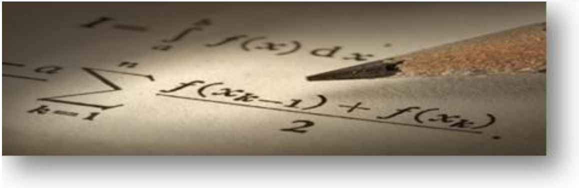


Matemáticas

para administración y economía

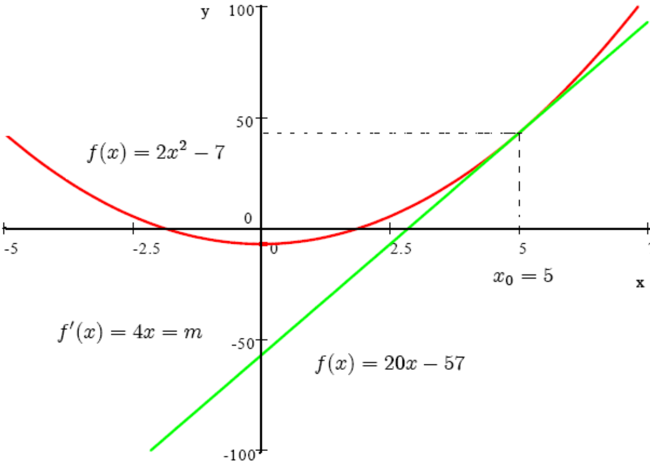
Ernest F. Haeussler, Jr.* Richard S. Paul

Unidad de Diseño Instruccional (UDI)
CUCEA U de G

Unidad III

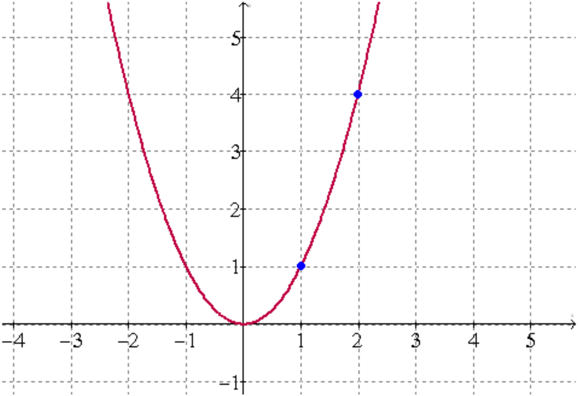
(Capítulo 10 del texto)

Derivada de una función



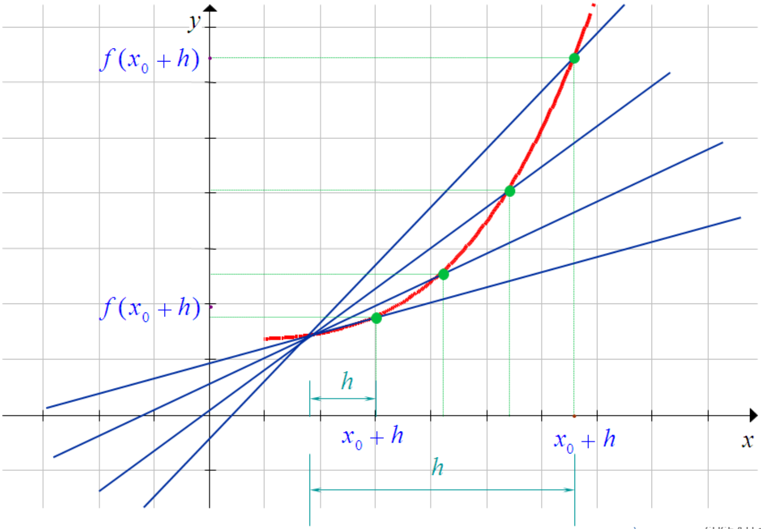
¡Reflexión!

¿Cómo determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2$ en $x = 1$ ó $x = 2$ ó en cualquier otro punto?

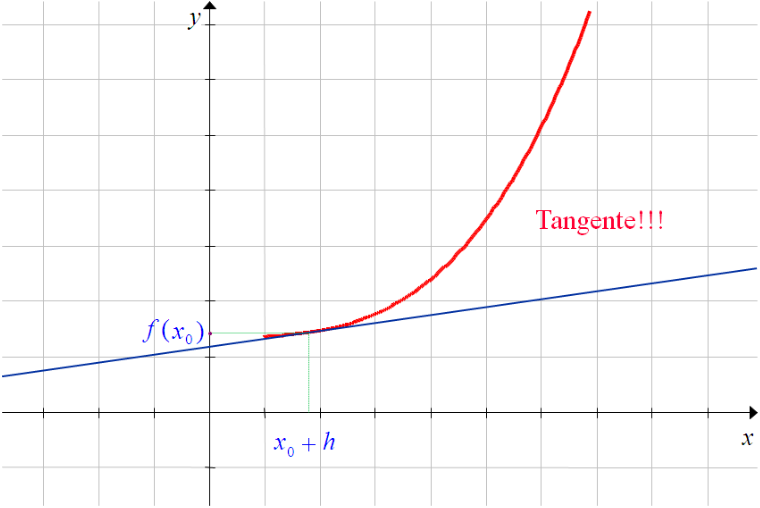


Empecemos por la pendiente de la recta secante a la gráfica de una función $y = f(x)$ en $x = x_0$.

Solución Interactiva:



Solución Interactiva:



Pendientes (Definición)

Pendiente de la recta secante

Note que: $$m_{L_s} = \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

Pendiente de la recta tangente

En el límite, cuando $h \longrightarrow 0$, la recta secante se confunde con la recta tangente en x_0, y podemos decir que:

$$m_{L_T} = \lim_{h \to 0} m_{L_s} = \lim_{h} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

Razón de cambio

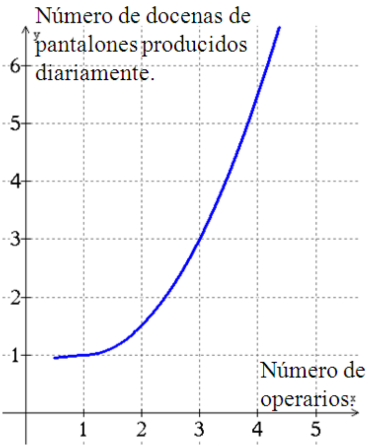
Recuerde que el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

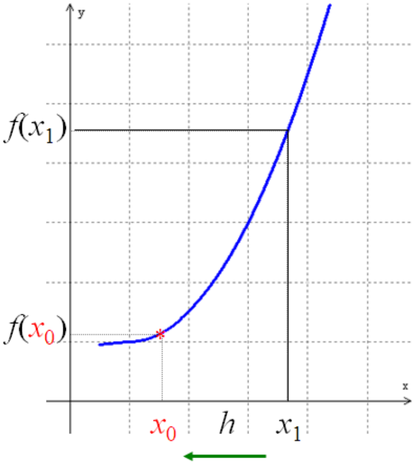
se llama *razón de cambio promedio* de y respecto a x.

Del gráfico ¿cuál es la razón de cambio promedio de y al emplear

1. De $x = 1$ a $x = 4$ operarios?
2. De 1 a 3?
3. De 1 a 2?



Razón de cambio instantánea



Note que si $x_1 = x_0 + h$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se llama *razón de cambio instantánea* de y con respecto a x en $x = x_0$.

La derivada en un valor x_o

La derivada de la función f respecto de la variable x, en x_0 se denota por $f'(x_0)$ y se define por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

Se dice que $f(x)$ es derivable en x_0 si existe $f'(x_0)$. Al proceso de calcular la derivada se le denomina derivación.

Notación $\qquad f'(x_0) = \dfrac{d}{dx} f(x_0)$

La derivada de una función f en x_0 es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en x_0

La razón de cambio instantánea de la función f en x_0

La f en cualquier x
Definición de la derivada

La derivada de la función f respecto de x se denota por f' se define por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se dice que $f(x)$ es derivable en x si existe $f'(x)$

Notación $\quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = y' = \frac{d}{dx} y$

Ejemplo

1. Usando la definición, determine las expresiones de la derivada de las siguientes funciones:

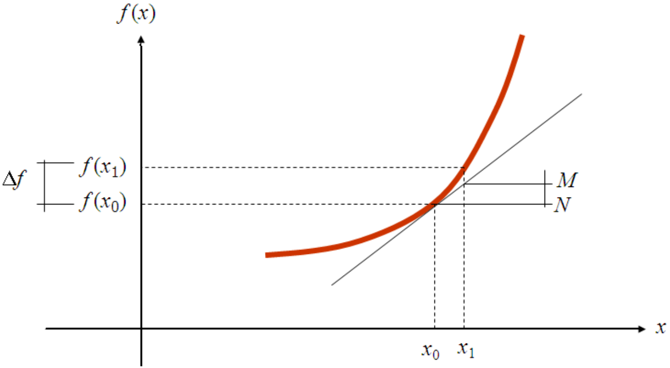
- $f(x) = x$
- $f(x) = x^{-1}$
- $f(x) = x^2$

2. Obtenga la ecuación de la recta tangente a las gráficas de las funciones en $x = 2$:
   - $f(x) = x^2$
   - x^{-1}

Diferenciación de funciones por incrementos

¡Reflexión!

Si el nivel de producción de un fábrica es de 10 unidades, ¿cómo podríamos determinar en forma aproximada el costo de producción de la undécima unidad sin tener que producirla?



Del gráfico se puede afirmar que $\Delta f \approx MN$

Diferenciación de funciones por incrementos

$$\text{Entonces,}\quad \Delta f \approx MN = \frac{MN}{\Delta x}.$$

$$\Delta x = f'(x)\Delta$$

Entonces, podemos decir que:

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x$$

Ejemplo:

Estime el cambio de $f(x) = x^3$, cuando x varía de 2 a $2{,}1$

Ejemplo

Suponga que el costo total C, en soles, de fabricar q unidades de cierto artículo es $C(q) = 10 + 5q + 3q^2$. Si el nivel actual de producción es 30 unidades, estime cómo cambiará el costo total si se producen $29{,}5$ unidades.

La derivada como razón de cambio

¡Reflexión!

De dos empresas competidoras **A** y **B** se conocen sus funciones utilidad respectivas $U_A(q)$ y $U_B(q)$, donde $U_A(20) = U_B(10)$.

$$\text{Si se tiene } \quad \frac{dU_A(20)}{dq} = 2 \text{ dólares/unidad} \quad \text{y}$$

$$\frac{dU_B(10)}{dq} = 2 \text{ dólares/unidad}$$

¿Qué empresa fue más eficiente en la obtención de sus utilidades?

Razón de cambio porcentual

Si consideramos el cociente

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

tenemos un medio para comparar la razón de cambio de f consigo misma. Esta razón se llama razón de cambio relativa de f.

Si multiplicamos las razones de cambio relativas por 100 obtenemos las razones de cambio porcentuales.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100$$

Ejemplo

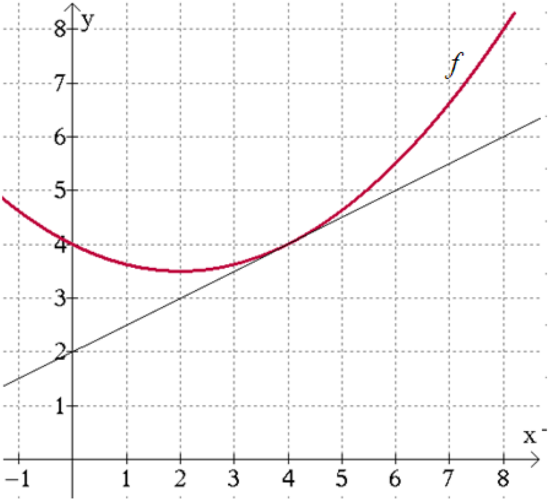
Se estima que dentro de t años, la circulación de un periódico local será:

$$C(t) = 100t^2 + 400t + 5000 \quad \text{unidades}$$

1. ¿A qué razón cambiará la circulación dentro de 5 años?
2. ¿Cuál es la razón de cambio porcentual de la circulación dentro de 5 años?

Ejemplo

Determine la razón de cambio porcentual de f en $x = 4$



Diferenciabilidad y continuidad

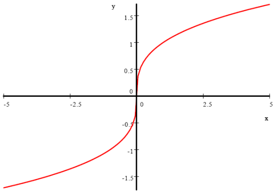
Si una función f es derivable en el punto $P(x_0; f(x_0))$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ tiene una tangente no vertical en P y en todos los puntos *cercanos* a P.

Esto indica que una función f es continua en cualquier punto donde sea derivable, ya que una gráfica no puede tener un *hueco* o *vacío* en ningún punto donde pueda dibujarse una recta tangente.

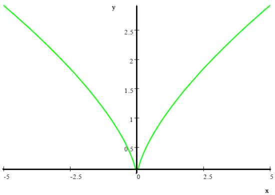
Diferenciabilidad y continuidad

Es importante saber que: una función continua no necesariamente es derivable en todos los puntos.

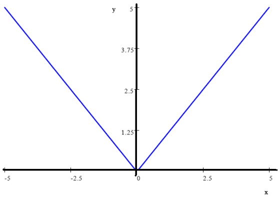
Se muestra la gráfica de tres funciones continuas en $x = 0$, pero a pesar de ello, no son derivables en $x = 0$



La graficas de la curva $y = x^{1/3}$ presenta una línea tangente vertical en $x = 0$



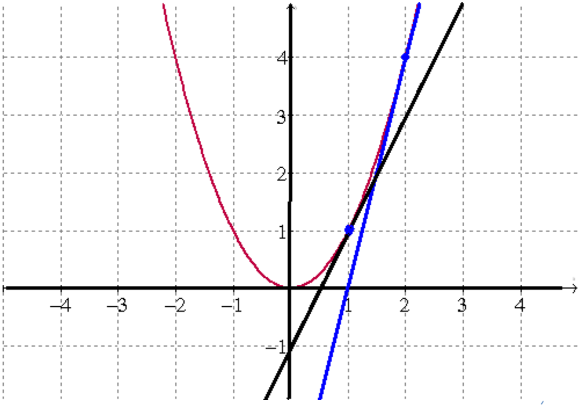
La graficas de la curva $y = x^{2/3}$ presenta una cúspide en $x = 0$



La graficas de la curva $y = |x|$ presenta un punto ánguloso cuando $x = 0$

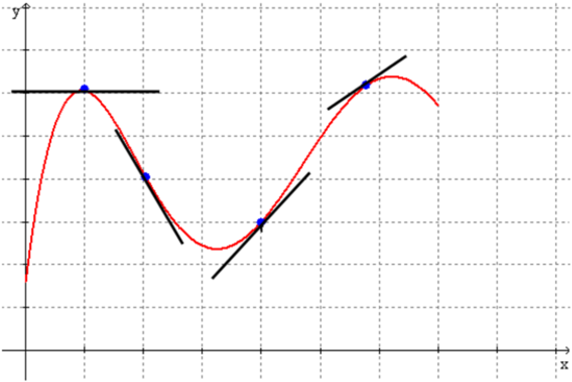
Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, ¿alrededor de qué punto $(1;1)$ o $(2;4)$, la gráfica cambia con mayor rapidez?



Ejemplo

Dado el gráfico de la función f.



Ordene de menor a mayor los siguientes valores: $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(4)$ y $f'(5,8)$

Reglas básicas de derivación

1. Si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = mx + b$, entonces $f'(x) = m$
3. Si $f(x) = x^r$, entonces $f'(x) = rx^{r-1}$

Reglas básicas de derivación

Si f y g son funciones diferenciables y c es una constate, entonces:

1. $$\frac{d}{dx}\left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot f'(x)$$

2. $$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = f'(x) \pm g'(x)$$

3. $$\frac{d}{dx}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = f'(x) \cdot g(x) + g'(c) \cdot f(x)$$

4. $$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

La regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x, y

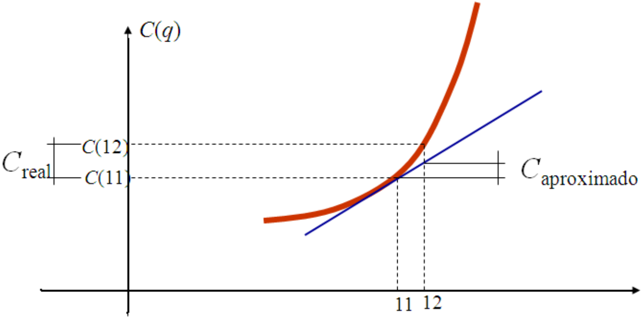
$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \cdot \frac{d}{dx}u$$

Notación funcional

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Aplicaciones (CEA[1]) Costo marginal

Consideremos la función Costo total $C(q)$



La pendiente de la recta tangente en $q = 11$ es la derivada del costo total en $q = 11$

Esta pendiente es numéricamente igual al cociente

$$\frac{C_{\text{aproximado}}}{12 - 11} = C_{\text{aproximado}}$$

[1] ciencias económico administrativas

Aplicaciones (CEA)

Costo marginal

De los párrafos anteriores se puede deducir que

$$C'(11) = Costo_{\text{aproximado de la unidad 12}}$$

A este costo aproximado se le conoce como el costo marginal de producir la doceava unidad o el costo marginal de producir 11 unidades.

En general podemos decir que :

$$C'(q) = C_{\text{aproximado de la unidad } q+1}$$

Aplicaciones (CEA)

Definición

La función costo marginal CM es la derivada $C'(q)$.

$$\text{Costo marginal} = \frac{d}{dq}C(q)$$

Las unidades del costo marginal son las del costo por artículo. Se interpreta a $C'(q)$ como el costo aproximado de producir un artículo adicional a q unidades.

Aplicaciones (CEA)

Definición

El ingreso marginal IM es la derivada del ingreso $I(q)$ respecto a q. Esto es:

$$IM = \frac{d}{dq} I(q)$$

La utilidad marginal UM es la derivada de la utilidad $U(q)$ respecto a q. Esto es:

$$UM = \frac{d}{dq} U(q)$$

Ejemplo

Una empresa que fabrica relojes tiene una función de costos

$$C(x) = 1500 + 3x + x^2,$$

donde x es el número de unidades producidas y C es el costo en dólares. Halle:

1. El costo marginal cuando $x = 20$. Interprete el resultado.
2. El costo real al fabricar la vigésima primera unidad.

Ejemplo

Suponga que la ecuación de demanda para el Club de Salud es:

$$q = -0{,}06p + 46$$

en la que p es la cuota anual en dólares y q es la cantidad de socios al año. Suponga que cada nuevo socio cuesta \$100 anuales al Club de la Salud por concepto de exámenes médicos y entrenamiento personal. Determine:

1. Las funciones de ingreso y utilidad marginal.
2. La utilidad marginal para $q = 15$ y $q = 20$ e interprete los resultados.