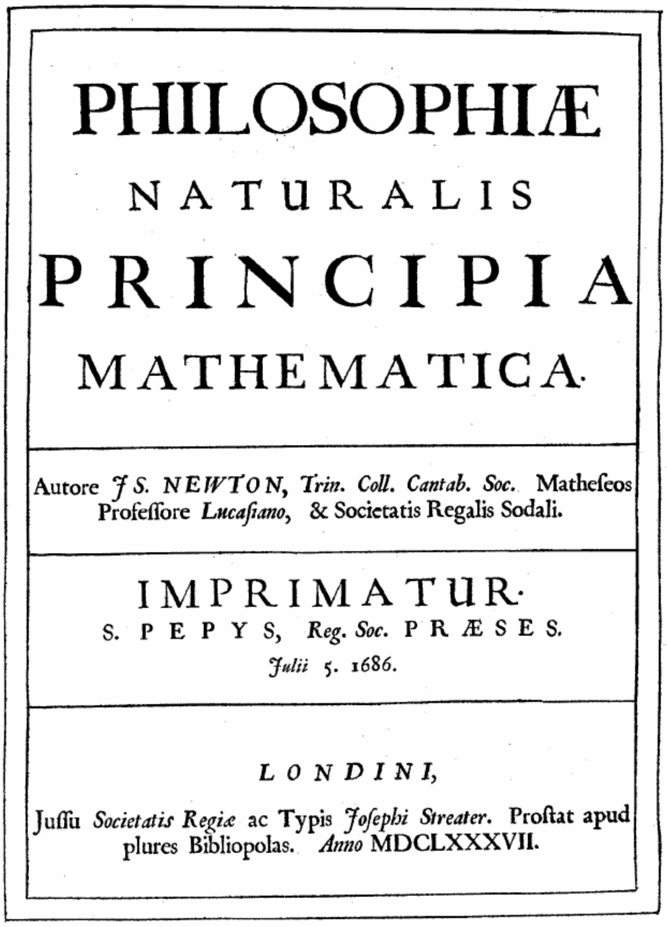
Guía del examen extraordinario de Calculo I

Academia de Matemáticas, CCH-Sur

Octubre 2005



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Guía para el examen extraordinario de Cálculo I

Como utilizar esta guía

Amigo lector, este trabajo que tienes en tus manos lo hemos realizado con el deseo de que te ayude a aprobar el examen extraordinario, los autores se sentirán altamente recompensados en su labor educativa al saber que lo has aprovechado y que te ha sido de utilidad. Por tu parte el esfuerzo realizado te acercará a tu siguiente meta: tus estudios de licenciatura.

Esta guía se compone de un propósito(s) y tres secciones. Al inicio de cada unidad encontrarás el propósito(s) de esta, con respecto a las secciones en la primera se trata de los aprendizajes a lograr por tu esfuerzo, a continuación se hace énfasis en las estrategias de aprendizaje y finalmente las actividades de aprendizaje con sus respuestas correspondientes para que puedas medir tu avance.

Un punto importante para el mejor aprovechamiento de ésta guía es que te consigas al menos un libro de Cálculo, la referencia la encontrarás en la bibliografía, y que éste sea tu principal apoyo, Esta guía son sólo lineamientos generales sobre los temas.

Por último, recuerda que en la Academia de Matemáticas (Edificio F, planta alta) tenemos horas de asesorías para resolver tus dudas, por favor visítanos.

Atentamente

Prof. Ma. Eugenia León C.
Prof. Ma. de Jesús Márquez S.
Prof. Gilberto Fuentes R.
Prof. Helios Becerril M.
Prof. José Chacón C.
Revisó Prof. Daniel Flores Ibarra

Octubre de 2005, Academia de Matemáticas CCH-Sur

UNIDAD 1. Procesos infinitos y la noción de Límite

Propósitos:

Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Utiliza procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.
- Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: material concreto, diagramas, gráficas, tablas o explicaciones verbales.
- Reconoce un proceso como acción que produce un resultado, este proceso será infinito cuando se pueda producir siempre un resultado más.
- Distingue un proceso infinito de uno que no lo sea.
- Resuelve problemas de diversos contextos que involucran en su solución, procesos infinitos.
- Utiliza las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: como cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son, y a la larga, cómo son estos.
- Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen.
- Interpreta la representación simbólica de procesos infinitos discretos y continuos como una forma de expresar la solución exacta de dichos procesos.

Para alcanzar el propósito y los aprendizajes especificados en el curso, los educandos realizarán ejercicios sobre la metodología de solución de problemas, misma que aplicarán en la solución de estos. Los problemas están seleccionados de manera que primero se abordan los conceptos de manera intuitiva y posteriormente se procede a su formalización. En la parte conceptual se hace énfasis en los puntos relevantes de los conceptos: funciones (representación tabular y gráfica), representación simbólica de procesos infinitos ya sean discretos o continuos, para finalizar con el concepto de límite.

Estrategias de aprendizaje.

- Utiliza procesos geométricos para representar los procesos infinitos.
- Utiliza procedimientos aritméticos para resolver procesos infinitos.
- Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones.
- Identifica los elementos y las relaciones que intervienen en el problema.
- Reconoce la importancia del proceso de limite como el elemento clave del cálculo.

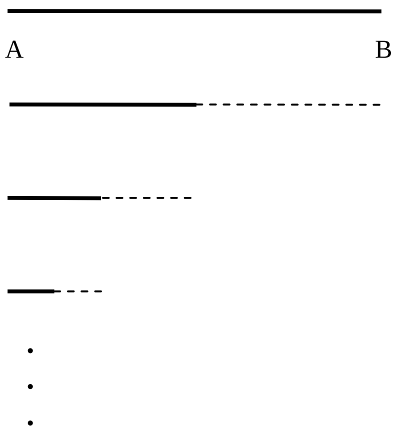
Actividad de aprendizaje

Consulta en la bibliografía el tema de números reales y repasa las propiedades de la adición, multiplicación, orden, continuidad y distancia.

Actividad de aprendizaje.

Procesos infinitos

Considera el siguiente proceso.



Se toma el segmento AB de longitud 1,

se divide el segmento en dos partes iguales,

se toma una de las partes y se divide en dos partes iguales,

y así sucesivamente.

¿Cuántas veces se puede repetir este proceso?

____

Observa que se genera una sucesión de segmentos:

Y tomando sus longitudes tendríamos:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, . . .

¿Qué sucede con los segmentos que se toman conforme avanza el proceso?

____

¿Qué sucede con la longitud de los segmentos conforme avanza el proceso?

____

Considera ahora el siguiente proceso:

Toma el número 1 y divídelo entre el número 3, con una precisión hasta décimos

$\frac{1}{3} \approx 0.3$

Ahora realiza la división con una precisión hasta centésimos

$\frac{1}{3} \approx 0.33$

Realiza, sucesivamente, la división con una precisión cada vez mayor

$\frac{1}{3} \approx 0.333$

$\frac{1}{3} \approx 0.3333$

$\frac{1}{3} \approx 0.33333$

¿Cuántas veces más puedes realizar la operación?

____

Observa que, nuevamente, se genera una sucesión:

0.3 , 0.33 , 0.333 , 0.3333 , 0.33333 , 0.33333 , . . .

¿Qué sucede con los cocientes de la división conforme avanza el proceso?

____

¡Cierto! *van aumentando*, pero paradójicamente el aumento se hace menor en valor, y *están cada vez más próximos* al valor exacto de $\frac{1}{3}$

La división cada vez más precisa de 1 entre 3 y la partición del segmento son ejemplos de Procesos Infinitos.

¿Por qué crees que reciban ese nombre?

____

Sucesiones

Lo interesante de un proceso infinito y de las sucesiones que se generan con él, es lo que sucede a la larga, es decir cuando el proceso se repite una infinidad de veces, (o podríamos decir un número infinito de veces).

Primero definamos algunos conceptos:

Una sucesión es una disposición consecutiva de términos, es decir, una lista de números con un orden establecido: a_1, a_2, a_3,..., a_n,…,

a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término,…, en general a_n es el *n-ésimo* término.

Decimos que una sucesión es *infinita* si cada término tiene un sucesor.

Formalmente, una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto 1, 2, 3,…, n y cuyo codominio llamado también contradominio, es el conjunto de los números reales.

De este modo, una sucesión es infinita si su dominio es el conjunto de todos los enteros positivos.

Ejemplos

A) 1, 8, 27, 64. Es una sucesión finita, pues sólo tiene 4 términos

Si la sucesión es infinita, los siguientes términos serían: 125, 216, 343,…,
(los puntos suspensivos significan que continua indefinidamente)
Observa que los términos se pueden escribir como: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 6^3, 7^3,…,
Por lo que el término general (ó *n-ésimo* término) es n^3.

B) ¼, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$,…, es una sucesión infinita.

1.- Escribe los siguientes 3 términos __________, __________, __________,…,

2.- ¿Puedes establecer el término general? __________

3.- ¿Qué sucede con el valor de los términos, conforme aumenta el número de ellos?

____

Se dice que una sucesión <u>*tiende a L*</u> cuando *n tiende a infinito*, si sus términos se van <u>aproximando cada vez más</u> a ese valor (aunque tal vez no lleguen a ser exactamente iguales a él), conforme el número de términos aumenta.

L puede ser un número o puede ser el infinito, lo que significa que los términos crecen indefinidamente.

Ejemplos

A) La sucesión 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, . . . crece indefinidamente, entonces "*tiende a infinito*"

B) Los términos de la sucesión ¼, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$, $^1/_{256}$,…, son cada vez más pequeños y siempre positivos, entonces la sucesión "*tiende a cero*"

Se utiliza el símbolo "→" para indicar que la sucesión "tiende a"

C) ½, ¼, $^1/_8$, $^1/_{16}$, . . . → 0

D) 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, . . . → ⅓

Ejercicios

1.- Determina cuáles serían los siguientes dos términos de cada sucesión

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots,$

b) 1, 4, 9, 16, 25,…,

c) –4, –4, –4, –4, –4,…,

d) 3.9, 3.99, 3.999, 3.9999,…,.

e) 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001,…,

2.- Indica a que valor tiende cada sucesión del ejercicio anterior

3.- Determina si las sucesiones tienden o no al valor indicado, conforme el número de términos aumenta

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots \rightarrow 0$

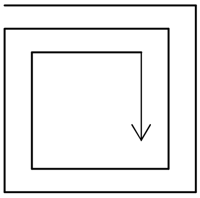
b) 1.01, $(1.01)^2$, $(1.01)^3$, $(1.01)^4$,…,→ ∞

c) 1000 – 1, 1000 – 2, 1000 – 3, 1000 – 4, 1000 – 5,…, → 0

d) 0.6, 0.6 + 0.06, 0.6 + 0.06 + 0.006, 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006,…,→ $^2/_3$

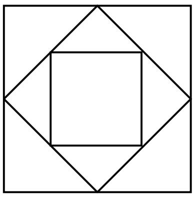
e) 1, –1, 1, –1, 1, –1,…, → 0

4.- Una pelota de goma se lanza hacia arriba de modo que alcanza una altura de 10 m, y se deja rebotar hasta que quede en reposo. En cada rebote sube hasta la mitad de la altura máxima anterior. Calcula la distancia total que recorre la pelota antes de quedar en reposo.

5.-  Se construye un "laberinto" dentro de un terreno de 100 por 100 m., comenzando por las paredes exteriores como muestra la figura, de modo que la distancia entre una pared y otra sea siempre de 1 m.

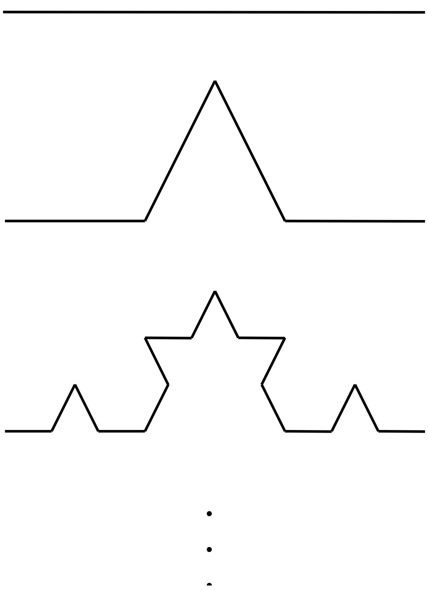
a) Este proceso de construir las paredes ¿puede ser infinito? ¿Por qué?
b) ¿Existirá una última figura? ¿Qué sería?
c) Encuentra la relación entre la longitud de una pared vertical (en la figura) y la anterior pared vertical.
d) Calcula el valor que resultaría si se sumaran las longitudes de todas las paredes

6.- En la figura siguiente cada nuevo cuadrado esta inscrito en el anterior, de modo que sus vértices coinciden con los puntos medios de los lados del cuadrado anterior.
El lado del primer cuadrado mide 1. Observa la figura y responde



a) Este proceso de inscribir cuadrados ¿puede ser infinito? ¿Por qué?
b) ¿Existirá una última figura? ¿Qué sería?
c) Calcula el área de los 5 primeros cuadrados
d) Conforme avanza el proceso, ¿las áreas tienden a algún valor?
e) Calcula la suma de las primeras cinco áreas
f) Calcula el valor que resultaría si se sumaran las áreas de todos los cuadrados posibles

7.- Considera el siguiente proceso:



Toma un segmento de recta de longitud 1.

i) Divide el segmento en tres partes iguales
ii) Sobre el segmento central construye un triangulo equilátero
iii) Borra la base de este triángulo, es decir el segmento central
iv) Repite el proceso sobre cada nuevo segmento

Responde

a) Este proceso ¿puede ser infinito? ¿Por qué?
b) ¿Existirá una última figura? ¿Qué sería?
c) Calcula la longitud de la primera figura construida
d) Calcula la longitud de la figura construida en los 5 primeros pasos
e) Conforme avanza el proceso, ¿qué sucede con la longitud de la figura?

Limites

A. Límite de una Sucesión

Si una sucesión infinita a_1 , a_2 , a_3 , . . . , a_n , . . . tiende a L conforme el número de términos aumenta, entonces se dice que L es el Límite de la sucesión y se escribe $\underset{n\to\infty}{Lím}\, a_n = L$

Los símbolos $n \to \infty$ significan que el número de términos de la sucesión aumenta indefinidamente

Por ejemplo, para la sucesión: ½, ¼, $^1/_8$, $^1/_{16}$, . . . → 0, se tiene $\underset{n\to\infty}{Lím}\, \frac{1}{2^n} = 0$

B. Límite de una función

Ejemplo 1.- Considera la sucesión *2.1, 2.01, 2.001, 2.0001,* . . . y la función $f(x) = x^2 + 1$.

Evalúa la función en cada término de la sucesión

f(2.1) =______ *f(2.01)* = ______ *f(2.001)* = ______ *f(2.0001)* = ______ , . . .

Observa la nueva sucesión que se genera y determina a qué tiende:

5.41, 5.0401, 5.004001, 5.00040001,…, → _______

Así es, tiende a 5, entonces podríamos decir que: Cinco es el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ evaluada en la sucesión que tiende a dos.

Ahora considera los siguientes valores de *x: 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999,…,* y evalúa la misma función *f(x)* en ellos

x	*f(x)*
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	

Como puedes observar, (igual que con la sucesión anterior):

"a medida que *x* se aproxima a 2, *f(x)* se aproxima más a 5"
$x\to 2$, $f(x) \to 5$

Lo que equivale a decir que: cuando *x* tiende a 2, el límite de *f(x)* es 5
Y simbólicamente se expresa como: $\underset{x\to 2}{Lím}\, f(x) = 5$

De esta manera, calcular el valor de $\underset{x \to a}{Lím}\ f(x)$ significa responder a la pregunta:

¿Qué sucede con *f(x)* cuando x se aproxima a a?

Observa que las frases "tiende a" y "se aproxima a" se utilizan de forma equivalente

Ejemplo 2.- Para la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ responde

a) ¿Podemos calcular el valor de *f(1)*? _________ ¿porqué?_____________________________

b) ¿Qué sucede con $f(x)$ alrededor de 1, es decir cuando x se aproxima a 1?

Para responder se construye una sucesión de valores de x que tiendan a 1, menores que 1; y después otra sucesión con valores de x que tiendan a 1, mayores que 1; y se evalúa la función en esos valores

x	0.9	0.92	0.95	0.98	0.99	0.999	0.9999	→ 1
f(x)								

x	1.1	1.08	1.03	1.01	1.001	1.0001	1.00001	→ 1
f(x)								

¿A qué valor tiende *f(x)* cuando *x* tiende a 1 con valores menores a 1? ____________________

¿A qué valor tiende *f(x)* cuando *x* tiende a 1 con valores mayores a 1? ____________________

c) Como puedes observar, en ambos casos *f(x)* → _____ , entonces ya puedes responder ¿cuánto vale el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a 1? Vale _____

d) Expresa lo anterior simbólicamente: $\underset{x \to \_\_\_}{Lím}$ _____ = 3

Límites laterales

Cuando x se aproxima a un cierto valor *a* con valores menores que éste, se dice que x tiende a *a por la izquierda*, y simbólicamente se indica con signo (-) como superíndice de *a:* $x \to a^-$

Si x se aproxima a *a* con valores mayores, entonces se dice que tiende a *a por la derecha*, simbólicamente se indica con un signo (+) como superíndice de *a:* $x \to a^{+}$
Observa que los símbolos a^{-} y a^{+} nada tienen que ver con el signo *a*

Si $f(x)$ se aproxima cada vez más a *L*, a medida que *x* se aproxima a *a* por la izquierda, entonces decimos que *L* es el límite izquierdo de *f(x)*, y simbólicamente se representa con

$$\underset{x \to a^{-}}{Lím}\, f(x) = L$$

De igual forma, si *f(x)* se aproxima cada vez más a *L*, a medida que *x* se aproxima a *a* por la derecha, entonces decimos que *L* es el límite derecho de *f(x)*

Simbólicamente se representa como: $\underset{x \to a^{+}}{Lím}\, f(x) = L$

Si los límites laterales son iguales, entonces podemos hablar del límite $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x) = L$

Si los límites laterales son distintos, entonces se dice que el límite $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x)$ no existe.

Propiedades de los límites

Para calcular un límite siempre se puede construir una sucesión por la izquierda y una por la derecha y tabular los valores de la función, pero existen otras formas más sencillas y precisas para hacerlo.
Consulta en la bibliografía recomendada cuales son los Teoremas y Propiedades de los Límites, así como las técnicas algebraicas para calcularlos.

Ejercicios

1.- Las tablas muestran sucesiones de valores de la función *f(x)* para diferentes valores de x.
¿Qué puedes concluir acerca de *f(x)*?

x	–0.3	–0.2	–0.1	–0.05	–0.03	–0.01	–0.001	→
f(x)	0.95885	0.97354	0.98506	0.99334	0.99833	0.99958	0.99998	

←	0.001	0.01	0.02	0.04	0.1	0.2	0.4	*x*
	0.99997	0.99957	0.99834	0.99344	0.98516	0.97364	0.95895	*f(x)*

$\underset{x \to \_\_\_}{Lím}$ _____ = _____ y $\underset{x \to \_\_\_}{Lím}$ _____ = _____ , por lo tanto $\underset{x \to \_\_\_}{Lím}$ _____ = _____

2.- Para los siguientes símbolos, *i*) escribe cómo se leen, y *ii*) explica con tus palabras lo que significan

a) $\underset{x \to 7}{Lím}\, g(x) = -3$

b) $\underset{x \to 0}{Lím}\, h(x) = 17.5$

c) $\underset{x \to 1^+}{Lím}\ f(x) = 5$

¿Puedes hacer lo mismo con los siguientes símbolos?

d) $\underset{x \to 4}{Lím}\, P(x) = \infty$

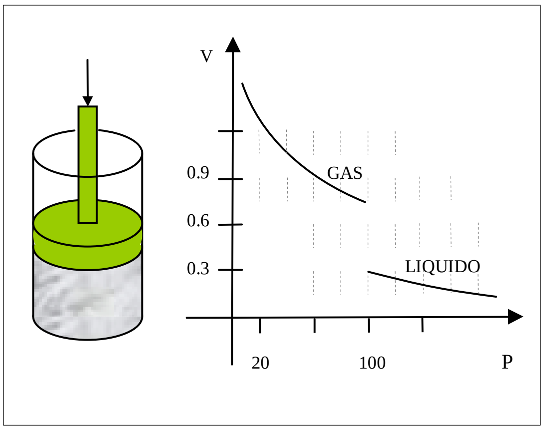
e) $\underset{x \to \infty}{Lím}\, Q(x) = 10$

3.- Un gas es mantenido a temperatura constante dentro de un cilindro. Cuando este gas es comprimido su volumen *V* disminuye, hasta que se llega a una presión *P* crítica. Al rebasar esta presión el gas se convierte en un líquido.

Utiliza la gráfica que se muestra a la derecha para calcular e interpretar los límites siguientes

a) $\underset{P \to 100^-}{Lím}\ V$

b) $\underset{P \to 100^+}{Lím}\ V$



4.- Dado que $\underset{x \to 6}{Lím}\ f(x) = -3$, $\underset{x \to 6}{Lím}\, g(x) = 0$, $\underset{x \to 6}{Lím}\, h(x) = 8$, calcula:

a) $\underset{x \to 6}{Lím}\ [f(x) + g(x)]$

b) $\underset{x \to 6}{Lím}\ [f(x)]^2$

c) $\underset{x \to 6}{Lím}\ \frac{h(x)}{g(x)}$

d) $\underset{x \to 6}{Lím}\ \frac{1}{f(x)}$

e) $\underset{x \to 6}{Lím}\ \frac{3f(x)}{5h(x) - g(x)}$

f) $\underset{x \to 6}{Lím}\ [g(x) - 0.4 f(x)]$

5.- Calcula el valor de los siguientes límites

a) $\underset{x\to 3}{Lím}\ 2x^4-3x^2-x+1$

b) $\underset{x\to -6}{Lím}\ (9-x)^{-2}(x^2+2x)$

c) $\underset{x\to -1}{Lím}\ \frac{x-2}{x^2+4x-3}$

d) $\underset{x\to 3}{Lím}\ \frac{x-3}{8-\sqrt{12-x}}$

e) $\underset{x\to 1}{Lím}\ \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

f) $\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{x}{x^2-5x}$

g) $\underset{x\to -3}{Lím}\ \frac{5x^2+15x}{x^2-2x-15}$

h) $\underset{x\to 4}{Lím}\ \frac{x^2-7x+12}{x-4}$

i) $\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{\sqrt{x^2+49}-7}{x^2}$

j) $\underset{x\to 4}{Lím}\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

k) $\underset{h\to 0}{Lím}\ \frac{(2+h)^3-8}{h}$

l) $\underset{t\to 0}{Lím}\ \frac{(t-5)^2-25}{t}$

m) $\underset{x\to 1}{Lím}\ \left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

n) $\underset{x\to \infty}{Lím}\ \frac{x+4}{x^2-2x+5}$

o) $\underset{x\to \infty}{Lím}\ \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

p) $\underset{x\to \infty}{Lím}\ \frac{x^7-4x^5-2}{2x^4+14x+1}$

6.- Responde Cierto (C) o Falso (F) para cada una de las siguientes afirmaciones

a) Si $\underset{x\to c}{Lím}\ f(x)=L$, entonces *f(c) = L* ( )

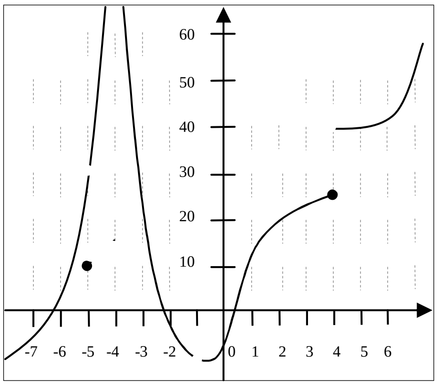
b) Si *f(c)* no está definida, entonces el $\underset{x\to c}{Lím}\ f(x)$ no existe. ( )

c) Si $\underset{x\to c^-}{Lím}\ f(x)=-\infty$ y $\underset{x\to c^+}{Lím}\ f(x)=\infty$, entonces $\underset{x\to c}{Lím}\ f(x)=0$ ( )

d) La expresión $\underset{x\to c}{Lím}\ f(x)=L$, significa que los valores de *f(x)* están tan cercanos como queramos al número *L*, siempre y cuando los valores de *x* estén suficientemente cerca de *c* ( )

e) Si $\underset{x\to c}{Lím}\ f(x)=f(c)$, entonces *f(x)* es continua en *x* = *c*. ( )

7.- Para la función cuya gráfica se muestra a la derecha, calcula



$\lim\limits_{x \to -5^-} g(x) =$ $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to -5^+} g(x) =$ $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to -5} g(x) =$ $\lim\limits_{x \to 4} g(x) =$

g(-5)= *g(4)=*

UNIDAD 2. La derivada como un estudio de la variación y el cambio.

Propósitos:

Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado para construir el concepto de derivada con apoyo de procesos infinitos y la noción de límite.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Explica el significado de pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado.
- Elabora una tabla, dibuja la gráfica y construye una expresión algebraica asociada al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado.
- Identifica que una función lineal tiene variación constante en intervalos del mismo tamaño.
- Identifica que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.
- Infiere que el *n*-ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado *n*.
- Calcula la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado.
- Utiliza procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio
- Calcula la derivada de funciones polinomiales usando:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para alcanzar el propósito y los aprendizajes especificados en el curso, los educandos realizarán ejercicios sobre la metodología de solución de problemas, misma que aplicarán en la solución de problemas. Los problemas están seleccionados de manera que primero se abordan los conceptos de manera intuitiva y posteriormente se procede a su formalización. En la parte conceptual se hace énfasis en los puntos relevantes de: estudio de la variación, razón de cambio, medición de la variación, la pendiente de una función lineal como razón de cambio constante, razón de cambio promedio, razón de cambio instantáneo, para finalizar con el concepto de derivada.

Estrategias de aprendizaje.

- Reconoce el proceso de límite en la definición de la derivada.
- Reconoce de manera geométrica a la derivada como un proceso de limite de líneas secantes que se aproximan a una recta tangente
- Reconoce a través del cociente de Fermat a la derivada como la función que proporciona la razón de cambio instantánea.
- Reconoce que en una función lineal, es invariable la pendiente (asociada a la razón de cambio).
- Reconoce que en una función cuadrática, la segunda variación permite analizar la concavidad.
- Reconoce que en una función cúbica, se presta para estudiar los cambios de concavidad vinculados con la existencia de puntos de inflexión.

Actividades de aprendizaje.

Variación

Ejemplo

Al medir la estatura de un niño a partir de su nacimiento se obtuvieron los siguientes datos:

Edad x (meses)	0	1	2	3	4	5
Estatura y (cm)	47	54	61	68	75	82

a) Calcula los incrementos en la edad del niño desde que nació hasta los 5 meses

b) Calcula los incrementos en la estatura del niño desde que nació hasta los 5 meses

Solución

Se llama ***incremento en una variable*** a la diferencia entre dos de sus valores, y se denota con la letra griega mayúscula "delta": Δ

Por ejemplo: $3 - 2 = 1 = \Delta x$ incremento en la edad del niño

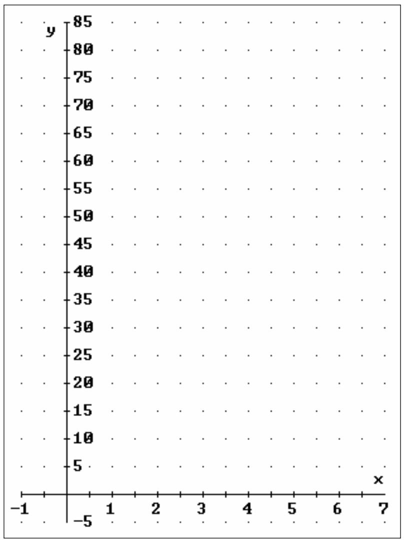
$68 - 61 = 7 = \Delta y$ incremento en su estatura

Construyamos una tabla con los incrementos en edad y estatura del niño

Δx		1 – 0 = **1**	2 – 1 = **1**	3 – 2 = **1**	4 – 3 = **1**	5 – 4 = **1**
Δy		54 – 47 = **7**	61 – 54 = **7**	68 – 61 = **7**	75 – 68 = **7**	82 – 75 = **7**

Como puedes observar, los intervalos de tiempo son todos _______________, y los incrementos en la estatura son _____________________

c) Gráfica la función estatura del niño, ¿cómo es la gráfica?



La gráfica es una __________________________, cuya pendiente es: m =

Por lo que podemos inferir que la función estatura del niño es una función lineal cuya representación algebraica es:
$y = 7x + 47$

Además, a partir de la tabulación anterior podemos concluir que:

Para una función lineal: *en iguales intervalos de x,* los incrementos en y son todos iguales, es decir, *el incremento* Δy *es constante*

De manera semejante podemos obtener que:

Para una función cuadrática: *en iguales intervalos de* x, los incrementos de los incrementos en y son todos iguales, es decir, *el incremento* $\Delta_2 y$ *es constante*

Para una función cúbica: *en iguales intervalos de* x, los incrementos de los incrementos de los incrementos en y son todos iguales, es decir, *el incremento* $\Delta_3 y$ *es constante*

Ejemplo

La tabla muestra una variable y como función de la variable x, calcula los incrementos que faltan, observa y completa las conclusiones

x	y
-2	-8.8
0	-1.2
2	1.6
4	2.0
6	2.4
8	5.2
10	12.8

Δx	Δy	$\Delta_2 y$	$\Delta_3 y$
0-(-2) = *2*	-1.2 – (-8.8) =		
2 – 0 = *2*	1.6 – (-1.2) =	2.8 – 7.6 =	
4 – 2 = *2*	2.0 – 1.6 =	0.4 – 2.8 =	-2.4 – (-4.8) = **2.4**
6 – 2 = *2*	2.4 – 2.0 = **0.4**	0.4 – 0.4 =	0 – (-2.4) =
8 – 6 = *2*	5.2 – 2.4 =	2.8 – 0.4 =	2.4 – 0 =
10 – 8 = *2*	12.8 – 5.2 =	7.6 – 2.8 = **4.8**	4.8 – 2.4 =

Como los incrementos $\Delta\, y$ son ____________, entonces la variación no es lineal

Como los incrementos de los incrementos, $\Delta_2\, y$ son diferentes, entonces la _________________ no es cuadrática

Como los incrementos de los incrementos de los incrementos, $\Delta_3\, y$, son todos iguales, entonces la variación es cúbica, ya que los intervalos de x son del ____________tamaño

Ejercicios

1.- En las siguientes tablas y representa una función de x, calcula los incrementas en y y determina si se trata de variación lineal o no.

x	y
-2	-0.5
0	2.0
2	4.5
4	7.0
6	9.5
8	12.0
10	14.5

x	y
-5	-10
10	-20
25	-50
40	-80
55	-111
70	-140
85	-165

x	y
-3	4.8
1	0.8
5	-3.2
9	-7.2
13	-11.2
17	-15.2
21	-19.2

x	y
-5	-11
10	34
25	79
40	124
55	169
70	214
85	259

x	y
0	0
3	9
6	18
9	54
12	72
15	90
18	108

2.- En las siguientes tablas y representa una función de x, calcula los incrementos en los incrementos y determina si se trata de variación cuadrática o no

x	y
-2	3
0	-1
2	3
4	15
6	35
8	63
10	99

x	y
-4	-88
8	-76
20	80
32	380
44	824
56	1412
68	2144

x	y
-3	5.8
1	1.8
5	-2.2
9	-6.2
13	-10.2
17	-14.2
21	-18.2

x	y
0	0.2
6	1.2
12	3.2
18	4.2
24	5.2
30	7.2
36	8.2

x	y
0	-27.4
3	-17.5
6	-9.4
9	-3.1
12	1.4
15	4.1
18	5

3.- En las siguientes tablas y representa una función de x, calcula los incrementos de los incrementos necesarios para determina de que tipo de variación se trata

x	y
-1	-419
0	-496
1	-475
2	-356
3	-139
4	176
5	589

x	y
-9	8
-2	7
5	6
12	-1
19	-20
26	-74
33	- 236

x	y
-3	81
-2	16
-1	1
0	0
1	1
2	16
3	81

x	y
-4	97.4
-2	38.2
0	7.8
2	-3.4
4	-5
6	-6.6
8	-17.8

x	y
0	18
3	15
6	12
9	9
12	6
15	3
18	0

x	y
0	2
3	6
6	18
9	54
12	90
15	144
18	198

4.- Los costos de manufactura de cierto producto se determinan mediante un costo fijo de $2500 y un costo variable dependiendo del número de artículos manufacturados, de $ 4.50 por artículo, es decir, $C = 4.50\ x + 2500$.

a) Calcula el costo de producir 800, 1800, 2800, 3800 y 4800 unidades de este producto
b) Calcula el incremento en el costo al cambiar el número de unidades ¿qué observas?
c) Construye la gráfica que representa el costo total de producir x número de estos artículos
d) Interpreta el valor de la pendiente de la gráfica, en términos del problema
e) Determina la relación que hay entre el incremento, la pendiente de la recta y la expresión algebraica del costo

5.- La siguiente tabla muestra la altura de un objeto que se dejo caer desde lo alto de la torre WTC México.

tiempo (seg.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (m)	314	240.5	176.8	122.9	78.8	44.5	20.0	5.3	0.4

a) Calcula el incremento en su altura cada que pasa un segundo ¿qué observas?
b) ¿Puedes decir que la altura varía de forma lineal con respecto al tiempo?
c) Calcula el incremento en los incrementos del inciso a), ¿qué observas?
d) ¿Puedes decir que la altura varía de forma cuadrática con respecto al tiempo?
e) Gráfica la altura del objeto como función del tiempo y escribe tus conclusiones

6.- La masa de un cultivo de bacterias se puede aproximar mediante la función $B(t) = \frac{1}{4} t^3 + 9$, en la cual t es el tiempo medido en horas y $B(t)$ está medida en gramos.

a) Elabora una tabla y determina la masa de bacterias a las 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24 horas
b) Calcula el incremento en la masa de bacterias cada que pasa un periodo de 3 horas
c) Calcula los incrementos de los incrementos necesarios, para determinar que tipo de variación presenta este cultivo
d) Gráfica la función para el intervalo [0, 24] y escribe tus conclusiones

Razón de cambio

Se llama *razón de cambio* (promedio) de la función y con respecto a x, al cociente de los incrementos: $\dfrac{\Delta Y}{\Delta x} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}$

Y su significado es intuitivamente "*cuánto cambia* y (en promedio) *por cada unidad que cambia* x, en el intervalo de x_1 a x_2"

Por ejemplo, 25 km/hr, 38 palabras por minutos, 16 cm/año, son razones de cambio

La razón de cambio así definida es válida en un intervalo, por eso lleva el nombre promedio, sin embargo existe otra razón de cambio

Se llama *razón de cambio instantáneo* de la función y con respecto a x, al límite de las razones de cambio promedio, cuando el incremento en *x* tiende a cero: $\underset{\Delta x \to 0}{Lím} \dfrac{\Delta Y}{\Delta x} = \underset{x \to x_0}{Lím} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Y su significado es intuitivamente "*cuánto cambia* y *por cada unidad que cambia* x, en el instante x_0"

Ejemplo

Un mosquito vuela en línea recta hacia un eliminador eléctrico. Su posición al tiempo t puede determinarse mediante la función $s(t) = 0.7\, t^2 + 2$, con *t* medido en segundos y *s*(*t*) medida en metros.

a) Calcula la razón de cambio promedio de su posición, (es decir su velocidad promedio), de 1 segundo a 3 segundos

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{(0.7(3)^2 + 2) - (0.7(1)^2 + 2)}{3 - 1} = \frac{8.3 - 2.7}{2} = 2.8$$

El mosquito voló a una velocidad promedio de 2.8 m/s del segundo1 al segundo 3

b) Calcula su razón de cambio instantáneo, (es decir su velocidad instantánea), al tiempo 2.5 segundos

$$\underset{\Delta t \to 0}{Lím} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \underset{t \to 2.5}{Lím} \frac{s(t) - s(2.5)}{t - 2.5} = \underset{t \to 2.5}{Lím} \frac{(0.7(t)^2 + 2) - (0.7(2.5)^2 + 2)}{t - 2.5} = \underset{t \to 2.5}{Lím} \frac{0.7(t)^2 - 0.7(2.5)^2}{t - 2.5}$$

$$= \underset{t \to 2.5}{Lím} \frac{0.7\,[(t)^2 - (2.5)^2]}{t - 2.5} = \underset{t \to 2.5}{Lím} \frac{0.7\,[(t - 2.5)(t + 2.5)]}{t - 2.5} = \underset{t \to 2.5}{Lím}\, 0.7(t + 2.5) = 3.5$$

A los 2.5 segundos el mosquito volaba a una velocidad instantánea de 3.5 m/s

Ejercicios

1. La temperatura en la Cd. de Puebla durante la noche del 12 de Enero se muestra en la siguiente tabla:

t (hrs.)	0	1	2	3	4	5	6
Temp. (^{o}C)	-1	-1.8	-2.6	-3.4	-4.2	-5.0	-5.8

a) Calcula la razón de cambio promedio de la temperatura de las 0 hrs. a las 2 a.m.
b) Calcula la razón de cambio promedio de la temperatura de las 2 a.m. a las 6 a.m.
c) ¿Podrías decir que la temperatura bajo más rápido en algún intervalo de tiempo?
d) Escribe una expresión algebraica para la temperatura como función del tiempo
e) Calcula la temperatura a las 3:30 hrs.

2. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 120 m/seg. Su altura en metros después de t segundos se expresa con $A = 120t - 4.9\,t^2$.

a) Calcula la velocidad promedio de la pelota durante el intervalo de 1 a 4 seg.
b) calcula la velocidad promedio de la pelota durante el intervalo de 5 a 12 seg.
c) ¿En cual de estos intervalos de tiempo la pelota viajo más despacio? ¿Por qué?
d) Calcula la velocidad promedio durante el intervalo de 14 a 20 segundos. Explica tu resultado

3. Una población de moscas crece dentro de un gran recipiente, de modo que el número de moscas P (en cientos) a las t semanas está dado por $P = 36\,t^3 - t^4 + 5$.

a) Calcula la razón de crecimiento promedio durante las primeras 4 semanas
b) Calcula la razón de crecimiento promedio de la semana 5 a las semana 6. Explica tu resultado
c) Calcula la razón de cambio instantáneo a las 4 semanas y media
d) Calcula la razón de cambio instantáneo a las 6 semanas

4. Un globo esférico se infla y su radio (en centímetros) a los t minutos puede calcularse mediante la función: $r(t) = {}^{2t}/_{3}$ para $0 \leq t \leq 10$.

a) Escribe el volumen en función del tiempo
b) Calcula la razón de cambio instantáneo del radio con respecto al tiempo cuando t = 8
c) Calcula la razón de cambio instantáneo del volumen con respecto al radio cuando t = 7
d) Calcula la razón del cambio instantáneo del volumen con respecto al tiempo cuando t = 6

5. Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina, cuya pendiente es $^1/_5$, se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por $y = 1.6x - 0.016\ x^2$.

a) Calcula la pendiente de la trayectoria del cohete en el momento del disparo
b) Calcula la pendiente de la trayectoria cuando el cohete choca contra la colina
c) Calcula la altura máxima del cohete sobre el suelo

6. Calcula la razón de cambio instantáneo para las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x) = 42\ x$ para $x = -9$
b) $f(x) = 16 - 7x$ para $x = 8.5$
c) $f(x) = x^2 + 4x - 1$ para $x = -1$
d) $f(x) = 982 + x^3$ para $x = 4$
e) $f(x) = -8x^4$ para $x = 1.6$

Derivada como razón de cambio

Para la función $y = f(x)$ el incremento en *x*, Δx, sería igual a $x - a$, el incremento en y, Δy, sería igual a $f(x) - f(a)$, por lo tanto la razón de cambio instantáneo representada por el límite $\underset{\Delta x \to 0}{Lím} \dfrac{\Delta Y}{\Delta x}$ se convierte en el límite: $\underset{x \to a}{Lím} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

A este último límite se le conoce como *Límite de Fermat*

Se define *la* ***derivada*** de la función $y = f(x)$ en $x = a$, como *la razón de cambio instantáneo* de $f(x)$ en $x = a$, es decir, como el límite:

$$f'(x) = \underset{x \to a}{Lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La derivada de una función $y = f(x)$ se puede representar con diversas notaciones:

$$f'(x), \qquad y', \qquad D_x f(x), \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{dY}{dx}$$

UNIDAD 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósitos:

Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivación como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Obtiene la derivada de una función polinomial de 1ero, 2do o 3er grado utilizando la definición:
  $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- Identifica el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente de Fermat y encuentra la formula de la derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$.
- Calcula la derivada de funciones algebraicas usando la reglas de derivación
- Reconoce la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación.
- Identifica las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada.
- Obtiene la velocidad instantánea como la derivada de la función de posición y la aceleración como la derivada de la velocidad.
- Obtiene la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.
- Da significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.

Para alcanzar el propósito y los aprendizajes especificados en el curso, los educandos realizarán ejercicios sobre la metodología de solución de problemas, misma que aplicarán en la solución de problemas. Los problemas están seleccionados de manera que primero se abordan los conceptos de manera intuitiva y posteriormente se procede a su formalización. En la parte conceptual se hace énfasis en los puntos relevantes de los conceptos: Reglas de derivación (suma, producto cociente, regla de la cadena), Problemas de aplicación (cálculo de tangentes, cálculo de velocidades)

Estrategias de aprendizaje.

- Ejercita la técnica de derivación en las funciones algebraicas por medio de reglas y formulas de derivación. Es decir adquiere destreza en la aplicación de las formulas para obtener la derivada de funciones algebraicas.

Actividades de aprendizaje.

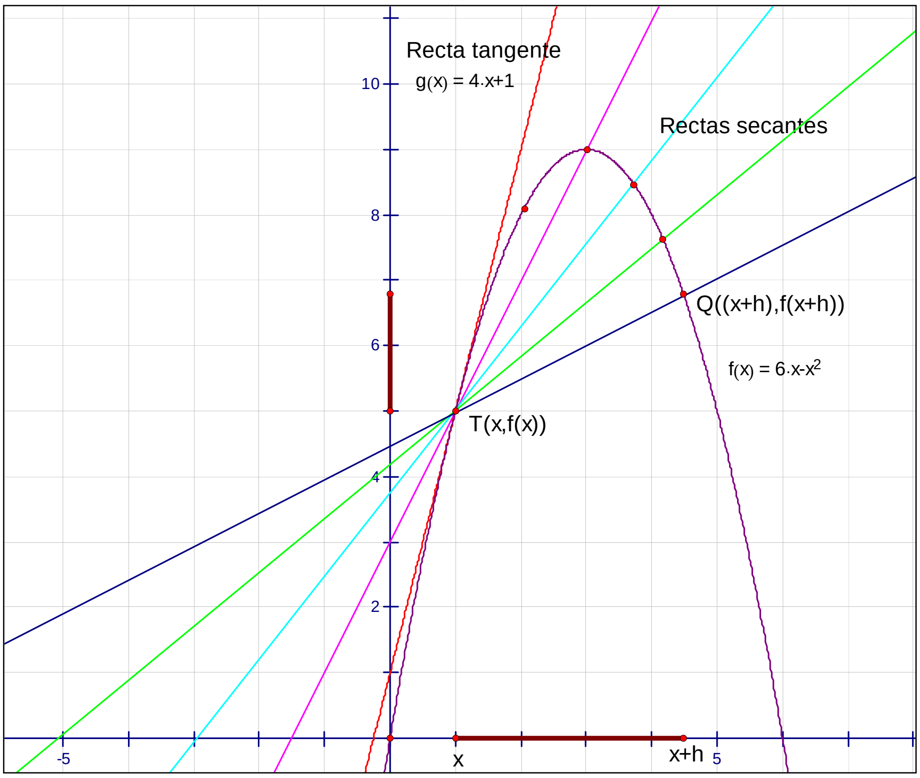
Interpretación geométrica de la derivada de una función.

La derivada de una función se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de tangencia, (en la gráfica el punto T) y se define por medio del límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Haciendo un cambio de variable, tomando $h = x - a$ se puede llegar a un límite equivalente, conocido como límite de Newton:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos *Q(x + h, f(x + h))* y *P(x, f(x))*

Calculo de derivadas de funciones mediante la definición.

Funciones lineales	Funciones cuadráticas	Funciones cúbicas
$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$
$f(x) = 2x$	$f(x) = -2x^2$	$f(x) = -2x^3$
$f(x) = -3x$	$f(x) = 3x^2$	$f(x) = 3x^3$
$f(x) = \mathrm{m}x$	$f(x) = \mathrm{a}x^2$	$f(x) = \mathrm{a}x^3$

Derivada de la función constante *f(x) = c*

$f(x) = c$, para cualquier constante c.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

Por lo que la derivada de una función constante es cero.

Derivadas de funciones lineales

1. Cálculo para la función $f(x) = 2x$.

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{2(x+h)-2x}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{2x+2h-2x}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{2h}{h}\ \underset{h\to 0}{Lím}\ 2 = 2$$

2. Cálculo para la función *f(x) = x*

____

____

3. Cálculo para la función *f(x) = -3x*

____

____

4. Cálculo para la función *f(x) = mx*

____

____

Con base en las derivadas encontradas para funciones lineales, ¿Cuál es la fórmula para determinar derivadas de funciones lineales?

____

Derivadas de funciones cuadráticas

1. Solución de la función $f(x) = 3x^2$.

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{h(6x+3h)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\,6x+3h = 6x = 2(3x)$$

2. Solución para la función $f(x) = x^2$.

____

____

____

3. Solución para la función $f(x) = -2x^2$.

____

____

____

4. Solución para la función $f(x) = \mathrm{a}\,x^2$.

____

____

____

Con base en las derivadas encontradas para funciones cuadráticas, ¿Cuál es la fórmula para determinar derivadas de funciones cuadráticas?

____

Derivadas de funciones cúbicas

1. Cálculo para la función $f(x) = -2x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x+h)^3 - (-2x^3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 2x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2x^3 - 6x^2h - 6xh^2 - 2h^3 + 2x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-6x^2 - 6xh - 2h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-6x^2 - 6xh - 2h^2) = -6x^2 = -2(3x^2)$$

2. Cálculo para la función $f(x) = x^3$.

____

____

____

3. Cálculo para la función $f(x) = 3x^3$.

____

____

____

4. Cálculo para la función $f(x) = ax^3$.

____

____

____

Con base en las derivadas encontradas para funciones cúbicas, ¿Cuál es la fórmula para determinar derivadas de funciones cúbicas?

____

Cálculo de derivadas de funciones mediante fórmulas.

Para calcular una derivada podemos recurrir a la definición por medio del límite, sin embargo existen propiedades de la derivada que permiten calcularla de manera más corta y precisa

Consulta en la bibliografía recomendada las propiedades y reglas de las derivadas.

Ejemplos, determina la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1$.

   Aplicando la regla para la derivada de una suma de funciones, se tiene:

$$\begin{aligned} D_x\ f(x) &= D_x(2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1) \\ &= D_x(2x^4) - D_x(5x^3) + D_x(x^2) - D_x(4x) + D_x(1) \\ &= 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

2. $f(x) = (x^3 + 3x^2)(2x^4 - 5x^3)$.

   Aplicando la regla para la derivada de un producto de funciones, se tiene:

$$\begin{aligned} D_x\ f(x) &= (x^3 + 3x^2)\, D_x(2x^4 - 5x^3) + (2x^4 - 5x^3)\, D_x(x^3 + 3x^2) \\ &= (x^3 + 3x^2)(8x^3 - 15x^2) + (2x^4 - 5x^3)(3x^2 + 6x) \\ &= 8x^6 - 15x^5 + 24x^5 - 45x^4 + 6x^6 - 12x^5 - 15x^5 - 30x^4 \\ &= 14x^6 - 36x^5 - 75x^4 \end{aligned}$$

3. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$

   Aplicando la regla del cociente, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^2+5)D_x(3x^2-x+2) - (3x^2-x+2)D_x(4x^2+5)}{(4x^2+5)^2} \\ &= \frac{(4x^2+5)(6x-1) - (3x^2-x+2)(8x)}{(4x^2+5)^2} \\ &= \frac{24x^3 - 4x^2 + 30x - 5 - 24x^3 + 8x^2 - 16x}{(4x^2+5)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+14x-5}{(4x^2+5)^2}$$

4. $f(x) = (2x^3 - 7x^2 + 5x)^4$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$f'(x) = D_x(2x^3 - 7x^2 + 5x)^4 = 4(2x^3 - 7x^2 + 5x)^4 D_x(2x^3 - 7x^2 + 5x)$$
$$= 4(2x^3 - 7x^2 + 5x)^3(6x^2 - 14x + 5)$$

5. $f(x) = (3x^3 - 5x^2 + 2x)^{-3} = \dfrac{1}{(3x^3-5x^2+2x)^3}$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$f'(x) = D_x(3x^3 - 5x^2 + 2x)^{-3} = -3(3x^3 - 5x^2 + 2x)^{-4} D_x(3x^3 - 5x^2 + 2x)$$

$$= -3(3x^3 - 5x^2 + 2x)^{-4}(9x^2 - 10x + 2)$$

$$= \frac{-3(9x^2-10x+2)}{(3x^3-5x^2+2x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-3(9x^2-10x+2x)}{(3x^3-5x^2+2x)^4}$$

Ejercicios

1.- Comprueba cada una de las siguientes derivadas:

a) $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

b) $y = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

c) $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$

d) $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

e) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}$ $\qquad$ $f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$

f). $y = (1-5x)^6$ $\qquad$ $y' = -30(1-5x)^5$

g) $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ $\qquad$ $f'(x) = 12(1 - x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

h) $y = \sqrt{3 + 4x - x^2}$ $\qquad$ $y' = \frac{2 - x}{\sqrt{3 + 4x - x^2}}$

i) $\theta = \frac{3r + 2}{2r + 3}$ $\qquad$ $\theta' = \frac{5}{(2r+3)^2}$

j) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ $\qquad$ $y' = \frac{5x^4}{(1 + x)^6}$

k) $y = 2x^2\sqrt{2 - x}$ $\qquad$ $y' = \frac{x(8 - 5x)}{\sqrt{2 - x}}$

l) $y = x\sqrt{3 - 2x^2}$ $\qquad$ $y' = \frac{3 - 4x^2}{\sqrt{3 - 2x^2}}$

m) $y = (x-1)(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$ $\qquad$ $y' = \frac{2x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

n) $z = \frac{w}{\sqrt{1 - 4w^2}}$ $\qquad$ $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 4w^2)^3}}$

o) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}$

p) $y = (x^2 + 3)^4(2x^3 - 5)^3$ $\qquad$ $y' = 2x\,(x^2 + 3)^3\,(2x^3 - 5)^2\,(17x^3 + 27x - 20)$

q) $s = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$ $\qquad$ $\frac{ds}{dt} = \frac{10\,t}{(3 - t^2)^2}$

r) $y = \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1} \right)^4$ $\qquad y' = \dfrac{36x^2 (x^3 - 1)^3}{\left(2x^3 + 1\right)^5}$

s) $y = \left(x^2 + 4 \right)^2 \left(2x^3 - 1\right)^3$ $\qquad y' = 2x \left(x^2 + 4 \right)\left(2x^3 - 1\right)^2 \left(13x^3 + 36x - 2\right)$

t) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x}{\left(4 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

2.-Encuentra la derivada de las siguientes funciones aplicando las fórmulas de derivación.

a) $f(x) = 4x^3 - (2x^3 + 8x + 7)$

b) $g(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8$

c) $h(x) = 2\sqrt{x^3} + 4\sqrt[4]{x^5}$

d) $f(x) = (5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7)$

e) $g(x) = (5x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$

f) $h(x) = (x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1)$

g) $f(x) = (x+1)(x^3 + 7)$

h) $g(x) = (x^3 + 6x^2)(x^2 - 1)$

i) $h(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+4}$

k) $g(t) = \dfrac{t^2 - 7t}{t-5}$

l) $h(x) = \dfrac{3-x}{x^2-3}$

m) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

n) $g(x) = (3x+5)^3$

o) $h(x) = (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

p) $f(t) = \sqrt{5-2t}$

q) $g(x) = (x+1)^3(2x+1)^4$

r) $h(x) = x^3(x^2+1)^2$

s) $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^3$

t) $g(x) = 20 + 2x - \sqrt{x+1}$

Unidad 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósito

Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

Aprendizajes a lograr por los educandos en la unidad:

- Infiere a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función. Derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad.
- Bosqueja la *gráfica* de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.
- Determina grafica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.
- Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones.
- Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Gráfica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Comprende que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de f, f' y f''.
- Resuelve problemas que involucran máximos y mínimos de una función.

Para alcanzar el propósito y los aprendizajes especificados en el curso, los educandos realizarán ejercicios sobre la metodología de solución de problemas, misma que aplicarán en la solución de problemas. Los problemas están seleccionados de manera que primero se abordan los conceptos de manera intuitiva y posteriormente se procede a su formalización. En la parte conceptual se hace énfasis en los puntos relevantes de los conceptos: La aplicación de la derivada en la resolución de problemas y construcción de gráficas de funciones mediante el primer y segundo criterio de la derivada. Se finaliza con problemas de optimización. Esta cuarta unidad representa un primer momento de síntesis. Se recupera el aspecto algebraico y enriquece el análisis geométrico para profundizar en la compresión de la relación existente entre una función y sus derivadas

Estrategia de Aprendizaje

- Reconoce los valores máximos, mínimos y los puntos de inflexión en las funciones algebraicas, a través del criterio de la segunda derivada.
- Adquiere destreza en la resolución de problemas de optimización.

Actividades de aprendizaje.

Problema de optimización: Volumen máximo de una caja.

Se desea construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de 40 cm. de largo y 30 cm. de ancho, cortando un cuadrado de lado x en las cuatro esquinas y doblando las cejas hacia arriba para formar la caja. Encuentra las dimensiones de la caja que dan el volumen máximo que puede construirse de esta forma.

Para la solución del problema, desarrolla:

a) El modelo geométrico asociado al problema.
b) La condición que debe cumplir la profundidad (altura) de la caja.
c) El modelo matemático asociado al problema.
d) El Registro tabular.
e) La Gráfica de la función volumen.
f) La Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.
g) Utilizando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.
h) Utilizando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema.

a) El modelo geométrico del problema se presenta en la figura 1

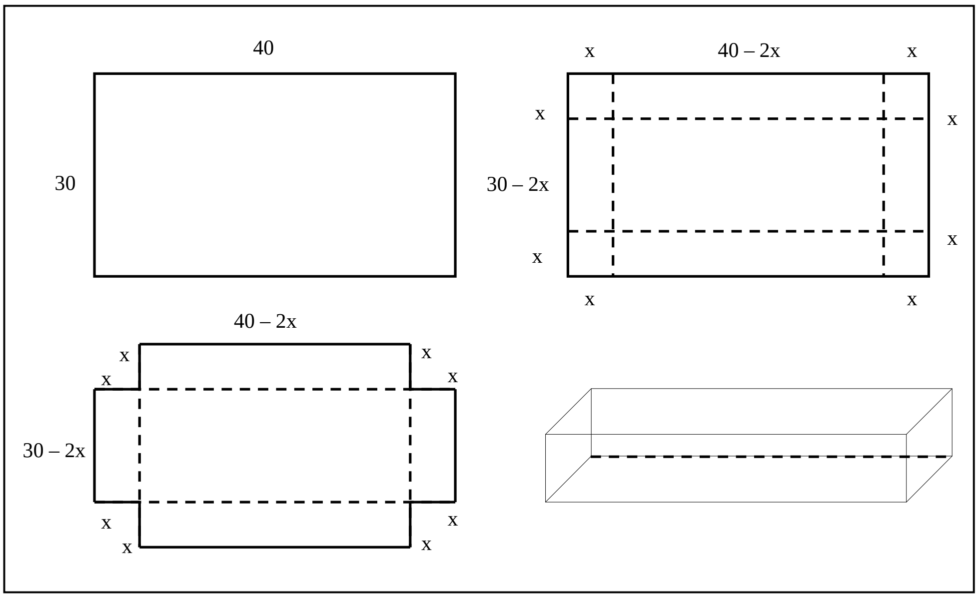


Figura 1. Modelo geométrico del problema

b) Condición de la profundidad de la caja. Como las dimensiones de la caja son longitudes, entonces se deben cumplir las condiciones:

La profundidad x debe ser $x \geq 0$.
El largo debe ser $40 - 2x \geq 0$, de donde resulta $20 \geq x$.
El ancho debe ser $30 - 2x \geq 0$, lo que da $15 \geq x$.
Para que se cumplan las tres condiciones, la profundidad de la caja x deberá tomar el rango de valores $0 \leq x \leq 15$.

c) Modelo matemático.
El volumen de la caja se encuentra multiplicando sus dimensiones, es decir, $v(x) = x(40-2x)(30-2x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

d) Registro tabular.
Evalúa la profundidad, el largo, el ancho y completa los datos restantes de la tabla 1.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	$40-2x$	$30-2x$	$x(40-2x)(30-2x)$
0	40	30	0
1			
2	36	26	1872
3		24	2448
4	32		2816
5	30	20	
6	28	18	3024
7			
8	24	14	2688
9		12	2376
10	20	10	2000
11	18		1584
12	16	6	
13	14	4	728
14			
15	10	0	0

Tabla 1. Registro tabular de las dimensiones y volumen de la caja.

e) El registro gráfico del problema se presenta en la figura 2.

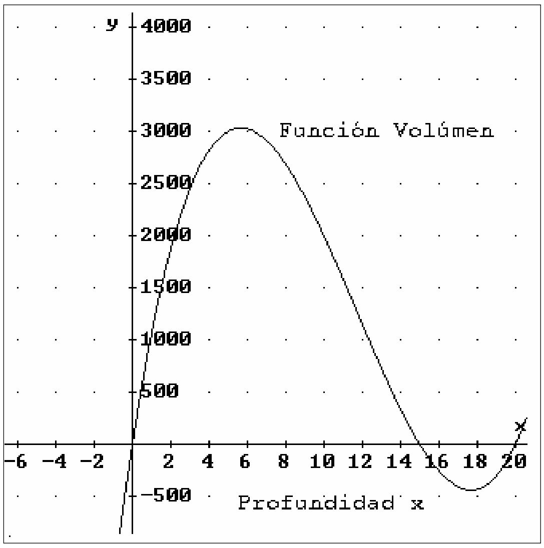


Figura 2. Gráfica de la función volumen de la caja

¿Qué significa encontrar el máximo volumen de la caja?

____

De acuerdo, significa determinar <u>la profundidad</u> x de la caja que da el volumen máximo de la misma. Geométricamente significa encontrar la coordenada x para la cual la gráfica tiene un máximo. Para hacer esto de manera precisa encontraremos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto máximo, como se presenta en la figura 3.

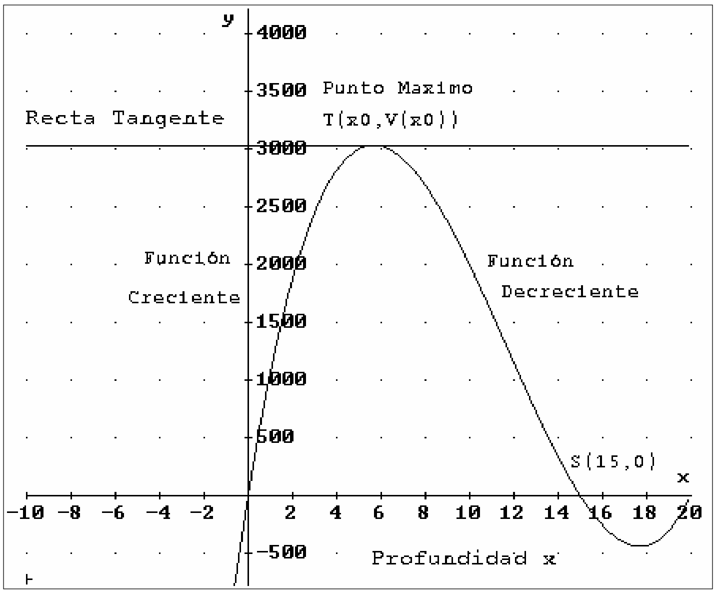


Figura 3. Recta tangente paralela al eje de las abscisas

f) Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.

El punto T(x_0 , v(x_0)) es el máximo de la función volumen, luego a la izquierda de T la función es creciente ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que f(x_1) < f(x_2), a la derecha del punto T entre los puntos T y S, la función es decreciente, ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que f(x_1) > f(x_2). Además, de la figura 2 observamos que la condición para que la función alcance su máximo, la pendiente de la recta tangente en el punto de tangencia T debe ser v'(x) = 0 (derivada de la función o razón de cambio instantánea).

Con la información dada, responde las siguientes preguntas:

¿Cómo es el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo? _______________

¿Cómo es el signo de la derivada entre los puntos T y S? ____________________

De acuerdo, el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo es positivo, y es negativo entre los puntos T y S. Por lo que podemos establecer las condiciones del primer criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada v'(x) de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

2. Resolver la ecuación v'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.

3. Analizar el signo de la derivada alrededor de cada uno de los valores críticos, primero para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando el signo no cambia, la función no tiene máximo ni mínimo para ese valor crítico considerado.

4. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al evaluarla en los valores críticos que dan los valores máximos o mínimos.

g) Aplicando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.

1. Aplica las fórmulas de la derivación y determina la derivada de la función volumen v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$. la derivada es v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200$.

2. Resuelve la ecuación f'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función volumen.
   v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200$, v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200 = 0$, para resolver la ecuación cuadrática, utilizamos la ecuación general de segundo grado, es decir,

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde a = 12, b = - 280 y c = 1200.

$$x = \frac{-(-280) \pm \sqrt{(-280)^2 - 4(12)(1200)}}{2(12)} \quad = \quad x = \frac{280 \pm \sqrt{20800}}{24}$$

$$x1 = \frac{280 + 144.222051}{24} = 17.67591879 \quad \text{y} \quad x2 = \frac{280 - 144.222051}{24} = 5.657414542$$

Los valores x_1 y x_2 son los valores buscados, sin embargo, x_1 no lo consideramos dado que su valor rebasa el rango de la profundidad de la caja.

3. Analiza el signo de la derivada alrededor de los valores críticos.

   Para el valor crítico x_2 = 5.657414542, consideremos los valores x = 5 y 6. Por lo que

   v'(5) = 12(5)^2 – 280(5) + 1200 = 300 – 1400 + 1200= 100 > 0.

   Por lo que v'(6) = 12(6)^2 – 280(6) + 1200 = 432 – 1680 + 1200= -48 < 0.

   Como el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, concluimos que la función

   tiene un máximo para el valor crítico x_2 = 5.657414542.

4. Calcular el valor máximo de la función.

   Máximo = v(5.657414542)

   = 4(5.657414542)^3 – 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542)

   = 3032.302466 cm^3.

h) Aplicando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema:

Sabemos que cuando una función es creciente su derivada es positiva y cuando es decreciente su derivada es negativa.
En este sentido, consideremos la función derivada v'(x) = 12x^2 – 280x + 1200 y elaboremos una tabla que contenga los valores con los datos de la profundidad que se muestran en la tabla 2.

De la tabla 2, observamos que la función derivada es decreciente desde 0 hasta el punto S, por lo que el signo de la derivada de la función derivada (o sea la segunda derivada) es negativo, es decir, v''(x) < 0, en cambio, la función derivada es creciente desde el punto S hasta +∞, luego el signo de la segunda deriva es positiva o sea v''(x) > 0.

Altura	Volumen	Altura	Volumen
x	v'(x)=12 x^2-280 x+1200	x	v'(x)=12 x^2-280 x+1200
0	1200	15	-300
1	932	16	-208
2	688	17	-92
3	468	18	48
4	272	19	212
5	100	20	400
6	-48		
7	-172		
8	-272		
9	-348		
10	-400		
11	-428		
12	-432		
13	-412		
14	-368		
15	-300		

Podemos establecer las condiciones del segundo criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada v'(x) de la función v(x) = 4 x^3 – 140 x^2 + 1200 x.
2. Resolver la ecuación v'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.
3. Hallar la segunda derivada.
4. Sustituir en la segunda derivada v''(x), en lugar de la profundidad, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el signo de la segunda derivada es negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando v''(x) = 0, no es aplicable el criterio, pero puede ser resuelto aplicando el primer criterio.
5. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al sustituir en la función v(x) los valores críticos.

6. Aplicando el segundo criterio de la derivada para la resolución del problema:

   1. Determinamos la primera derivada de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$, cuyo resultado es v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200$.
   2. Resolvemos la ecuación v'(x) = 0, es decir, $12x^2 - 280x + 1200 = 0$, para determinar los valores críticos de la función, la solución de acuerdo al criterio de la primera derivada es $x_2 = 5.657414542$.
   3. Hallamos la segunda derivada de la función volumen, cuyo resultado es
      v''(x) = $24x - 280$.
   4. Sustituimos el valor crítico $x_2 = 5.657414542$ en la segunda derivada, es decir, v''(5.657414542) = 24(5.657414542) – 280 = 135.777949 – 280 = -144.222051 < 0, por lo que la función v(x) tiene un máximo en el valor crítico en $x_2 = 5.657414542$.
   5. Máximo = v(5.657414542)
      = $4(5.657414542)^3 - 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542)$
      = 3032.302466 cm^3.

Por lo que las dimensiones de la caja que dan el máximo volumen se presentan en la tabla 3.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	$40-2x$	$30-2x$	$x(40-2x)(30-2x)$
5.657414542	28.68517092	18.68517092	3032.302466

Tabla 3. Dimensiones de la caja y volumen máximo.

La solución de los problemas de optimización los puedes resolver por cualquiera de los métodos descritos, ya que son aplicables para cualquier tipo de función.

Construir la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$, especificando:

A) Puntos máximos, mínimos y de inflexión.
B) Concavidades.
C) Trazado de la gráfica de la función.

Solución con el criterio de la segunda derivada.

1. Encontrando la primera derivada de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$. La derivada de la función es f'(x) = $3x^2 - 18x + 24$.

2. Resolviendo la ecuación f'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función. Por lo que:
   f'(x) = $3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = (x - 4)(x - 2) = 0$, como el producto de dos factores es cero, alguno es cero, resultando $x - 4 = 0$ y $x - 2 = 0$, obteniendo los valores críticos de la función $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$.

3. Encuentra la segunda derivada de la función $f(x)$ y resuelve la ecuación f''(x) = 0, para determinar las abscisas de los puntos de inflexión. La segunda derivada es f''(x) = $6x$ – 18, al resolver la ecuación f''(x) = 0 se tiene que $6x - 18 = 6(x - 3) = 0$, por lo que $x - 3 = 0$, donde $x_3 = 3$, es el valor solicitado.

4. Analizando los signos de la segunda deriva para los valores x_1 y x_2. Si el signo de la segunda derivada es negativa se tiene un máximo y la gráfica de la función es cóncava hacia abajo, en caso contrario se tiene un mínimo y es cóncava hacia arriba. Al sustituir el valor crítico $x_1 = 2$ en la segunda derivada, se obtiene f''(2) = 6(2) – 18 = 12 – 18 = -6 < 0, por lo que la función tiene un valor máximo en x_1 y es cóncava hacia abajo. Al sustituir el valor crítico $x_2 = 4$ en la segunda derivada, se obtiene f''(4) = 6(4) – 18 = 24 – 18 = 6 > 0, por lo que la función tiene un valor mínimo en x_2 y es cóncava hacia arriba.

5. Sustituyendo en la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ los valores críticos x_1, x_2 y en la abscisa del punto de inflexión, para determinar, el máximo, mínimo y punto de inflexión, tal como se especifica a continuación:
   Máximo = $f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) - 7 = 8 - 36 + 48 - 7 = 13$.
   Punto de inflexión = $f(3) = (3)^3 - 9(3)^2 + 24(3) - 7 = 27 - 81 + 72 - 7 = 11$.
   Mínimo = $f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) - 7 = 64 - 144 + 96 - 7 = 9$.

6. Sustituye algunos valores a la izquierda del valor crítico $x_1 = 2$ y a la derecha del valor crítico $x_2 = 4$ en la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$, para obtener otros puntos adicionales para un mejor trazado de la gráfica.

7. Construye la gráfica de la función. La gráfica debe ser como la mostrada en la figura 4.

Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

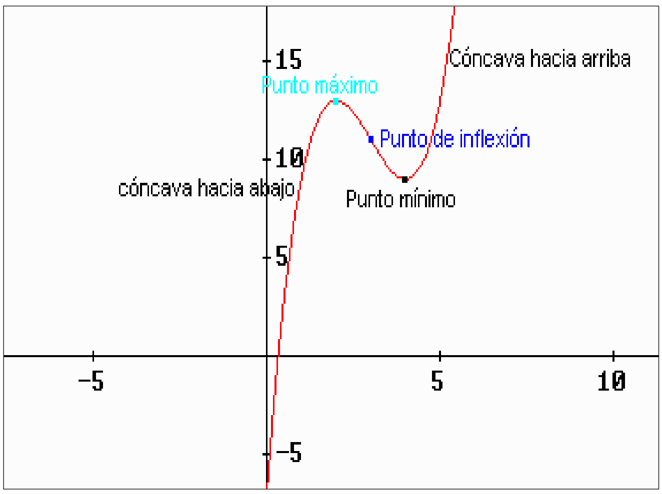


Figura 4

Ejercicios

Construye la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ y b) $f(x) = x^3 - 12x$, especificando:

a) Puntos máximos, mínimos y de inflexión.
b) Concavidades.
c) Trazado de la gráfica de la función.

Problemas de máximos y mínimos.

Minimizar el costo promedio

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$C = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

donde C es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción, será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

Solución. La cantidad para minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{C}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}$$

Aquí q debe ser positiva. Para maximizar $\bar{c}$, diferenciamos.

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}$$

Para obtener los valores críticos, resolvemos $\frac{d\bar{c}}{dq} = 0$:

$$q^2 - 1600 = 0:$$

$$(q - 40)(q + 40) = 0$$

$$q = 40 \qquad (\text{ ya que } q > 0)$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo, usaremos la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3}$$

$\dfrac{d^2(40)}{dq^2} \rangle 0$, por tanto en q=40 se en encuentra un mínimo

Maximización del número de beneficiarios de los servicios de salud

Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, en 1 años n miles de gente adulta recibiría beneficios directos, donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t, \qquad 0 \leq t \leq 12$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Solución: Haciendo $\dfrac{dn}{dt} = 0$, tenemos

$$\frac{dn}{dt} = t^2 - 12t + 32 = 0$$

$(t - 4)(t - 8) = 0$

$t = 4$ ó $t = 8$

Como el dominio de n es el intervalo cerrado [0,12] el valor máximo absoluto de n debe ocurrir en t = 0, 4, 8 ó 12.

Si t = 0, entonces n = 0

Si t = 4, entonces n = $\dfrac{160}{3} = 53\dfrac{1}{3}$

Si t = 8, entonces n = $\dfrac{128}{3} = 42\dfrac{2}{3}$

Si t = 12, entonces n = 96

Se tiene entonces un máximo absoluto en t = 12.

Ejercicios

1. Encuentra las dimensiones y el volumen de un cilindro circular recto de volumen máximo, entre los inscritos en una esfera de radio *a*.

Respuesta: $h = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$ y $v = \dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$

2. Encuentra las dimensiones y el volumen de un cono circular recto de volumen máximo, entre los inscritos en una esfera de radio *a*.

Respuesta: $h = \dfrac{4}{3}a$, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$ y $v = \dfrac{32}{81}\pi a^3$

3. Encuentra las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de radio *r*.

Respuesta: $ancho = \sqrt{2}r$ y largo $= \sqrt{2}r$

4. Se desea construir un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa, que tenga un volumen de 24π cm.^{3}. El material que se utiliza para la base cuesta tres veces más, que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, determina las dimensiones para las que es mínimo, el costo del material de fabricación.

Respuesta: h = 6 y r = 2.

5. Una compañía especialista en cocinas, determina que el costo de producir y empacar x molinos de pimienta al día es $0.001x^2 + 0.02x + 500$ unidades monetarias. Si cada molino se vende a $8.00 (dólares). ¿Cuál será la producción que proporcione la ganancia máxima? ¿Cuál es la ganancia máxima diaria?

Respuesta: $x = 3990$ molinos, ganancia = $15420.10

6. ¿Cuál es el punto sobre la curva $f(x) = x^2$, más cercano al punto P(0,2)?

Respuesta: $R\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $Q\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$

7. Una persona tiene 600 metros de alambre que va a utilizar para cercar un terreno rectangular subdividiéndolo después en dos parcelas con una cerca paralela a uno de los lados. De todos los terrenos posibles que se pueden cercar de esta forma, ¿Cuáles son las dimensiones del qué tiene área máxima?

Respuesta: 100 y 150 metros.

8. Una agencia de viajes calcula que para vender x "paquetes de vacaciones", el precio del paquete debe ser de $1800-2x$ unidades monetarias para $1 \leq x \leq 100$. El costo para la agencia de x paquetes es de $1000 + x + 0.01x^2$. Encuentra:

    a) La función de ingreso

b) La función de ganancia
c) El número de paquetes que producen la máxima ganancia

9. Un fabricante determina que para vender x unidades de un producto, el precio de venta de una unidad debe ser de 400-0.05 x unidades monetarias. El costo de producción de x unidades es de 500 + 10 x. Encuentra:

   a) La función de ingreso
   b) La función de ganancia
   c) El número de unidades que producen la máxima ganancia
   d) La ganancia máxima.

10. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio *a*, de manera que dos de sus vértices estén sobre el diámetro del semicírculo.

    Respuesta: $base = \sqrt{2}a$ y $altura = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

11. El propietario de un huerto de manzanas calcula que si siembra 24 árboles por hectárea, cada árbol adulto dará 600 manzanas por año. Por cada 3 árboles más que plante por hectárea, el número de manzanas que produce el árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por hectárea para obtener al mayor número posible de manzanas al año?

    Respuesta: x = 21.

12. Encuentra el punto de la gráfica y = x^2 +1 más cercano al punto P(3,1).

    Respuesta: A(1,2).

13. Una partícula se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 60m/seg. después de t segundos, su altura sobre el nivel del suelo está dada por $s(t) = 60t - 5t^2$. Calcula la velocidad después de t segundos y la velocidad instantánea en t = 1 y t = 3.

    Respuesta: 50 y 20mt/seg.

14. Durante el periodo de 1950 a 1970, el Producto Interno Bruto (PNB) de cierto país se encontraba dado por la fórmula $p(x) = 5 + 0.1x + 0.01x^2$ en miles de millones de dólares (aquí la variable x se utiliza para medir los años, con x = 0, corresponde a 1950 y x = 20 a 1970). Determina las tasas de crecimiento instantáneas del PNB en x = 1950, x = 1960 y x = 1970.

    Respuesta 0.1, 0.3 y 0.5.

15. Encuentra todos los puntos en la gráfica de $y = x^2 - 3x + 7$, donde la recta tangente es paralela a la recta $x - y + 4 = 0$.

    Respuesta: $P(2,5)$.

Bibliografía sugerida

Bittinger, Marvin. Cálculo para Ciencias Económico- administrativas. Séptima edición, Addison-Wesley, Colombia, 2002.
Goldstein, L. J. et. al. Cálculo y sus aplicaciones, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1987.
Hughes, Deborah et. al. Cálculo Aplicado, CECSA, México, 2002.
Salinas, Patricia, et. al. Elementos del Cálculo, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2004.
Stewart, James, Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, Thomson – Learning, Cuarta Edición, 2001.
Stein, Sherman y Barcellos, A. Cálculo y Geometría Analitíca. 1, McGraw–Hill, Colombia, 1995.
Warner, Stefan y Costenoble, Steven. Cálculo Aplicado. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

Lecturas educativas

Filloy, Eugenio et. al. Matemática Educativa. Fondo de Cultura Económica, México, 2003.
"El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial".
Cantoral, Ricardo. Matemática Educativa. Un Estudio de la formación social de la analiticidad. Grupo Editorial Iberoamérica, México,

Bibliografía adicional

Granville, W. A. Cálculo Diferencial e Integral. Noriega Editores y Limusa, México 1991.
Swokowski, E. W. Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, Segunda edición, 1987.
Jagdish, C. at. al. Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía, Prentice-Hall-Hispanoamericana, Tercera Edición, México, 1992.