICIOS SEMEJANZA

### Propósitos:

- I. Reconocer figuras semejantes.
- II. Demostrar aplicando criterios de semejanza de triángulos.
- III. Trabajar con homotecia.
- IV. Aplicaciones de semejanza.

### **I. SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS.**

**Definición:** dos polígonos convexos son semejantes si y solamente si, existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices, tal que:

- Los ángulos correspondientes tienen igual medida.
- Las razones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales.

### Ejemplo

1. Determinar si las figuras dadas son o no semejantes:

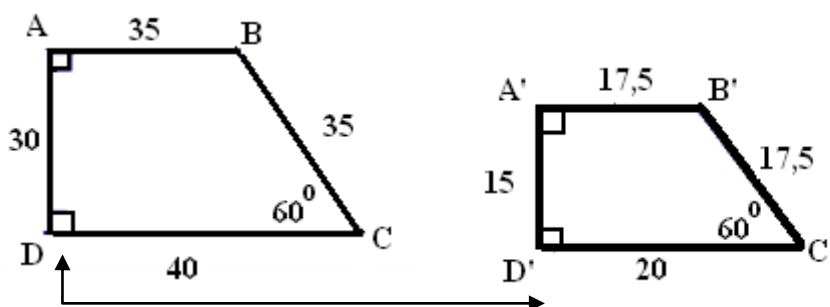
ABCD y A'B'C'D' son trapecios semejantes ya que: los ángulos interiores correspondientes tienen igual medida y las razones entre sus lados homólogos son iguales.

$$\frac{AB}{A'B'} = 2$$

$$\frac{BC}{B'C'} = 2$$

$$\frac{CD}{C'D'} = 2$$

$$\frac{DA}{D'A'} = 2$$



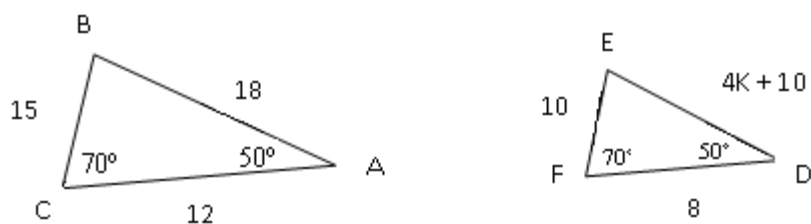
Ángulos correspondientes iguales

Calcular el perímetro ABCD y A'B'C'D', ¿en qué razón se encuentran?

### **EJERCICIOS**

1. Los lados de un triángulo miden 24 m., 18m. y 36 m., respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12m., 16 m. y 24 m., respectivamente. Determina si se cumple la segunda condición de semejanza.
2. Los lados de un triángulo miden 36 m., 42 m. y 54 m., respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m., hallar los otros dos lados de este triángulo.
3. Dos cuadriláteros tiene, cada uno, sus cuatro lados iguales y la razón entre los lados respectivos es 5:2 . ¿Es suficiente para que sean semejantes? Haz un dibujo y justifica tu respuesta.
4. Dos cuadriláteros tiene cada uno sus cuatro ángulos interiores iguales. ¿Son necesariamente semejantes?. Justifica tu respuesta y haz el dibujo correspondiente.

5. ¿Qué valor debe tener  $k$  para que el  $\Delta ABC$  sea semejante al  $\Delta DEF$  ?



- Los lados de un triángulo miden 2 cm., 1,5 cm. y 3 cm. Construye, sobre un segmento de 2,5 cm. homólogo del primer lado de este triángulo, un triángulo semejante a aquel.
- En un triángulo  $ABC$ ,  $a = 6$  cm,  $b = 8$  cm y  $c = 10$  cm. Calcula los lados de un triángulo  $A'B'C'$ , semejante al triángulo  $ABC$ , de perímetro igual a 36 cm
- En un polígono  $ABCDEF$ , de perímetro 280 cm, el lado  $AB$  mide 20 cm. Determina el perímetro  $A'B'C'D'E'F'$ , semejante al primero, si  $A'B' = 8$  cm
- Los lados de un cuadrilátero  $ABCD$  miden  $AB = 6$  cm,  $BC = 9$  cm,  $CD = 10$  cm y  $AD = 12$  cm. Calcula los lados de otro cuadrilátero  $A'B'C'D'$ , semejante a  $ABCD$ , si  $A'B' = 8$  cm

## II. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

Es posible concluir semejanza entre triángulos sin considerar todos sus ángulos congruentes y todos sus lados homólogos proporcionales, basándonos en los criterios de semejanza.

- Criterio A.A. (ángulo, ángulo) : cuando tienen dos pares de ángulos congruentes.
- Criterio L.L.L. : cuando tienen tres pares de lados respectivamente proporcionales.
- Criterio L.A.L. : cuando tienen dos pares de lados proporcionales y congruentes los ángulos comprendidos entre estos lados.
- Criterio L.L.A.: cuando tienen dos lados homólogos respectivamente proporcionales y los ángulos opuestos al lado mayor, congruentes.

### EJEMPLOS:

1. Dado que  $\overline{LK} \parallel \overline{CB}$ . Demostrar que:

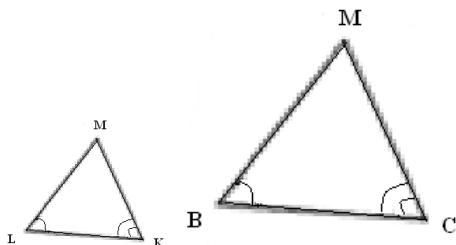
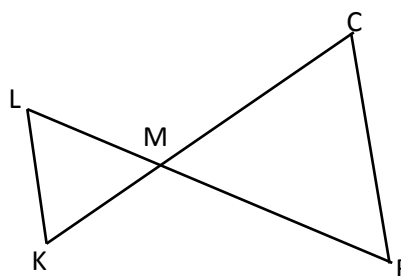
$$\Delta LKM \sim \Delta BCM$$

Hipótesis:  $\overline{LK} \parallel \overline{CB}$

Tesis:  $\Delta LKM \sim \Delta BCM$

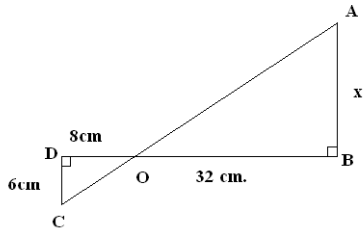
Demostración:

- $\sphericalangle KLM \cong \sphericalangle CBM$ , y  $\sphericalangle LKM \cong \sphericalangle BCM$  por ser alternos internos entre paralelas según hipótesis.
- Por criterio A.A. se cumple que  $\Delta LKM \sim \Delta BCM$



Observe la correspondencia entre los vértices de los triángulos.

2. Determinar el valor de  $x$ , sabiendo que los triángulos son semejantes:



Solución: Observe que ángulo O es común.  
Ángulo D y B son rectos, entonces:

$$\triangle ODC \sim \triangle OBA$$

$$\text{Luego } \frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{8}{32} \rightarrow x = 24 \text{ cm}$$

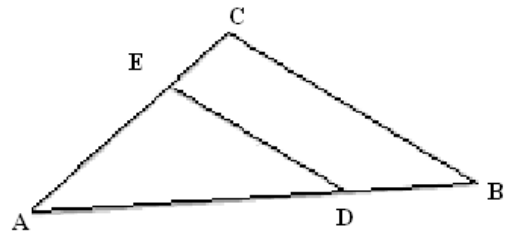
### EJERCICIOS :

1. Demuestre que toda paralela a un lado de un triángulo determina un nuevo triángulo semejante al primero.

H:  $\triangle ABC$  cualquiera.

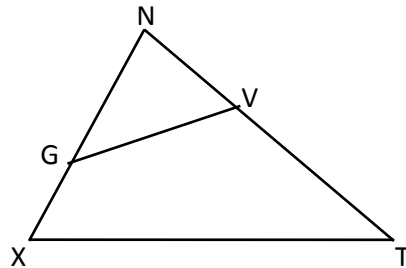
$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

T:  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$



2. Dado que  $\angle T = \angle NGV$

Demostrar que  $\triangle NGV \sim \triangle NTX$

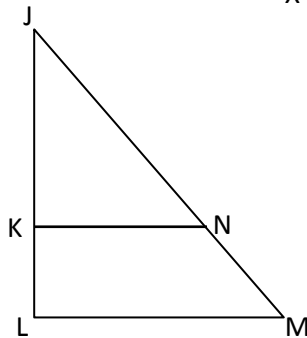


3. Según la fig.

$$\overline{NK} \perp \overline{JL} ; \overline{ML} \perp \overline{JL}$$

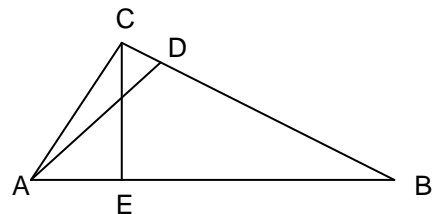
$$\overline{NK} = 4 , \overline{ML} = 6 ,$$

$$\overline{JM} = 15 , \overline{JN} = ?$$



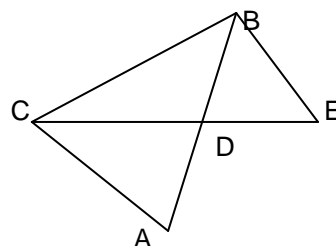
4. En la figura siguiente,  $AD \perp BC$  y  $CE \perp AB$ .

Demostrar que  $CE \cdot AB = AD \cdot BC$



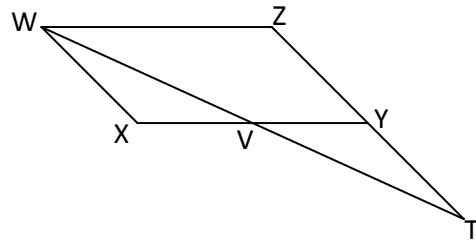
5. CD bisectriz del ángulo ACB y  $\angle ABE \cong \angle ACD$ .

Demostrar que  $AD \cdot BC = CD \cdot BE$ .

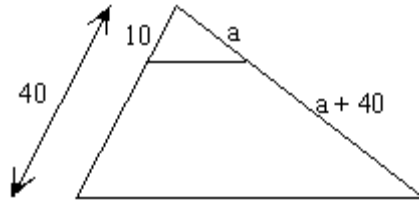


6. Hipótesis :  $\overline{WZ} = \overline{XY}$  ;  $\overline{WX} = \overline{ZY}$

Tesis :  $\triangle WTZ \sim \triangle VWX$

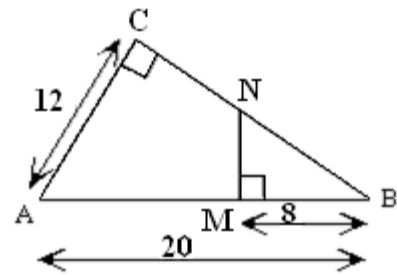


7. Hallar "a"



8. Demuestra que los triángulos BCA y BMN son semejantes.

Calcula el área del cuadrilátero AMNC.

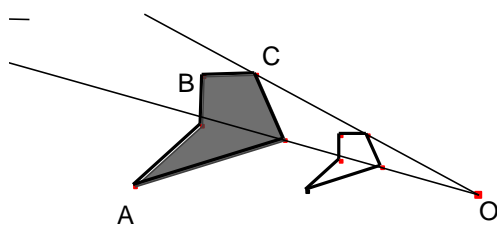


### III. HOMOTECIA

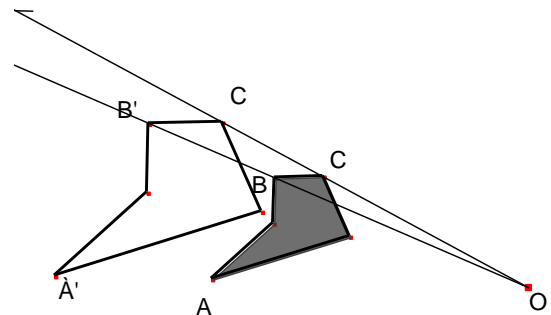
Podemos obtener figuras semejantes usando homotecia, teniendo presente tres elementos: la figura original, el centro de la homotecia y la razón de homotecia.

Se llama homotecia de centro O y razón k a la transformación que lleva a cada punto P en un punto P', estando P, O y P' en la misma recta, tal que  $OP' = k \cdot OP$

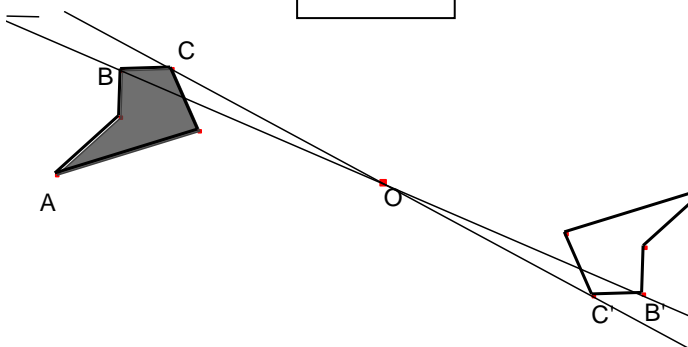
En los siguientes ejemplos, la figura original es el polígono de color, el centro de homotecia es el punto "O", y la razón de homotecia es :



K=0,5



K=1,5



K= -1

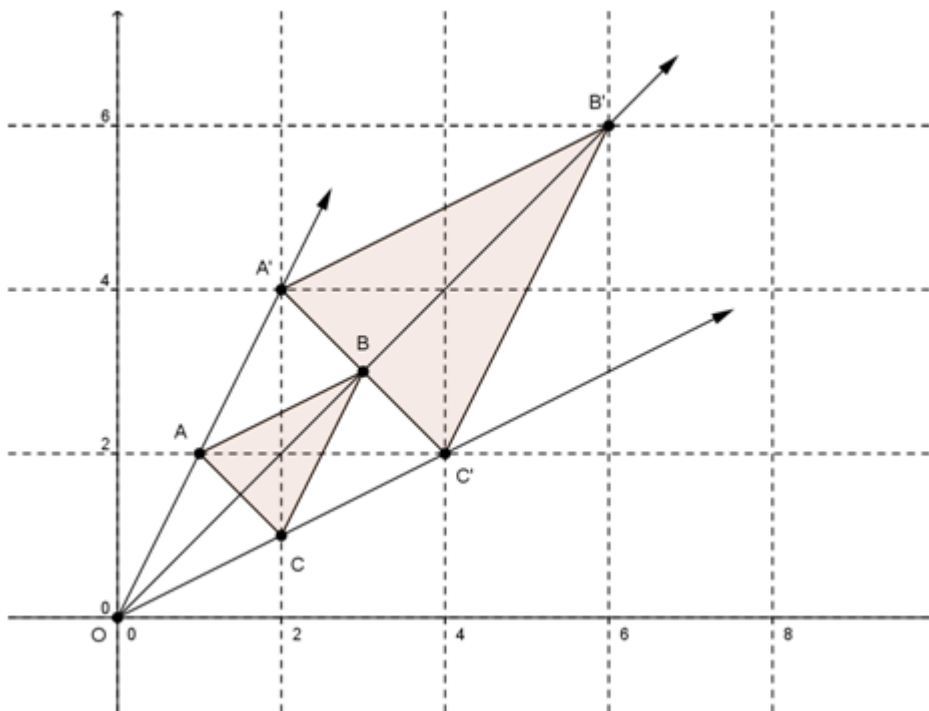
### Ejemplo :

Aplicar al triángulo de coordenadas A(1,2), B(3,3) y C(2,1), una homotecia con centro en el origen y razón 2.

Dibujamos el triángulo ABC, trazamos un vector con origen en O y que pase por el punto A. Con un compás mide la distancia OA, luego traza un arco con esta medida del compás y centro en A, se crea el punto A'. Repite el procedimiento para los puntos B y C.

Puedes medir y comprobar que las distancias AB y A'B' corresponde a  $A'B' = 2 \cdot AB$ , o puedes decir que :  $\frac{A'B'}{AB} = 2$ . Repite para los otros lados del triángulo.

Por criterio de semejanza LLL los triángulos son semejantes.



Observa que en el plano Cartesiano, la homotecia de centro en el origen y razón k lleva todo punto P(x,y) en el punto P'(kx, ky)

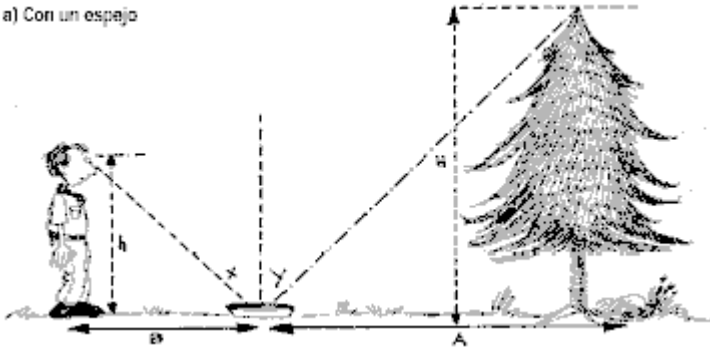
### EJERCICIOS

- Sean A=(0,2); B=(2,1) y C(1,4) tres puntos del plano. Hallar las coordenadas del triángulo homólogo de ABC mediante la homotecia:
  - de centro (4,4) y razón -2.
  - de centro (1,3) y razón 3.
  - ¿Cuál es el centro y la razón de la homotecia que transforma el anterior triángulo en el A'B'C'; con A'=(1,1); B'=(5,-1) y C'=(5,6)?
- Revise las páginas 171 a 177 de su texto de estudio “Matemática 2º Educación Media” . Santillana. Año 2011.

#### IV. DISTANCIAS O ALTURAS APLICANDO SEMEJANZA

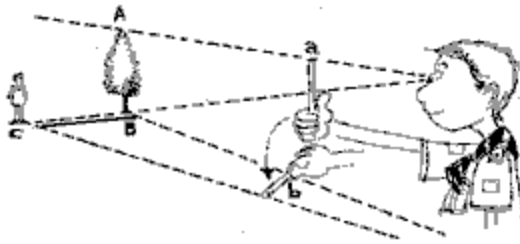
Los dibujos siguientes ilustran diversas maneras, utilizadas habitualmente por las guías y scouts, para estimar alturas y distancias, recurriendo a la semejanza de triángulos. (Fuente: Programa de estudio NM2)

a) Con un espejo



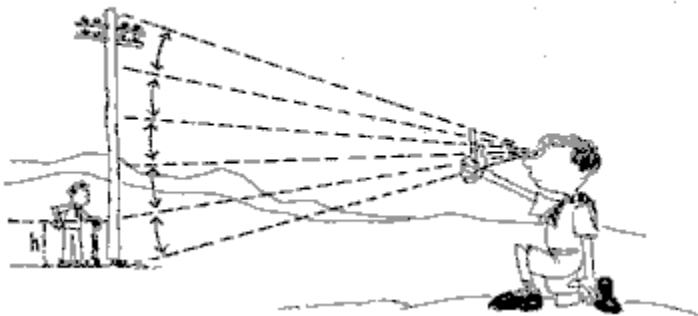
En este caso, es necesario que la persona pueda observar el extremo superior del árbol reflejado en el espejo.

b) La del leñador



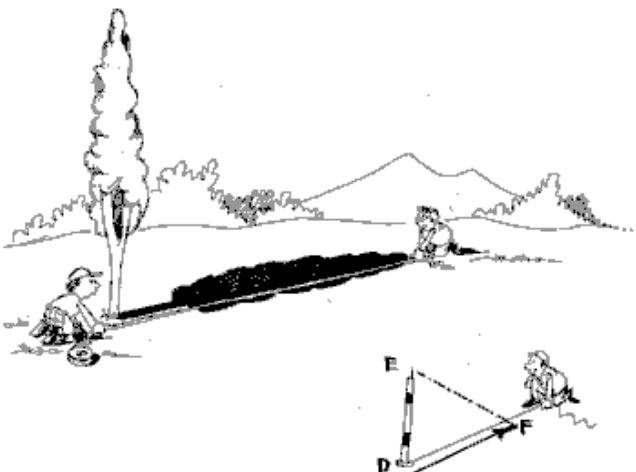
Mirando con un solo ojo, se cubre la altura del árbol con una varita o un lápiz que se sostiene en la mano. Girar la mano en  $90^\circ$  y que una persona se ubique en el punto que corresponde al extremo libre de la varita.

c) ¿Cuántas veces cabe?



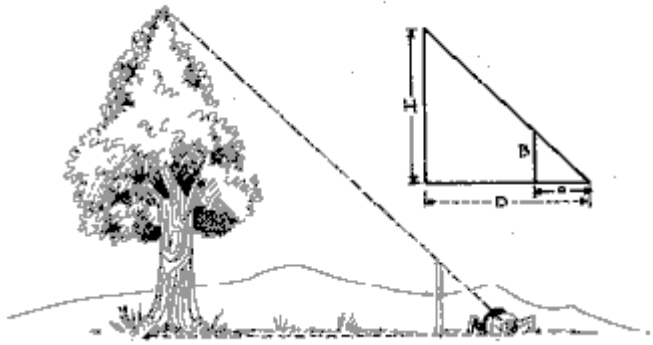
Colocar al pie de un poste una persona o vara de altura conocida. Ubicarse a una distancia adecuada, mirando con un solo ojo y recurriendo a un lápiz o varita que se sostiene con la mano, cubrir la persona y contar cuántas veces cabe en la altura de dicho poste.

d) La de las sombras



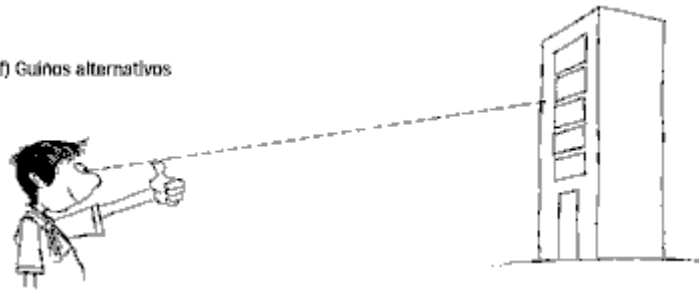
Para una misma hora la razón entre la longitud de un objeto y de su sombra es la misma.

e) Haciendo coincidir los extremos



Es necesario ubicarse a una distancia tal que mirando con un solo ojo queden alineados el extremo superior del árbol y el de la vara de longitud conocida.

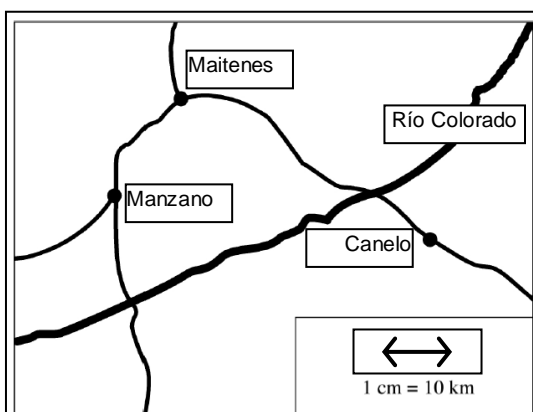
f) Guños alternativos



Con el brazo estirado, utilizar como mira el dedo pulgar para ubicar dos puntos sobre el edificio, mirando primero con un ojo y después con el otro. Estimar la distancia entre ambos puntos, multiplicarla por 10 para obtener una estimación de la distancia que los separa del edificio. El factor 10 deriva de la razón entre la medida aproximada de la distancia entre ambos ojos (6 cm) y la longitud de los brazos (60 cm) un promedio aproximado y cómodo para hacer los cálculos.

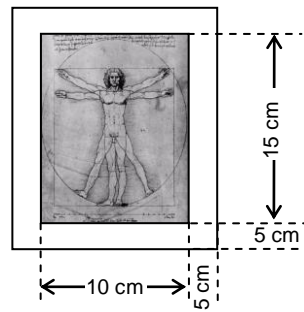
## APLICACIONES DE SEMEJANZA

1. Cuenta la historia que el gran matemático griego Tales de Mileto midió la altura de las pirámides de Egipto usando un método muy simple: comparó la sombra de su bastón con la sombra de la pirámide. Si su bastón medía 1 metro y proyectaba una sombra de 50 cm. ¿cuál es la altura de una pirámide cuya sombra mide 45 metros? Explica tus cálculos usando un diagrama.
2. Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm. por 2,5 cm. Se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm. ¿Cuánto medirá el lado menor?
3. Un árbol de 3 metros de alto a una cierta hora genera una sombra de 1,8 metros de largo. ¿Cuánto medirá la sombra de una persona de 2 metros de alto a la misma hora?.
4. En un mapa a escala 1:100.000, la distancia entre dos ciudades es 24 cm. Determina la distancia real en Km. entre ambas ciudades
5. En el mapa, un cm representa 10 Km en la realidad.

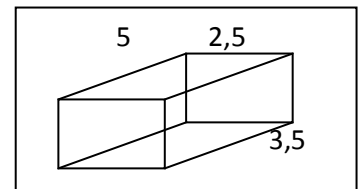


En la realidad, ¿qué distancia aproximada hay entre Manzano y Canelo?

6. Una fotografía rectangular de 10 cm x 15 cm se enmarca dejando una franja de 5 cm de ancho por todo el borde, como muestra la figura (NO está a escala). ¿Son semejantes los rectángulos que se forman al interior y al exterior? Explica

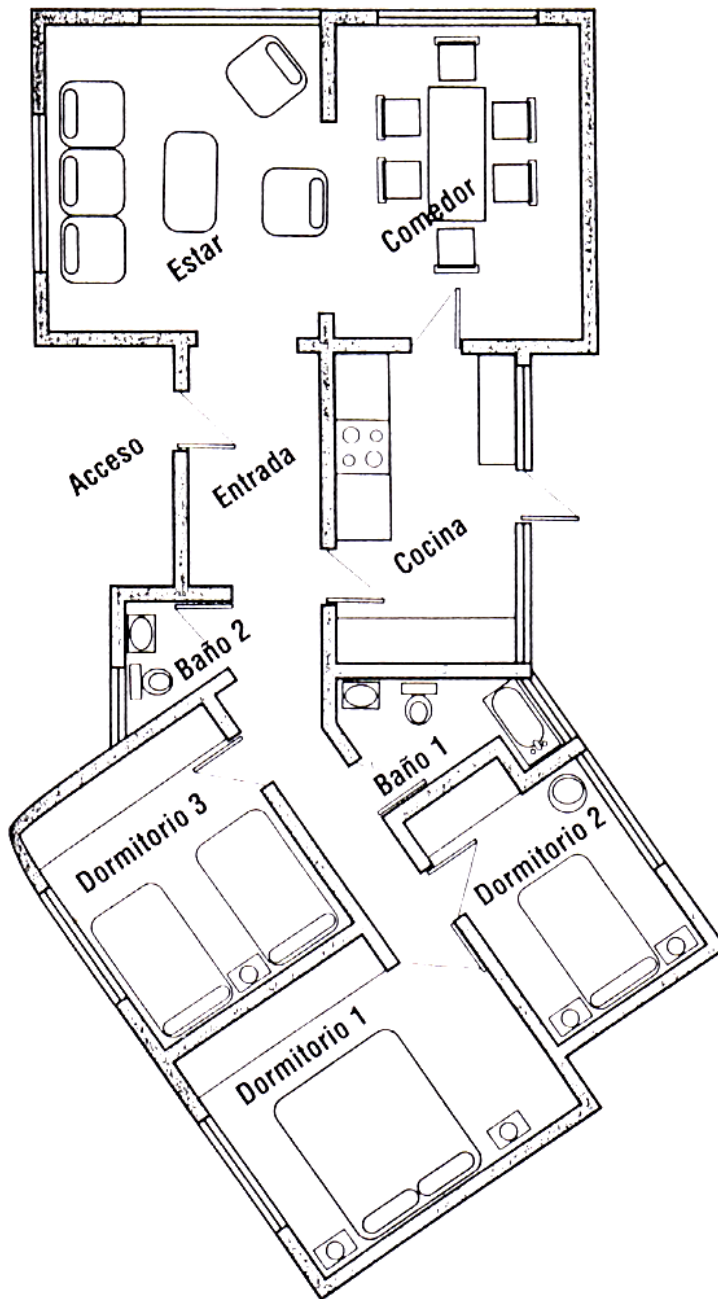


7. En un plano de una casa a escala 1:50, el comedor mide 12 cm. por 15 cm. Determina las dimensiones reales del comedor.
8. Una fotografía de ancho 6,5 cm y largo 10,5 cm se amplía a un ancho de 13 cm. ¿Cuál será el largo? ¿Cuántas veces se amplió el área?
9. Este prisma es la maqueta de un contenedor, las longitudes (en cm) están en proporción 1:200. ¿En qué proporción estará el volumen? Hallar las longitudes reales del contenedor. Hallar los volúmenes de la maqueta y del contenedor.



10. El volumen de un tarro de leche es de  $500 \text{ cm}^3$ . Se aumenta el diámetro y la altura en 1,5 veces. Calcular el volumen del nuevo tarro. Nota: la relación entre el volumen de dos cuerpos semejantes es el cubo de la razón de semejanza.
11. Se midió un terreno con una cinta métrica trucada de 50 m, dando un área de 90 Ha. Posteriormente, el comprador comprueba que la medida real de la cinta era de 49 m. ¿Será necesario volver a medir el terreno?. Si el precio de la Ha era de \$400.000, ¿en cuánto se pretendía engañar al comprador?
12. Los arquitectos usan sus planos para calcular los materiales necesarios para cubrir pisos de cocinas, baños, dormitorios o estares. Mide con tu regla este plano y responde:
- ¿Cuántos metros cuadrados de material se necesitan para cubrir el piso del estar y del comedor?
  - Calcula el área real del piso de cada dormitorio. Si al medir cometes un error de 5 mm. ¿cuánto es el error real?
  - ¿Cuántos cerámicos de 0,25 cm x 0,25 cm se necesitan para cubrir el piso de la cocina?
  - ¿Cuál es el largo real de la ventana del dormitorio matrimonial?





ESCALA 1: 100

**Soluciones:**

| I semejanza de figuras planas |   |
|-------------------------------|---|
| 1                             | Si  |
| 2                             | 36 y 28 cm.                                   |
| 3                             | No, podría tratarse de un rombo o un cuadrado |
| 5                             | $K = 1/2$                                     |
| 7                             | $a' = 9$ ; $b' = 12$ ; $c' = 15$              |
| 8                             | $P' = 112$ cm.                                |

| III Homotecia |                                       |
|---------------|---------------------------------------|
| i             | $A'(12,8)$ ; $B'(8,10)$ ; $C'(10,4)$  |
| ii            | $A'(-2,0)$ ; $B'(4,-3)$ ; $C'(1,6)$ . |
| iii           | (                                     |

| IV Aplicaciones de semejanza |  |
|------------------------------|--|
| 1                            | 90 m.                                      |
| 2                            | 10 cm.                                     |
| 3                            | 1,2 m.                                     |
| 4                            | 24 km.                                     |
| 10                           | $1687,5 \text{ cm}^3$                      |
| 8                            | No, el terreno mide en realidad 86,436 Ha. |

| II semejanza de triángulos |           |
|----------------------------|-----------|
| 3                          | $JN = 10$ |
| 7                          | $a = 20$  |
| 8                          | 72        |