Variables Aleatorias: ¿Continuas o Discretas?

Horacio González Duhart

Todas aquellas personas que ya pasaron un primer curso de probabilidad están familiarizadas con el término de variable aleatoria. No sólo en carreras como Matemáticas, Actuaría, Ingeniería, etc., sino también en carreras como Economía, Psicología y Administración, este término junto con otros de corte estadístico, son muy usados.

Seguramente en su primer curso de probabilidad les habrán dicho, como me lo dijeron a mí, que las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas. Incluso llegamos a ver variables aleatorias que tienen nombre propio distinguiéndolas dependiendo de su función de masa de probabilidades (fmp para las discretas) y su función de densidad (fdd para las continuas).

Uno de los ejemplos más sencillos dentro de las variables aleatorias discretas es la Bernoulli con parámetro $p \in (0,1)$cuya fmp es:

$$X \sim Ber(p) \Rightarrow f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \mathrm{I}_{\{0,1\}}(x)$$

De la misma forma, un ejemplo de variable aleatoria continua es la Uniforme en el intervalo *(a,b)* donde $a, b \in R$ y cuya fdd está dada por:

$$Y \sim (a,b) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{b-a} \mathrm{I}_{(a,b)}(y)$$

Hasta aquí todo va muy bien, ¿pero éstas son las únicas variables aleatorias? Para que vean que este artículo no es tan sólo una curiosidad teórica a la que se le da la vuelta en los cursos de probabilidad, pondremos el siguiente ejemplo[1] "muy actuarial":

Supongamos que el ITAM, preocupado por su inversión multimillonaria de su nueva biblioteca, la asegura en caso de terremoto. Afortunadamente, la probabilidad de que ocurra un terremoto es muy baja, pues es tan sólo de 0.3. Pero en caso de ocurrir el siniestro, el ITAM podría sufrir una pérdida cualquiera (digamos uniforme) entre \$0 y el valor total de la biblioteca (digamos \$10 000 000). Definamos a la variable Z como el monto equivalente al daño de la biblioteca (haya o no siniestro).

[1] La probabilidad de temblor y el monto de la biblioteca son puestos aquí con fines meramente didácticos, ninguna investigación se realizó para obtenerlos.

reloj o perfecta sincronía

Esta nueva variable que acabamos de definir, ¿es continua o es discreta? ¿cuál es su fmp? ¿cuál es su fdd?

Claramente podemos ver a nuestra variable aleatoria como el siguiente producto:

$$
\begin{aligned}
&Z = XY \\
&X \sim Ber(0.3) \\
&Y \sim U(0,10000000)
\end{aligned}
$$

La respuesta es que Z no es continua ni es discreta y no tiene fmp ni fdd. ¿Entonces qué tiene?

Lo que toda variable aleatoria tiene por el simple hecho de ser variable aleatoria[2] es su función de distribución (Fdd) y esta se define así:

$$
\begin{aligned}
&F_Z : R \to [0,1] \\
&F_Z(t) = P(Z \le t)
\end{aligned}
$$

Y son ya conocidas por todos nosotros sus propiedades:

1. $0 \le F_Z(t) \le 1 \quad \forall t \in R$
2. $x < y \Rightarrow F_Z(x) \le F_Z(y) \quad \forall x, y \in R$
3. $\lim_{t \to -\infty} F_Z(t) = 0 \qquad \lim_{t \to \infty} F_Z(t) = 1$
4. $\lim_{h \to 0^+} F_Z(t+h) = F_Z(t) \quad \forall t \in R$

De hecho, podemos decir que si una función satisface estas cuatro propiedades, entonces existe una única[3] variable aleatoria para la cual esta es su función de distribución. Entonces para hablar de variables aleatorias, podemos fijarnos solamente en sus funciones de distribución.

[2] Las variables aleatorias por definición son funciones medibles sobre el σ- álgebra de Borel.
[3] Puede haber varias variables aleatorias estrictamente distintas con la misma función de distribución, pero se dice que son iguales casi seguramente (o casi dondequiera en el términos de medidas en general)

Denotemos así: $\Im = \{F : R \rightarrow [0,1] \mid F \text{ es una Fdd}\}$ al conjunto de todas las funciones de distribución. Dejo como ejercicio al lector probar que éste es un conjunto convexo.

Esto quiere decir, que $\alpha F + (1-\alpha)G \in \Im \quad \forall F, G \in \Im \quad \forall \alpha \in [0,1]$.

Lo interesante de esto es que no importa si combinamos una función continua con una función discreta (escalonada). Lo que obtendremos es una Fdd que no es continua y que tampoco será escalonada. Y más sorprendente aún es que cualquier Fdd se puede descomponer (¿de manera única?) en la combinación convexa de dos Fdd: una continua y la otra discreta.

La demostración de este hecho nos dice la manera de encontrar "la" descomposición:

Dada $H \in \Im$ denotaremos al conjunto de discontinuidades de la función como

$$\Delta = \left\{ t \in R \mid \lim_{h \to 0^-} H(t+h) < H(t) \right\}$$

Entonces, claramente, H es continua sí y sólo sí $\Delta = \Phi$. Si el conjunto de discontinuidades es no vacío, se tiene que es a lo más infinito numerable (¿porqué?[4]) y lo podemos indexar de la siguiente forma:

Si Z es la variable aleatoria cuya Fdd es H, entonces podemos calcular la probabilidad de que la variable caiga en el conjunto de discontinuidades:

$$P(Z \in \Delta) = \sum_{t \in \Delta} P(Z = t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[H(t_n) - \lim_{h \to 0^-} H(t_n + h) \right]$$

Aquí observamos que la función será escalonada sí y sólo sí $P(Z \in \Delta) = 1$. En cualquier otro caso, la Fdd no será continua ni discreta. Entonces definimos las siguientes funciones:

[4] Demostrar que una función acotada tiene un conjunto a lo más infinito numerable es un ejercicio típico de análisis matemático y por eso no pondré la demostración.

$$
\begin{aligned}
G(t) &= P(Z \le t \mid Z \in \Delta) = \frac{\sum_{t_n \le t} P(Z = t_n)}{P(Z \in \Delta)} = \frac{\sum_{t_n \le t} \left[H(t_n) - \lim_{h \to 0^-} H(t_n + h) \right]}{P(Z \in \Delta)} \\
F(t) &= P(Z \le t \mid Z \notin \Delta) = \frac{H(t) - P(Z \in \Delta) G(t)}{1 - P(Z \in \Delta)} \\
\Rightarrow H &= [1 - P(Z \in \Delta)] F + P(Z \in \Delta) G
\end{aligned}
$$

De cierta manera es intuitivo ver que ambas funciones son Fdd pues lo único que se está haciendo es condicionar a la función original, es un pequeño cambio de la medida original. De la misma forma, debe ser claro que *G* es discreta y *F* es continua; sin embargo una demostración formal me tomaría mucho más espacio.

Hay muchas otras "cosas raras" que se suelen evitar en la mayoría de los cursos de probabilidad como "las míticas condiciones de regularidad[5]" o ¿cuándo las variables aleatorias tienen fdd? Este tipo de preguntas entre otras como generalizaciones de la probabilidad, diversos tipos de convergencia, ¿qué es realmente una variable aleatoria? se contestan llevando un curso de Teoría de la Medida, que aunque es una materia eminentemente teórica[6], facilita la comprensión de muchos conceptos de otras tantas materias como probabilidad, estadística, procesos estocásticos e incluso análisis matemático.

Por último, recomiendo, para aquellos que sientan que los cursos de probabilidad o análisis les quedan chicos, llevar este curso que les va a quedar justo a la medida.

[5] En estadística se "abusa" del "hecho" de que se pueden intercambiar las operaciones de integración y derivación justificándose en unas ciertas pero "míticas condiciones de regularidad".

[6] La materia podría incluso llamarse Análisis Matemático 3 pero en mi opinión, una persona no puede llamarse a sí misma probabilista sin haber cursado Teoría de la Medida.