INDICE

PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

1.- Calcula los siguientes porcentajes (sin calculadora)

a.- 12 % de 5.000
b.- 20 % de 3.500
c.- 45 % de 12
d.- 2 % de 1.000.000

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a.- $\left((1.000.000 / 500.000) - 1 \right) = X$

b.- $3x + 18 = 0$

c.- $3 (x - 1) + 12 = 2x$

d.- $1.000 = 500 (1 + i)^{12}$

e.- $500 = C (1 + 0{,}02 \times 8)$

f.- $1.000.000 = R \left((1 - 1{,}01^{6}) / 0{,}01 \right)$

3.- Supón que tienes dos alternativas para invertir tu dinero:

a.- Depósito Bancario

b.- Comprar una micro del año 1970

Señala los aspectos positivos y negativos de cada alternativa (utiliza los conocimientos posees).

4.- Si depositas $ 200.000 al 2 % mensual, durante 5 años. ¿ Cuánto ganas por hacer el depósito?

INTRODUCCIÓN

En la empresa como en la vida personal, constantemente se debe tomar decisiones. Decisiones de distinta naturaleza. Decisiones relacionadas con el hacer o el dejar hacer. Para tomar una decisión, es necesario que el tomador de decisiones, disponga de la mayor cantidad de información, conozca los métodos o herramientas que están relacionados con el problema de decisión, de tal modo, que la elección del curso de acción a adoptar, sea el correcto.

Con frecuencia una persona o empresa se enfrenta al problema: ¿Qué hacer con cierto dinero?, ¿Qué decidir entre alternativas mutuamente excluyente?, ¿Cuál alternativa genera mayor rentabilidad o ganancia?, ¿Cuál alternativa de financiamiento es la más económica?, ¿Cómo comprobar que lo que me cobra una institución financiera es lo correcto?, etc.

En este sentido, las **MATEMÁTICAS FINANCIERAS** constituyen un conjunto de herramientas, de métodos y procedimientos que ayudan a la toma de decisiones, en materia de obtención y uso del dinero.

Las técnicas, métodos y procedimientos que serán tratados en el presente módulo, requieren del dominio de algunos conocimientos básicos de matemáticas puras, como por ejemplo, el saber: resolver una ecuación (principalmente de primer grado), calcular el logaritmo de un número, obtener su raíz enésima, etc.

A pesar, que para determinar una fórmula, se requiere utilizar los conceptos de sumatoria, productoria, progresión geométrica, progresión aritmética, limites, y derivadas entre otras. La utilización de la fórmula no exige el dominio perfecto de los temas señalados anteriormente.

El conocer los distintos tópicos que comprende las matemáticas financieras, permitirá disponer de un valioso conjunto de herramientas a aquellas personas que directa o indirectamente, o que potencialmente deban manejar dinero, para optimizar su uso, de tal modo, de maximizar las utilidades o minimizar las pérdidas.

Para poder adquirir el conjunto de herramientas que te permitan en algún momento ayudar a la toma de decisiones, es recomendable que vayas aprendiendo las materias paulatinamente. Si al enfrentarte a una prueba más adelante y te das cuenta que no dominas ciertos conceptos o has respondido en forma errónea, *vuelve a repasar el tema. No cometas el error de seguir avanzando, porque el vacio que puedas tener se convertirá en un gran hoyo.*

Debes tener presente, que para resolver un problema financiero pueden existir una o varias formas. Cada una de ellas requerirá, a lo mejor, sólo usar algunas técnicas o fórmulas, las cuales serán tratadas en el módulo. Tú debes ver cuál o cuáles del conjunto de herramientas que dispones has de utilizar. Es decir, para enfrentar un problema financiero no existe un procedimiento único. Además de ello, debes basarte principalmente en tu criterio y en tus habilidades lógicas. Es recomendable no memorizar ni las fórmulas ni procedimientos. Si lo haces te estarás mecanizando, y un pequeño cambio en un problema de decisión podría significar no solucionarlo o hacerlo en forma errónea.

¿EMPECEMOS?

CAPÍTULO N° 1

INTERÉS SIMPLE E INTERÉS COMPUESTO

OBJETIVOS:

Al término del capítulo, tú estarás capacitado para:

1.- Calcular el interés simple y el interés compuesto de un préstamo o depósito.

2.- Calcular el monto de un préstamo a interés simple y a interés compuesto

3.- Determinar el tiempo de uso del dinero, como la fecha de vencimiento de una obligación

4.- Transformar la tasa de interés de un período a otro, a interés simple y a interés compuesto.

1.1 SUPUESTOS BÁSICOS DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Al enfrentarnos a cualquier problema financiero, el tomador de decisiones deberá tener presente los siguientes supuestos:

1.- Costo de Oportunidad
2.- Valor del Dinero en el Tiempo

1.1.1 Costo de Oportunidad

El problema de decisión, consiste en que para lograr un determinado objetivo, existen varios cursos de acción alternativos, cada uno de ellos tienen sus beneficios y costos. El tomador de decisiones deberá elegir aquel curso de acción que le permita obtener mayores beneficios netos (ingresos menos costos). Estos beneficios y costos pueden corresponder a aspectos cuantitativos (intereses ganados o pagados), como cualitativos (agilidad en la tramitación, calidad en la atención, etc.). El problema de estos últimos, es que son altamente subjetivos.

Por ejemplo:

Una persona desea comprar un televisor. No tiene el dinero necesario para comprarlo al contado, por tal motivo tiene dos alternativas:

➘ a.- Juntar el dinero, para que en una fecha futura compre el televisor pagándolo al contado (inclusive puede obtener un rebaja en el precio).

➘ b.- Comprar hoy el televisor a crédito, pagando cuotas mensuales durante cierto tiempo.

Si se decide por la alternativa b, es decir, comprar al crédito el televisor, el beneficio será usar y gozar el aparato inmediatamente. El costo será pagar más dinero por el televisor dado por los intereses que genera el crédito y también por no tener la posibilidad de una rebaja en el precio del producto.

La alternativa a) también tiene sus beneficios y costos *!Identifíquelos!*).

Si la persona elige la alternativa a) significa que para ella los beneficios netos que le reporta esa alternativa son mayores que los beneficios netos de la alternativa b). En la elección de la alternativa a) se debió tener presente los beneficios que le hubiese reportado el elegir la alternativa b). Estos beneficios desde el punto de vista de la alternativa a) son considerados como costos, en otras palabras, se sacrifica los beneficios que proporciona la alternativa b) por elegir la alternativa a). Estos costos reciben el nombre de *costo de oportunidad.*

Es decir, se entiende por **costo de oportunidad** ***los beneficios que habría generado la mejor alternativa de aquellas descartadas, producto de la elección adoptada por el tomador de decisiones.*** ***S***iempre cuando se ha de adoptar una decisión es necesario tener presente el costo de oportunidad.

Si por ejemplo una persona tiene la disyuntiva de depositar cierta cantidad de dinero o dejarlo guardado "debajo del colchón". Si decide por esta última alternativa su costo de oportunidad sería el dejar de ganar los intereses que generaría el depósito.

1.1.2 Valor del Dinero en el Tiempo.

En la práctica, siempre es posible invertir el dinero, ya sea en un banco, en fondos mutuos o inclusive prestárselo a algún amigo. En cualquiera de los casos el dinero podrá generar mas dinero (intereses), lo que lleva a concluir que **EL DINERO TIENE DISTINTO VALOR EN EL TIEMPO**, o que **UN PESO HOY TIENE MAYOR VALOR A UN PESO DE MAÑANA.**

Si observamos la gráfica siguiente:

```
$   100                              $  100
    |________________________________|
    0                                 1   mes
```

Esta puede representar dos cuotas de $ 100 cada una, la primera vence el día de hoy (o tiempo 0) y la segunda vence al cabo de 1 mes.

En la presente situación, los $ 100 a pagar hoy tienen un mayor valor que los $ 100 a pagar dentro de 1 mes. Esto debido a que los $ 100 de hoy se pueden invertir a una determinada tasa de interés o de rentabilidad (por ejemplo 2% mensual). Durante el periodo de 1 mes dicha inversión generaría una ganancia de $ 2, transformando los $ 100 hoy a $ 102 al cabo de 1 mes, es decir , los $ 100 hoy no valen $ 100 mañana sino $ 102, en otras palabras **UN PESO HOY ES MAYOR A UN PESO DE MAÑANA.**

En este momento tú podrías pensar que el dinero tiene distinto valor en el tiempo, producto del proceso inflacionario que pueda existir en un país. Y estarías pensando correctamente.☺ La inflación provoca pérdida del poder adquisitivo del dinero, haciendo que el dinero futuro tenga un menor valor real (o poder de compra), que el dinero de hoy. Pero como el objetivo del presente modulo es que tú vayas aprendiendo paulatinamente, todo el tema inflacionario en la toma de decisiones será tratado más adelante, por ahora, se supondrá que estamos viviendo en un país sin inflación.

Es decir ,si hoy con $ 100 puedes comprar un chocolate, dentro de cinco años con los mismos $ 100 podrás comprar también un chocolate con las mismas características.

Como te has podido dar cuenta ambos supuestos están estrechamente relacionados

1.2 INTERESES

Supón que tienes en tu poder cierta cantidad de dinero, supongamos $100.000. A este dinero le puedes dar muchos usos, gastarlo o invertirlo. Cuando hablamos de invertirlo, estamos diciendo de usarlo en algo, de tal modo, de obtener alguna ganancia por ello. Si lo invertimos en un depósito bancario a 30 días. En este caso, el banco usará tú dinero, se constituirá en un deudor, y tu serás el acreedor. El banco por usar dinero ajeno (tú dinero), deberá pagar cierta cantidad de dinero, llamado renta o intereses. Supongamos que la ganancia, renta o intereses que genera el deposito por 30 días es de $ 1.000.

Grafiquemos la siguiente situación:

I = $ 1.000

$ 100.000 ——————————————— $ 101.000

Hoy ——————————————— 30 días

1.2.1 CONCEPTO DE INTERÉS

Entenderemos por **interés (I)**, ***desde el punto de vista del deudor, la renta que se debe pagar por el uso del dinero tomado en préstamo. Y desde el punto de vista del acreedor, la renta que se tiene derecho a cobrar cuando se presta dinero. En otra palabras, se entiende como el costo del dinero. Es lo que el deudor debe sacrificar por usar dinero ajeno.***

Quien pide prestado $ C hoy, debe devolver mañana $ (C + I), donde I es el interés en pesos (o cualquier otra unidad monetaria).

Quien presta $ C hoy, tiene derecho mañana a la devolución de $ (C + I)

1.2.2 FACTORES QUE DETERMINAN LA CUANTÍA DEL INTERÉS.

El interés acumulado por un préstamo, sin pagos intermedios, es función de cuatro factores:

- 1.-**CAPITAL O PRINCIPAL (C)** : Suma de dinero originalmente prestado o pedido en préstamo, en el ejemplo $ 100.000.

- 2.-**TIEMPO (t):** Es el número de unidades de tiempo para el cual se calculan los intereses. En la bibliografía existente, generalmente, la unidad de tiempo es anual. Pero también puede ser mensual, semestral, etc. En el ejemplo, el tiempo es de 30 días.

- 3.-**TASA DE INTERÉS (i):** Es el interés por unidad de tiempo, expresado como tanto por ciento (%) o tanto por uno del capital.(Generalmente las tasas se expresan en términos mensuales o anuales).

La relación entre estos tres factores mencionados (**C, t , i**), y el Interés (**I**), es siempre directa. Por ejemplo, mientras mayor sea el capital invertido, mayor será el interés que genere (para una misma tasa de interés y tiempo).

Para realizar los cálculos siempre la tasa de interés debe utilizarse en tanto por uno, es decir, la tasa dividida por 100. Por ejemplos la tasa de interés es del 2%, se debe utilizar 2 / 100 = 0,02.

- 4.-**MODALIDAD DEL INTERÉS**: La cuantía del interés va a depender si la operación es a interés simple o a interés compuesto. Estas son dos modalidades de cálculo que se diferencian en la base de aplicación de la tasa de interés.

  ⌧ **Interés Simple**: En este método, la base de cálculo corresponde al capital inicial otorgado en préstamo. Los intereses que se generan no se transforman en capital, por tal motivo, los intereses resultantes para los distintos periodos de tiempo son iguales:

Por ejemplo, si depositas $ 200.000 al 10 % anual, durante un periodo de 3 años.

Esta situación la podemos representar en una recta de tiempo:

$ 200.000
|____________|____________|___________|
0 I = 2O.000 1 I = 20.000 2 I 20.000 3 años

i = 10 % anual

- ***Explicación***: Durante el primer año los $ 200.000 generan intereses por $20.000. Para el segundo año, el capital que sirve de base sigue siendo los $200.000, por lo tanto el interés resultante es de $ 20.000, igual que en el primer período. Para el tercer año ocurre lo mismo (C = $ 200.000, I = $20.000). En otras palabras, el interés que se genera para un período de tiempo, en este caso, un año, se obtiene de multiplicar el capital relevante por la tasa de interés (expresada en tanto por uno).

Interés para un periodo de tiempo (un año)

CAPITAL (C) x TASA DE INTERÉS (i) = INTERÉS (I)

C x i = I

$ 200.000 x 0,10 = $ 20.000

- **Interés Compuesto**: Esta modalidad de cálculo de interés consiste, en que el interés que genera el capital para un período de tiempo se capitaliza, es decir, se transforma en capital. Por lo tanto, para el periodo siguiente, el capital relevante será el capital inicial más el interés resultante del primer periodo, generando con ello, un interés mayor en el segundo periodo, el cual también se capitaliza. Es decir, en interés compuesto, los intereses en los distintos periodos son diferentes y crecientes (los intereses se calculan sobre intereses).

Supongamos que el problema anterior, se pactó a interés compuesto.

$ 200.000 220.000 242.000 266.200
|_____________|______________|_____________|
0 I_1 = 20.000 1 I_2 = 22.000 2 I_3 = 24.200 3 años

i = 10 % anual

PERIODO	CAPITAL RELEVANTE (C)	INTERÉS (I) C x i	CAPITAL ACUMULADO
1	$ 200.000	$20.000	$ 220.000
2	220.000	22.000	242.000
3	242.000	24.200	266.200

Respuesta:

En interés compuesto los intereses se capitalizan, generando mayores intereses en los periodos siguientes, en cambio, en interés simple no existen las capitalizaciones, por lo tanto, los intereses para los periodos siguientes son iguales al primer periodo.

En términos generales, el interés simple se relaciona con operaciones de corto plazo, y el interés compuesto con operaciones de mediano y largo plazo.

En un crédito con pagos intermedios de capital y / o intereses, la forma de pago, es otro factor que afecta la cuantía de interés acumulado.

1.2.3 OPERACIONES A INTERÉS SIMPLE

En esta modalidad de interés, mientras no varíe el capital pendiente de pago, durante el periodo de aplicación de la tasa de interés, el interés que se devengue por "unidad de tiempo", en ese periodo, será siempre el mismo.

Si recuerdas en el ejemplo anterior, el capital solicitado en préstamo era de $200.000, la tasa de interés aplicada para un periodo de un año era de un 10 % y el tiempo de uso del dinero, 3 años.

C = $ 200.000

i = 10% anual

t = 3 años

Como la tasa de interés corresponde a un periodo de un año, durante el tiempo de uso del dinero de 3 años, habrá tres periodos de generación de intereses (n = 3). Si la tasa de interés se hubiese pactado mensualmente, **n** sería 36, porque en un periodo de tres años se producirían 36 periodos mensuales de generación de intereses. Es decir **n** es el número de periodos de generación de intereses en el tiempo de uso del dinero. Por lo tanto, de ahora en adelante solo usaremos **n**.

1.2.3.1 *INTERÉS SIMPLE ACUMULADO*

Siguiendo con el problema anterior, el interés para un año es de $ 20.000, el interés acumulado hasta el segundo año es de $ 40.000, y el interés acumulado hasta el tercer año es de $ 60.000.

Interés acumulado al primer año:

$ 20.000	(20.000 x 1)	**C x i x 1**

Interés acumulado al segundo año:

$ 40.000	(20.000 x 2)	**C x i x 2**

Interés acumulado al tercer año:

$ 60.000	(20.000 x 3)	**C x i x 3**

Por lo tanto, si se quiere determinar el interés acumulado para n periodos, el interés que genere el capital, para un periodo (C x i), se debe multiplicar por el número de periodos (n)

$$\boxed{\mathbf{I = C \times n \times i}}$$

Aplicando la fórmula en el problema. Si deseamos invertir el capital por un periodo de tres años, el interés resultante ascendería a :

$$I = 200.000 \times 3 \times 0{,}10$$

$$I = \$\ 60.000$$

La presente fórmula nos permite determinar el interés acumulado para cualquier tiempo. Pero además, conociendo el interés acumulado es posible determinar:

- a.- El ***tiempo*** necesario para generar dicho interés (conociendo el capital y la tasa de interés pactada);

- b.- La ***tasa de interés*** necesaria para generar dicho interés (conociendo capital y número de periodos de uso del dinero);

- c.- El ***capital*** o principal necesario para generar dicho interés (conociendo i y n).

Debes tener presente, que siempre el tiempo de la tasa de interés debe coincidir con el tiempo que indica **n**. Es decir, si la tasa de interés es anual, los periodos de uso del dinero (n) deben ser anuales. Si **i** es mensual**, n** debe ser también mensual.

Si te enfrentas a un problema en que la tasa de interés pactada es anual y el tiempo del uso del dinero esta dado en términos mensuales, por ejemplo i = 10% anual, y el tiempo de uso del dinero es de 6 meses. Tienes dos alternativas para trabajar:

- 1.- Operar con **i** en forma anual, y transformar el tiempo a año, es decir, 0,5 año (6 / 12).

- 2.- Operar con los **n** en forma mensual (6), y transformar **i** a mensual. (tema tratado más adelante).

Ejercicio 1.1

De la fórmula planteada anterior (I = C x n x i), obtén las fórmulas necesarias para calcular n, i y C .

Respuesta:

$$n = I / (C \times i)$$

$$i = I / (C \times n)$$

$$C = I / (n \times i)$$

PRUEBA Nº 1

Juan Pérez solicita en préstamo $ 300.000 a una tasa de interés del 2,2% mensual.

- a.- Determina el interés acumulado para un periodo de:

  1.- 3 meses
  2.- 9 meses
  3.- 2 años
  4.- 2 años y 5 meses.

- b.- Determina el interés acumulado para un año, si la tasa de interés es de un 6 % semestral.

- c.- ¿ Qué cantidad de dinero deberá invertir para que en un lapso de 10 meses, se genere un interés de $ 18.000?.

- d.- ¿Cuál deberá ser la tasa de interés mensual para que en un plazo de 2 años, el interés resultante sea la cuarta parte del capital inicial.

- e.- Determina el interés que genera la obligación durante el 5º mes.

Pauta de Corrección:

a.- C = $ 300.000 i = 2,2% mensual

a_1	n = 3 meses	I = 300.000 x 0,022 x 3	=	$ 19.800
a_2	n = 9 meses	I = 300.000 x 0,022 x 9	=	$ 59.400
a_3	n = 2 años	I = 300.000 x 0,022 x 24	=	$ 158.400
a_4	n = 2 años, 5 meses	I = 300.000 x 0,022 x 29	=	$ 191.400

b.-
c = 300.000
i = 6% semestral
t = 1 año
n = 2 semestres

I = C x n x i
I = 300.000 x 0.06 x 2
I = $ 36.000

c.-
C = ?
n = 10
i = 2,2% mensual
I = $ 18.000

$ 18.000 = C x 10 x 0,022
$ 81.818 = C

d.-
i = ?
n = 2 años (24 meses)
I = C/4
C = C

C / 4 = C x i x 24
0,25 C = C x i x 24 / : C
0,25 = 24 x i
i = 1,0417%

e.- Se pide:

|_______|_______|_______|_______|©_______©|

0 1 2 3 4 5 meses

Para responder la pregunta, puedes abordar el problema de dos maneras:

➘ a.- Como en interés simple, los intereses para los distintos periodos de uso del dinero son iguales, y el interés para el primer mes es de $ 6.600 (300.000 x 0,022), el interés para el quinto mes será también de $ 6.600.

➘ b.- En interés simple, los intereses no se capitalizan, es decir el capital o deuda pendiente de pago para el quinto mes es de $ 300.000 y como en este mes (al igual que los otros meses), el interés es el resultante de multiplicar el capital por la tasa de interés (C x i), $ 300.000 x 0,022 = $ 6.600.

! QUE FÁCIL !

Si has respondido todo en forma correcta **!FELICITACIONES!**

☺

Si te has equivocado en alguna respuesta. **!VUELVE ATRÁS!**

1.2.3.2 **MONTO A INTERÉS SIMPLE.**

Tomando el ejemplo inicial, la cantidad de dinero que tu retiras del banco al cabo de un mes, es decir, el dinero depositado (C) más los intereses (I) generados durante ese mes, ósea, $ 101.000, recibe el nombre de Monto de un capital o deuda.

Por lo tanto, el **monto** ***de una deuda (M) a una fecha dada, corresponde al capital inicial más los intereses acumulados a esa fecha,*** *es decir:*

$$\mathbf{M = C + I}$$

Como el interés, según método de interés simple, se obtiene a través de la fórmula:

$$\mathbf{I = C \times i \times n}$$

Si reemplazamos la fórmula de interés en la fórmula de monto:

$$M = C + C \times i \times n \qquad / \text{ Factorizando por C}$$

$$\mathbf{M = C\,(\,1 + i \times n\,)}$$

donde.

M = Monto a interés simple

C = Capital inicial

n = Número de periodos de uso del dinero (Determinado por el tiempo que indica la tasa de interés)

i = Tasa de interés

Ejemplo:

Recordando, el problema anterior consistía en un préstamo de \$ 300.000, a una tasa de interés del 2,2% mensual.

Si te piden que determines el monto a un año. Te están solicitando que al capital inicial le agregas los intereses que genera ese capital durante el periodo de un año (12 meses).

El interés para un año lo obtenemos de la siguiente manera:

$$I = 300.000 \times 0.022 \times 12 = \$\,79.200$$

Si al capital de \$ 300.000 le sumamos los intereses acumulados por un año (\$79.200), obtenemos un monto de \$ 379.200.

Aplicando la fórmula de monto a interés simple:

$$M = C\,(1 + n \times i)$$

$$M = \$\,300.000\,(1 + 0,022 \times 12)$$

$$M = \$\,379.200$$

***Ejercicio 1.2*:**

Del mismo problema anterior, calcula el monto a interés simple para 6 meses, 6 años y 3 años y dos meses.

Respuesta:

a.- M = 300.000 (1 + 0.022 x 6) = $ 339.600

b.- M = 300.000 (1 + 0,022 x 72) = $ 775.200

c.- M = 300.000 (1 + 0.022 x 38) = $ 550.800

☺ o ☹

Ejercicio 1.3:

De la misma forma en que despejaste n, i y C, en la fórmula de interés simple, despeja dichas variables, usando la fórmula de monto a interés simple.

Respuesta:

$$M = C(1 + i \times n)$$

Despeje de C	C	=	$M / (1 + i \times n)$
Despeje de n	n	=	$(M / C - 1) / i$
Despeje de i	i	=	$(M / C - 1) / n$

PRUEBA Nº 2

Se deposita en un banco $ 400.000 a una tasa de interés del 12 % anual, durante un periodo de 3 años.

- A.- Determina la cantidad de dinero que se retirará al final del periodo.
- B.- Determina la cantidad de dinero que se retirará al cabo de 5 meses, si en esa fecha se cierra la cuenta.
- C.- ¿Cuánto dinero se deberá depositar, para que en un periodo de 18 meses se acumule un monto de $ 500.000
- D.- ¿Qué tasa de interés deberá aplicarse al préstamo para que el monto sea un 25% superior al capital inicial?.
- E.- ¿Cuánto tiempo deberá mantenerse el dinero depositado para que se pueda retirar $450.000 y dejar en la cuenta el 50% del capital depositado.

<u>Pauta de Corrección:</u>

A.- C = $ 400.000 M = 400.000 (1 + 0,12 x 3)

i = 12 % anual M = $ 544.000

t = 3 años

n = 3

B.- C = 400.000.- M = 400.000 (1 + 0,12 x 5 / 12)

i = 12 % anual M = $ 420.000

t = 5 meses

n = 5 / 12 años

!Recuerda! también puedes transformar la tasa anual a mensual. En interés simple seria 0.12 / 12 = 0.01 o 1%, por lo tanto el monto se obtendría de la siguiente manera:

M = 400.000 (1 + 0.01 x 5) = $ 420.000

C.- M = 500.000 500.000 = C (1 + 0,12 X 18 / 12)

C = ? C = $ 423.729

t = 18 meses

i = 12 % anual

n = 5 / 12 años

Si trabajas con una tasa mensual (0,12 / 12), n será 18 (porque en el tiempo de uso del dinero (18 meses), habrán 18 periodos mensuales de generación de intereses), por lo tanto, el monto lo calcularíamos así:

$$500.000 = C \left(1 + 0,12 / 12 \times 18 \right)$$

$$C = \$ 423.729$$

Si trabajas con una tasa semestral (i = 0,12 / 2 = 0.06 o 6%), por lo tanto, n = 3 (en 18 meses existen 3 semestres).

$$500.000 = C \left(1 + 0,06 \times 3 \right) = 423.729$$

D.- C = 400.000 500.000 = 400.000 (1 + 3 x i)

t = 3 años i = 0.083

M = 500.000 i = 8,3 % anual

n = 3

i = ?

!No te olvides de colocar siempre el periodo de la tasa de interés!

E.- Dinero depositado + Dinero dejado en depósito = Monto

450.000 + 200.000 = 650.000

650.000 = 400.000 (1 + 0,12 x n)

n = 5,2 años

5 años, 2 meses (0,2 x 12), 12 días (0,4 x 30)

1.2.4 **OPERACIONES A INTERÉS COMPUESTO**

Como hemos visto anteriormente, hablamos de Interés Compuesto, cuando los intereses se capitalizan, cuando el capital relevante para cada periodo de uso del dinero es distinto (generalmente mayor, producto de la capitalización de los intereses), y cuando los intereses resultantes, también son mayores.

En esta modalidad de cálculo de interés existen algunas expresiones relacionadas, tales como:

- ***Capitalización de intereses****:* Es el proceso de agregar a un capital, los intereses simples de los periodos de uso del dinero, entre la fecha en que se formó ese capital y la fecha elegida para agregar intereses.

- ***Periodo de capitalización***: Es el intervalo de tiempo convenido para capitalizar los intereses (meses, trimestres, años , etc.).

- ***Tasa de interés compuesto:*** Es la tasa de interés por periodo de capitalización

- ***Frecuencia de capitalización***: También llamado periodo de capitalización o de conversión. Es el número de veces en que se capitalizan los intereses en el tiempo de uso del dinero.

Basémonos en el siguiente ejemplo para entender el concepto de interés compuesto.

Ejemplo:

Un préstamo por $ 120.000 a 3 años plazo, otorgado a una tasa de interés del 18 % anual, con capitalización anual. Identifica :

1.- Tiempo de uso del dinero

2.- Período de capitalización

3.- Frecuencia de capitalización

!Recuerda!:

Mira la respuesta sólo después de contestar la pregunta

Respuesta:

a.- 3 años

b.- anual

c.- 3

! AHORA, CALCULEMOS ALGUNOS INTERESES Y MONTOS!

120.000 $M_1 = C_1$ $M_2 = C_2$ $M_3 = C_3$ 0

|________|________|________|

I_1 1 I_2 2 I_3 3 años

i = 18% anual con capitalización anual

$I_1 = C_0 \times n \times i \quad (n = 1)$

$I_1 = 120.000 \times 0{,}18 = \$\ 21.600$

$M_1 = C_0 + I_1$

$M_1 = 120.000 + 21600 = \$141.600$

$I_2 = C_1 \times n \times i \quad (n = 1)$

$I_2 = 141.600 \times 0{,}18 = \$\ 25.488$

$$M_2 = C_1 + I_2$$

$$M_2 = 141.600 + 25.488 = \$\ 167.088$$

$$I_3 = C_2 \ x \ n \ x \ i \qquad (n = 1)$$

$$I_3 = 167.088 \ x \ 0,18 = \$\ 30.076$$

$$M_3 = C_2 + I_3$$

$$M_3 = 167.088 + 30.076 = \$\ 197.164$$

En el presente ejemplo, las capitalizaciones de los intereses son anuales, por lo tanto, en el tiempo de uso del dinero de 3 años, existen 3 periodos de capitalización (n = 3 dado que la tasa de interés es anual).

1.2.4.1 **MONTO A INTERÉS COMPUESTO**

Al igual que en el caso de monto a interés simple, el **monto** (M), ***es el resultante de la suma entre capital inicial y los intereses generados durante el tiempo de uso del dinero***. La diferencia en este caso radica en la forma como se calculan los intereses.

$$M = C + I$$

Monto acumulado para el primer periodo:

$$M_1 = C_0 + I_1$$

$$I_1 = C_0 \ x \ i \ x \ n \qquad (n = 1)$$

$$M_1 = C_0 + C_0 \ x \ i = C_0 (1 + i)$$

Monto acumulado hasta el segundo periodo:

$$M_2 = M_1 + I_2$$

$$I_2 = M_1 \ x \ i \ x \ n \qquad (n = 1)$$

$$M_2 = M_1 + M_1 \ x \ i$$

$$M_2 = M_1 (1 + i)$$

$$M_1 = C_0 (1 + i)$$

$$M_2 = C_0 (1 + i) (1 + 1) \qquad = \qquad C_0 (1 + i)^2$$

Monto acumulado hasta el tercer periodo:

$$M_3 = M_2 + I_3$$

$$I_3 = M_2 \ x \ i + n \qquad (n = 1)$$

$$M_3 = M_2 + M_2 \ x \ i$$

$$M_3 = M_2 (1 + i)$$

$$M_3 = C_0 (1 + i)^2 (1 + i) \qquad = \qquad C_0 (1 + i)^3$$

Monto acumulado para n periodos:

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^{n}}$$

Donde:

C = Capital inicial o Principal

i = Tasa de interés por periodo de capitalización

n = Número de capitalizaciones en el tiempo de uso de dinero

1.2.4.2 **INTERÉS COMPUESTO ACUMULADO,** conociendo el monto compuesto:

Sabemos que $M = C + I$

por lo tanto $I = M - C$

$$M = C\,(1 + i)^{n}$$

$$I = C\,(1 + i)^{n} - C$$

$$\boxed{I = C\left((1 + i)^{n} - 1\right)}$$

PRUEBA N° 3

Resuelve la prueba Nº 1 y Nº 2 de interés simple, suponiendo que los intereses se capitalizan periódicamente. Recordemos las pruebas.

PRUEBA Nº 1

Juan Pérez solicita en préstamo $ 300.000 a una tasa de interés del 2,2% mensual.

- a.- Determina el interés acumulado para un periodo de:
  1.- 3 meses
  2.- 9 meses
  3.- 2 años
  4.- 2 años y 5 meses.
- b.- Determina el interés acumulado para un año, si la tasa de interés es de un 6 % semestral.
- c.- ¿ Qué cantidad de dinero deberá invertir para que en un lapso de 10 meses, se genere un interés de $ 18.000?.
- d.- ¿Cuál deberá ser la tasa de interés mensual para que en un plazo de 2 años, el interés resultante sea la cuarta parte del capital inicial.
- e.- Determina el interés que genera la obligación durante el 5º mes.

PRUEBA Nº 2

Se deposita en un banco $ 400.000 a una tasa de interés del 12 % anual, durante un periodo de 3 años.

- A.- Determina la cantidad de dinero que se retirará al final del periodo.
- B.- Determina la cantidad de dinero que se retirará al cabo de 5 meses, si en esa fecha se cierra la cuenta
- C.- ¿Cuánto dinero se deberá depositar, para que en un periodo de 18 meses se acumule un monto de $ 500.000
- D.- ¿Qué tasa de interés deberá aplicarse al préstamo para que el monto sea un 25% superior al capital inicial?.
- E.- ¿Cuánto tiempo deberá mantenerse el dinero depositado para que se pueda retirar $ 450.000 y dejar en la cuenta el 50% del capital depositado

<u>Pauta de Corrección:</u>

1.- De la prueba Nº 1:

C = $ 300.000

i = 2,2% mensual compuesto

➘ a.- 1.- $I = 300.000\left((1 + 0{,}022)^3 - 1 \right) = 20.239$

2.- $I = 300.000\left((1 + 0{,}022)^9 - 1 \right) = 64.904$

3.- $I = 300.000\left((1 + 0{,}022)^{24} - 1 \right) = 205.758$

Al igual que en interés simple la tasa de interés se puede transformar de mensual a anual. (Tema que será tratado más adelante).

4.- $I = 300.000\left((1 + 0{,}022)^{29} - 1 \right) = 263.894$

➘ b.- C = 300.000

t = 1 año

i = 6%semestral

n = 2 (semestres)

$I = 300.000\left((1 + 0{,}06)^2 - 1 \right)$

I = $ 37.080

➘ c.- t = 10 meses

i = 2,2% mensual

n = 10

I = $ 18.000

$18.000 = C\left((1 + 0{,}022)^{10} - 1 \right)$

C = $ 74.041

➘ d.-

$C = 300.000$		$75.000 = 300.000\left((1+i)^{24} - 1 \right)$
$t = 2$ años		$\left(75.000/300.000\right) + 1 = (1+i)^{24}$
$i = 2{,}2\%$ mensual		$1{,}25 = (1+i)^{24}$
$I = 1/4\ (300.000)$		$i_m = 0{,}009341$
$n = 24$		$i_m = 0{,}9341\%$

➘ e.- Para calcular el interés que genera el capital durante el quinto mes, es necesario determinar el dinero adeudado al inicio del quinto mes (saldo insoluto o saldo de capital). Para ello, se debe calcular el monto al final del mes cuatro (se supone que no hay pagos intermedios).

$$M_4 = 300.000\ (1 + 0{,}022)^4 = \$\ 327.284$$

El monto resultante ($ 327.284), corresponde al capital o deuda para todo el quinto mes, por lo tanto, el interés para este mes será:

$$I_5 = 327.284\left((1{,}022)^1 - 1 \right) = \$\ 7.200$$

También podemos obtener el interés para el 5ª periodo descontándole al M_5 el M_4.

!hazlo!

!Lo Hiciste!

Si te das cuenta, el interés compuesto para el 5ª periodo (\$ 7.200), es el mismo si se hubiese hecho a interés simple, usando como capital el M_4 .**!Calcúlalo**!). Esto se debe, a que para un periodo de uso del dinero donde no existen aún capitalizaciones, ambos métodos (IS e IC), arrojan el mismo resultado.

2.- <u>De la prueba Nº 2 a Interés compuesto</u>

➘ a.- C = 400.000 $M = 400.000\ (1 + 0{,}12)^3 =$ \$ 561.971

t = 3 años

i = 12% anual

n = 3

➘ b.- C = 400.000 $M = 400.000\ (1{,}12)^{5/12} =$ \$ 419.341

i = 12% anual

t = 5 meses

n = 5 / 12 (años)

Otra alternativa para resolver el problema es transformar la tasa anual a mensual (siendo n = 5). El procedimiento de transformación de tasa a interés compuesto es tratado más adelante.

➘ c- M = 500.000 $500.000 = C\ (1,12)^{18/12} = \$\ 421.835$

t = 18 meses

i = 12 % anual

n = 18 / 12

➘ d.- C = 400.000 $500.000 = 400.000\ (1 + i)^{3}$

M = 500.000   i = 0.077217345 anual

t = 3 años   i = 7,7217345 % anual

➘ e.- C = 400.000

M = 450.000 + 0,5 x 400.000 = 650.000

i = 12 % anual

$$650.000 = 400.000\ (1,12)^{n}$$

$$1,625 = n\ 1,12 \qquad /\ \log$$

$$n = 4,28 \text{ años}$$

Si **n** lo dejamos expresado en términos de años, meses y días, quedaría:

4 años, 3 meses y 10,8 días

1.2.5 TIEMPO DE USO DEL DINERO.

Por norma general, por cada día, mes o año de uso del dinero tomado en préstamo o prestado, se genera o devenga intereses. Es por ello, que es necesario determinar el tiempo de uso del dinero, como también la fecha de vencimiento de la obligación.

1.2.5.1 DETERMINACIÓN DEL NUMERO DE DÍAS ENTRE DOS FECHAS.

Para determinar el tiempo de uso del dinero entre dos fechas (fecha de inicio de la obligación y fecha de termino de la obligación), existen dos criterios:

a.1. Criterio Exacto
a.2. Criterio Aproximado

➘ a.1. *Criterio Exacto:* Se cuenta el número exacto de días existente entre la fecha inicial y la fecha terminal.

➘ a.2. *Criterio aproximado*: Se cuenta el número de días de la fracción de año entre la fecha inicial y fecha terminal, y considerando que el mes tiene 30 días (si el mes tiene 28 29, 30 o 31 días, se considera que tiene 30 días).

Para contar los días es costumbre excluir el primer día e incluir el último.

Ejemplo. Cierta cantidad de dinero se invierte desde el 15 de Enero hasta el 19 de Febrero del mismo año.

➘ Según el criterio exacto, se excluye el día 15. Se usa el dinero los 16 últimos días de Enero y los 19 días de Febrero, obteniéndose un total de 35 días.

➘ Según el criterio aproximado, se excluye el día 15. Se considera que Enero tiene 30 días, por lo tanto, quedan por usar en el mes de Enero solo 15 días, más los 19 días de Febrero, obteniendo un total de 34 días.

Para calcular el tiempo transcurrido entre la fecha inicial y terminal, en periodos mayores a un año, la costumbre comercial es calcular el tiempo aproximado, computando los años de 360 días y los meses de 30 días.

Otra forma que existe para determinar el tiempo de uso del dinero, según el criterio aproximado, es realizar una simple resta, de la manera indicada en el siguiente ejemplo:

Calculemos el tiempo transcurrido entre el 13 de Marzo de 1997 y el 25 de Junio de 1999.

	1999	años	6	meses	25	días
menos	1997	años	3	meses	13	días
	2	años	3	meses	12	días

es decir, 720 días (2 años x 360 días) + 90 días (3 meses x 30)
\+ 12 días = 822 días.

Para periodos menores a un año, la costumbre comercial es contar los días calendarios que existen entre dos las fechas (usando el criterio exacto).

<u>Ejercicio 1. 4 :</u>

Determina el tiempo transcurrido entre el:

1.- 16.02.97 y 12.10.97
2.- 16.02.97 y 12.10.98

Respuesta:

➘ 1.- Como puedes observar, el tiempo entre las dos fechas es menor a un año, por lo tanto, se debe utilizar el criterio exacto.

MESES PARTICIPANTES	**DÍAS DEL MES**	**DÍAS DE USO DEL DINERO EN EL MES**
Febrero	28	12
Marzo	31	31
Abril	30	30
Mayo	31	31
Junio	30	30
Julio	31	31
Agosto	31	31
Septiembre	30	30
Octubre	31	12
	total	238

➘ 2.- Como puedes observar, el tiempo entre las dos fechas es superior a un año, por lo tanto, se debe utilizar el criterio aproximado.

	1998 años	10 meses	12 días
menos	1997 años	2 meses	16 días
	1 año	7 meses	26 días

es decir, 1 x 360 + 7 x 30 + 26 = 596 días

(Como la resta de 12 menos 16 arroja un resultado negativo, se debe pedir prestado a la columna de meses 1 mes, llegando a la columna de días, 30 días, por lo tanto, quedaría 30 + 2 – 16 = 26 días)

☺ o ☹

1.2.5.2 DETERMINACIÓN DE LA FECHA DE VENCIMIENTO DE UNA DEUDA

La fecha de vencimiento o fecha final (FF), se establece de acuerdo a lo que convengan las partes. Cuando sólo esta dado el plazo de la obligación, la fecha de vencimiento se determina de acuerdo a la siguiente conversión:

➘ 1.- Si el plazo esta dado en días, la fecha de vencimiento va a ser:

FF = Fecha inicial + N° exacto de días

➘ 2.- Si el plazo esta expresado en meses (años), la fecha de vencimiento será:

FF = Fecha inicial + N° de meses (años)

Ejercicio 1.5:

Supón que la fecha inicial es el 30.03.97. Determina la fecha de vencimiento en los siguientes casos:

a.- plazo 90 días

b.- plazo 3 meses
c.- plazo 3 años

Respuesta:

a.- = 28.06.97 (exacto)

b.- = 30.06.97 (aprox.)

c.- = 30.03.2000 (aprox.)

Para el caso a.- en que el plazo esta dado en días, se ha de usar el criterio exacto en la determinación de la fecha de vencimiento.

Por otro lado, para resolver el problema a..- es posible utilizar la siguiente metodología:

MESES PARTICIPANTES	**DÍAS DE CADA MES**	**DÍAS DE USO DEL DINERO EN CADA MES**	**DÍAS ACUMULADOS**
Marzo	31	1	1
Abril	30	30	31
Mayo	31	31	62
Junio	30	28	90

Hasta el 31 de Mayo se ha usado 62 días el dinero, faltan 28 días para completar los 90 días pactados, por lo tanto, estos 28 días son los correspondientes al mes de Junio, es decir, FF = 28 de Junio.

☺ o ☹

1.2.6 **TASA DE INTERÉS:**

Si te acuerdas, al comenzar a tratar el tema de los intereses, vimos un ejemplo, en que se depositaba \$ 100.000 durante un año. Por lo que se ganaba \$ 1.000.

Al relacionar la ganancia con la inversión o depósito que genera esa ganancia, obtenemos lo que se denomina rentabilidad de la inversión o rentabilidad del depósito. Como sinónimo de rentabilidad consideraremos; ***tasa de interés***.

1.2.6.1 **CONCEPTO DE TASA DE INTERÉS:**

La **Tasa de Interés,** ***es la rentabilidad que genera el dinero invertido o entregado en préstamo, durante cierto período de tiempo***. Se expresa como un porcentaje del capital (Ej. 2% mensual). Para determinar el interés de un capital, la tasa de interés se expresa en tanto por uno (Ej.: 0,02 sobre el capital, o sea 2/100).

La tasa de interés es pactada por las partes intervinientes, es decir, entre deudor y acreedor. Generalmente depende del poder de negociación de las partes. Por ejemplo, si una persona deposita $1.000 en un Banco, aquél deberá aceptar la tasa de interés que le otorgue el Banco. Pero si el depositante es el ganador del Loto ☺ y el depósito asciende a $1.000.000.000, en este caso, el poder de negociación del depositante es mayor, por lo tanto, éste último tendrá mayor influencia en la determinación de la tasa de interés.

En general, la bibliografía existente, 🗐 trabaja con una tasa de interés anual, por lo tanto, si nada se dice del tiempo de la tasa de interés, se ha de asumir que es anual. En el presente módulo trabajaremos con tiempos anuales, semestrales y mensuales, principalmente.

1.2.6.2 CLASIFICACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS:

Las tasas de interés se pueden clasificar según varios criterios.

1.- Según su variabilidad, las tasas de interés pueden ser:

➘ a.- ***Tasa de interés fija:*** La tasa de interés fija es aquella que permanece constante durante el período de uso del dinero. Ejemplo: Crédito Hipotecario par la vivienda.

➘ b.- ***Tasa de interés variable:*** La tasa de interés variable es aquella que va sufriendo modificaciones durante el tiempo de uso del dinero. Ejemplo: préstamos internacionales.

2.- Según si existe ajuste inflacionario, las tasas de interés pueden ser:

➘ a.- ***Tasa de interés nominal:*** Es aquella tasa de interés que se aplica sobre capitales expresados en pesos, ($) o cualquier unidad monetaria que pueda ser afectada por procesos inflacionarios.

➘ b.- ***Tasa de interés real:*** Es aquella tasa de interés que se aplica sobre unidades de poder adquisitivo constante, como por ejemplo Unidad de Fomento (UF), Unidad Tributaria Mensual (U.T.M.), y en general, capitales reajustados según la variación que experimente el I.P.C..(Este tema será tratado más adelante).

3.- Desde el punto de vista del tiempo en que se generan los intereses, las tasas de interés pueden ser:

➘ a.- ***Tasa de interés vencida:*** Es aquella tasa de interés cuya aplicación generan intereses con posterioridad al uso del capital. Por ejemplo: 2% mensual, es decir, por usar el dinero durante un mes, al final de este mes se ha generado intereses del 2% sobre el capital invertido.

➘ b.- ***Tasa de interés anticipada:*** Es aquella tasa de intereses cuya aplicación genera interés con anterioridad al uso del capital. Por ejemplo 3% mensual, es decir, si un capital se invierte durante un mes, el interés que se genere (3 % sobre el capital) se hace efectivo al inicio del mes o cuando comienza a usarse el dinero.

A continuación, cuando nos refiramos a una tasa de interés, utilizaremos la tasa de interés fija, vencida y nominal, salvo que en forma expresa se señale lo contrario.

En algunas ocasiones para resolver un determinado problema financiero, es recomendable transformar el tiempo de la tasa de interés u otro periodo. Por ejemplo, una tasa anual transformarla en mensual o en diaria, o vise versa. Para realizar esta transformación el procedimiento varía si el método es a interés simple o a interés compuesto.

1.2.6.3 TRANSFORMACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS DE UN PERÍODO A OTRO, SEGÚN MODALIDAD DE INTERÉS SIMPLE:

Si la tasa de interés se encuentra expresada en términos anuales, y el interés se desea determinar para otro tiempo, por ejemplo, semestral o mensual, deberás hacer el siguiente ajuste:

➘ a.- Para uno o varios semestres; la tasa anual se debe dividir por 2. (Porque hay dos semestres en un año).

➘ b.- Para 1 o varios meses; la tasa anual se debe dividir por 12 (Porque hay 12 meses en un año).

Por ejemplo: un capital de $150.000 se desea invertir al 12% anual, durante un año y 6 meses. Calcula el interés para dicho período.

- Si utilizamos la tasa de interés anual:

$$I = 150.000 \times 0{,}12 \times 1{,}5 = \$\ 27.000$$

- Si utilizamos la tasa de interés semestral:

$$I = 150.000 \times \frac{0{,}12}{2} \times 3 = \$\ 27.000$$

Se obtiene la tasa semestral dividiendo la tasa anual por dos (0,12 / 2). Por lo tanto $n = 3$ porque en un año y 6 meses hay 3 semestres (el semestre es el tiempo que indica la tasa de interés).

- Si utilizamos la tasa de interés mensual

$$I = 150.000 \times \frac{0{,}12}{12} \times 18 = 27.000$$

Se obtiene la tasa de interés mensual dividiendo la tasa anual por doce (0,12 / 12), por lo tanto, $n = 18$ (porque hay 18 meses en un año y 6 meses)

!QUÉ TE PARECE!

Resuelve el mismo problema, utilizando la tasa de interés en términos trimestrales, semanales, bimestrales (cada dos meses) y bimensuales (dos veces en el mes).

☺ o ☹

Respuesta:

$$I = 150.000 \times \frac{0,12}{4} \times 6 = 27.000$$

$$I = 150.000 \times \frac{0.12}{52} \times 78 = 27.000$$

$$I = 150.000 \times \frac{0,12}{6} \times 9 = 27.000$$

$$I = 150.000 \times \frac{0,12}{24} \times 36 = 27.000$$

Si una tasa de interés expresada para un periodo de tiempo, se desea transformar para un período mayor, en vez de dividirla se ha de multiplicar por la cantidad de veces en que esta comprendido el tiempo que indica la tasa de interés en el nuevo tiempo a considerar. Por ejemplo:

- a) Si una tasa mensual se debe transformar a anual, aquella se debe multiplicar por 12 (porque hay 12 meses en un año).
- b) Si una tasa trimestral se desea transformar a anual, aquella se debe multiplicar por 4, porque hay 4 trimestres en un año.

Por ejemplo, supón que el problema anterior se ha pactado a una tasa de interés del 1% mensual, calcule el interés que se genera en el período.

$$I = 150.000 \times 0,01 \times 18 = 27.000$$

Si la tasa mensual, se expresa en términos:

- a) <u>Semestrales:</u>

$$I = 150.000 \times \underline{0,01 \times 6} \times 3 = \$\ 27.000$$

➘ b) Anuales:

$$I = 150.000 \times \underline{0,01 \times 12} \times 15 = \$\ 27.000$$

➘ c) Bimestrales:

$$I = 150.000 \times \underline{0,01 \times 2} \times 9 = \$\ 27.000$$

Problema 1.7:

Un capital de $ 1.000.000 se invirtió durante cuatro años. Determina el monto, considerando las siguientes tasas de interés y modificaciones indicadas:

➘ a.- i = 15% anual (modifica la tasa de interés en términos mensuales, semestrales y bianuales)

➘ b.- i = 0,8% mensual (modifica la tasa de interés, en términos cuatrimestrales, semestrales y trimestrales)

!RECUERDA!

Responde primero las preguntas
luego
confróntalas con la pauta de corrección.

Respuestas:

a.- M = 1.000.000 (1 + 0,15 x 4) = $ 1.600.000

Si ahora modificamos la tasa de interés tal como se solicitó:

a1.- $M = 1.000.000 \left(1 + \frac{0,15}{12} \times 48\right) = \$\ 1.600.000$

a2.- $M = 1.000.000 \left(1 + \frac{0,15}{2} \times 8\right) = \$\ 1.600.000$

a 3.- M = 1.000.000 (1 + 0,15 x 2 x 2) = $ 1.600.000

b.- M = 1.000.000 (1 + 0,008 x 48) = $ 1.384.000

Si ahora modificamos la tasa de interés tal como se solicitó:

b1.- M = 1.000.000 (1 + 0,008 x 4 x 12) = $ 1.384.000

b2.- M = 1.000.000 (1 + 0,008 x 6 x 8) = $ 1.384.000

b3.- M = 1.000.000 (1 + 0,008 x 3 x 16) = $ 1.384.000

Transformación de una tasa de interés anual a una tasa de interés diaria:

Para calcular la tasa de interés diaria, partiendo de una tasa anual, existe dos criterios:

1.- Criterio exacto

2.- Criterio Ordinario

➘ 1.- El **criterio exacto** considera un año de 365 días (en los años bisiestos se deben considerar 366 días).

Tasa diaria ISE = ia/365

➘ 2.- El **criterio aproximado**, considera que el año tiene 360 días.

Tasa diaria ISO = ia/360

<u>Transformación de una tasa de interés mensual a una tasa de interés diaria.</u>

Al igual que en el caso de transformar una tasa anual a diaria, existen dos criterios de transformación:

1.- Criterio Exacto

2.- Criterio Ordinario

El ***<u>criterio exacto</u>*** considera los días exactos que tenga cada mes, ya sea, 28, 29, 30 ó 31 días. El ***<u>criterio aproximado</u>*** considera que todos los meses tienen 30 días.

tasa diaria ISE = i_m / (28, 29, 30 o 31 días)

tasa diaria ISO = $\frac{i_m}{30}$

Como nos podemos dar cuenta, para calcular el interés simple de un capital invertido durante cierto tiempo, existan cuatro formas, según el criterio que se utilice para determinar el tiempo de uso del dinero, como el que se emplee para transformar la tasa de interés, entonces tenemos:

➘ 1.- ISE, TE : Interés Simple exacto con tiempo exacto

➘ 2.- ISE, TAPP : Interés Simple exacto, con tiempo aproximado

➘ 3.- ISO, TE : Interés Simple ordinario, con tiempo exacto

➘ 4.- ISO, TAPP: Interés Simple ordinario, con tiempo aproximado

Ahora, calculemos el interés simple, de acuerdo a esta cuatro formas, para el siguiente ejemplo:

Supongamos que un C = $ 200.000 se invierte, al 15% anual. el 12 de Enero de 1997, hasta el 30 de Marzo de 1977. Determina el interés simple según los distintos criterios de cálculo de intereses.

⇨ tiempo exacto = 77 días
⇨ tiempo aproximado = 78 días

⇨ transformación de tasa exacta $= \frac{0,15}{365}$

⇨ transformación de tasa ordinaria $= \frac{0,15}{360}$

➘ ISE, TE $= 200.000 \times \frac{0,15}{365} \times 77 = \$\ 6.329$

➘ ISE, TAPP $= 200.000 \times \frac{0,15}{365} \times 78 = \$\ 6.411$

➘ ISO, TE $= 200.000 \times \frac{0,15}{360} \times 77 = \$\ 6.417$

➘ ISO,TAPP $= 200.000 \times \frac{0,15}{360} \times 78 = \$\ 6.500$

De los cuatro métodos anteriores, generalmente el que genera un mayor interés es ISO, TE. Este método recibe el nombre de ***método bancario***, y es el que usualmente es utilizado. A continuación en el presente módulo, si nada se indica, se ha de emplear este método. (igual para el caso de interés compuesto). **¡NO LO OLVIDES!**

Problema 1. 8:

José María invirtió $ 320.000 a una tasa de interés del 2% mensual el 12 de Febrero de 1997, por un período de 2 meses, determina:

1.- Fecha de vencimiento de la inversión

2.- Interés que genera la inversión en el período

<u>Respuesta:</u>

1.- Determinación de la fecha de vencimiento:

Como el período es de dos meses, el criterio a utilizar deber ser el aproximado (no interesa los días que tenga el mes), por lo tanto, la fecha de vencimiento es *<u>12 de Abril de 1997.</u>*

2.- Determinación del interés que genera la inversión:

$$I = 320.000 \times 0,02 \times 2 = \$\ 12.800$$

Como hasta el momento te has podido dar cuenta, es tedioso operar con gran cantidad de decimales, uno tiende a aproximar, y mientras más se aproxima, menos exacto es el resultado. (Si no te has dado cuenta ***<u>compruébelo</u>***). Para evitar el problema anterior, debes trabajar con todos los decimales (en el caso del resultado, éste puede ser aproximado).

De preferencia has los cálculos usando fracciones.

!Veamos los efectos de aproximar!

En el ejemplo anterior:

$$i = \frac{0,02}{30} = 0,00066666667 \text{ o } 0,0666667\%$$

Si aproximas puedes dejar expresado el resultado como:

- a.- id = 0,00066
- b.- id = 0,0007

Si usas la aproximación de la letra a)

$$I = 330.000 \times 0,00066 \times 59 = 12.850$$

Si usas la aproximación de la letra b)

$$I = 330.000 \times 0,0007 \times 59 = 13.629$$

<u>El aproximar puede implicar que el tomador de decisiones, se equivoque en la decisión a adoptar.</u>

1.2.6.4 TRANSFORMACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS DE UN PERIODO A OTRO, SEGÚN MODALIDAD DE INTERÉS COMPUESTO:

Si disponemos de un tasa de interés anual y deseamos transformarla a mensual, no basta con dividir la tasa anual por 12, como en interés simple. Esto se podía porque los intereses para cada período de tiempo eran iguales. Por ejemplo, si el interés por un mes es de $5.000, por un año serán de $60.000, por lo tanto, la tasa que genera el interés mensual, al multiplicarla por 12, queda transformada en anual, y al aplicar ésta tasa sobre el capital inicial, se obtiene el interés anual ($60.000). En interés compuesto este procedimiento no es aplicable, debido a la capitalización de los intereses, éstos para los diferentes períodos son distintos y crecientes.

Para transformar la tasa de interés de un período a otro, es necesario conocer previamente los conceptos de tasa de interés nominal, tasa de interés efectiva, y tasas de interés equivalentes.

1.2.6.4.1 <u>**Tasa de interés nominal:**</u>

La tasa de interés nominal es aquella tasa de interés (generalmente anual), convenida por las partes, sin importar la forma de cómo se capitalizan los intereses. Por ejemplo, si una deuda se pacta al 10% anual. Esto supone que al cabo de un año se generan intereses y se capitalizan por un valor equivalente al 10% del capital relevante.

También es posible encontrar que las capitalizaciones de los intereses no se realicen en el tiempo que indica la tasa de interés (en este caso un año), sino que se devengan por periodos más reducidos.

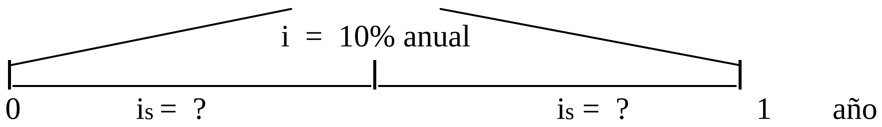
<u>Por ejemplo:</u>

1.- 10% anual, capitalización semestral
2.- 10% anual, capitalización trimestral
3.- 6% semestral, capitalización trimestral

Si ahora modificamos la tasa de interés tal como se solicitó: En los dos primeros casos, la tasa de interés nominal anual es de un 10% y en el tercer caso, es tasa de interés nominal semestral es del 6%.

En el *ejemplo 1* (10% anual, capitalización semestral), el tiempo que indica la tasa de interés es de un año, en dicho tiempo, se producen dos capitalizaciones de intereses, dado que las capitalizaciones se efectúan en forma semestral. (***Hasta el momento, en el ejemplo no se ha señalado el tiempo de uso del dinero (t)***).

Gráficamente:



Para calcular el interés que genera el capital en forma semestral, es necesario determinar una tasa de interés semestral, es decir una tasa de interés por período de capitalización o también llamado período de conversión. Para ello, se puede usar la siguiente fórmula:

$$\boxed{i = J / m}$$

Donde:

i = tasa de interés por periodo de capitalización
J = tasa de interés nominal (generalmente anual)
m = frecuencia de capitalización o número de periodos de capitalización en el tiempo que indica la tasa de interés.

Debes tener presente que para calcular la tasa de interés por periodo de capitalización no tienes que considerar el tiempo de uso del dinero.

¡ No lo olvides¡

Por ejemplo:

1.- 10% anual, capitalización semestral
2.- 10% anual, capitalización trimestral
3.- 6% semestral, capitalización trimestral

En el ejemplo 1 : $i = \dfrac{0{,}10}{2}$ $\dfrac{(\text{ tasa nominal })}{(\text{ m })}$

En el ejemplo 2 : $i = \dfrac{0{,}10}{4}$ $\dfrac{(\text{ tasa nominal })}{(\text{ m })}$

En el ejemplo 3 : $i = \dfrac{0{,}06}{2}$ $\dfrac{(\text{ tasa nominal })}{(\text{ m })}$

En el ejemplo 3, el tiempo que indica la tasa de interés es semestral, la capitalización de los intereses son trimestrales, por lo tanto, el número de capitalizaciones trimestrales en el tiempo que indica la tasa de interés (semestre) es 2.

Con lo aprendido anteriormente, podemos señalar que para calcular el interés compuesto de un cierto capital, además de conocer el tiempo de uso del dinero y el periodo de capitalización de los intereses, es necesario determinar el número de capitalizaciones en el tiempo del uso del dinero (**n**). Para obtenerlo, se ha de multiplicar la frecuencia de capitalizaciones (m) por el número de periodos (que indica la tasa de interés nominal), en el tiempo de uso del dinero (n*), es decir:

$$\boxed{\mathbf{n} = m \times n^*}$$

Supón que los 3 ejemplos anteriores están relacionados con un capital invertidos durante 2 años. El número de capitalizaciones en el tiempo de uso del dinero, en los tres casos sería:

⇨	Ejemplo 1	=	2	x	2	=	4
⇨	Ejemplo 2	=	4	x	2	=	8
⇨	Ejemplo 3	=	2	x	4	=	8

Si recuerdas que la fórmula de interés compuesto esta expresada por:

$$M = C\ (1 + i)^{n}$$

Dado que ahora la tasa de interés (i) se expresa como **J** / m y el tiempo de uso del dinero (n) se obtiene de multiplicar m por n*, la fórmula de interés compuesto quedaría:

$$\boxed{M = C\ (1 + j / m)^{m \times n^*}}$$

Apliquemos lo aprendido en el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Un capital de $ 300.000 se invierte durante dos años, a una tasa de interés anual del 10% con capitalización mensual:

C = $ 300.000 M = $300.000\ (1 + 0{,}10 / 12)^{12 \times 2}$

t = 2 años M = $ 366.117

i_m = 0,10 / 12

n = m x n* = 12 x 2 = 24

(en el tiempo de uso del dinero, 2 años, hay 24 capitalizaciones mensuales)

Problema 1.9:

Del ejemplo anterior: (C = 300.000; i = 0,10/12)

a.- Calcula el interés para el periodo de:

- a.1 2 años
- a.2 3 trimestres
- a.3 1 año y 6 meses.

b.- Si la tasa de interés es del 6% semestral con capitalización trimestral, calcula el monto acumulado para los períodos indicados en a)

Respuesta:

$$C = 300.000$$
$$i = \frac{0{,}10}{12}$$

$$I = C\left((1 + j / m)^{m \times n^*} - 1 \right)$$

a_1.- ⇨ $I = 300.000 \left((1 + 0{,}10 / 12)^{12 \times 2} - 1 \right) = \$\ 66.117$

a_2.- $I = 300.000 \left((1 + 0{,}10 / 12)^{12 \times 9 / 12} - 1 \right) = \$\ 23.265$

a_3.- $I = 300.000 \left((1 + 0{,}10 / 12)^{12 \times 18 / 12} - 1 \right) = \$\ 48.334$

$$C = 300.000$$
$$i = \frac{0{,}06}{2}$$

b_1.- $M = 300.000 (1 + 0{,}06 / 2)^{4 \times 2} = \$\ 380.031$

b_2.- $M = 300.000 (1 + 0{,}06 / 2)^{2 \times 1{,}5} = \$\ 327.818$

b_3.- $M = 300.000 (1 + 0{,}06 / 2)^{2 \times 3} = \$\ 358.216$

☺ o ☹

1.2.6.4.2 Tasa de interés efectiva anual (ie)

Es la tasa de interés anual que realmente actúa en la operación. En general, es una tasa anual con capitalización anual, pero también puede ser para otros periodos de tiempo (semestral, mensual, etc.).

Como sabemos:

C	=	capital
I	=	tasa nominal anual
m	=	frecuencia de capitalización
ie	=	tasa efectiva anual
j / m	=	tasa de interés por periodo de capitalización

i_e también es conocida como la tasa anual con capitalización anual equivalente a la tasa J/M.

Si consideramos como un año el tiempo de uso del dinero y la tasa de interés nominal también anual, el monto de un capital, lo podemos expresar de dos formas:

1.- $M = C(1 + i)^n$

2.- $M = C(1 + j/m)^m$

donde **m** es el número de capitalizaciones de intereses en un año.

Como ambas ecuaciones son iguales podemos dejarlas expresadas en una igualdad:

$$C(1 + i_e)^n = C(1 + j/m)^m \quad \text{despejando } i_e$$

$$\boxed{ie = (1 + j/m)^m - 1}$$

Observaciones:

1.- Si m = 1 la tasa efectiva anual es igual a la tasa nominal.
2.- Dado m, al aumentar “j”, aumenta “ie”.
3.- Dado J, al aumentar m, aumenta “ie”.
4.- Las tasa efectivas para periodos diferentes a un año, se pueden determinar en una forma similar a la tasa efectiva anual.

Inventa algún ejemplo en que necesites determinar una tasa efectiva para un periodo menor a un año.

Una segunda forma para determinar la tasa efectiva para cierto periodo de tiempo, consiste en el siguiente procedimiento: Se divide el interés que se genera el capital para un determinado tiempo por el capital inicial invertido:

$$i_e = \frac{\text{Interés}}{\text{Capital}} = \frac{I}{C}$$

Por ejemplo, un capital de $100.000 invertido al 10% anual con capitalización mensual, durante un año.

Para determinar la tasa efectiva anual se debe calcular primero el interés para un año, y luego dividir éste por el capital inicial.

1.- Uso de fórmula:

$$i_e = (1 + 0{,}10 / 12)^{12} - 1 = 10{,}47\%$$

2.- Uso de procedimiento:

a.- Cálculo del interés anual (tiempo de uso del dinero, un año)

$$I = 100.000 \left((1 + 0{,}10 / 12)^{12} - 1 \right) = \$\ 10.471$$

b.- Cálculo de tasa efectiva anual:

$$i_e = \frac{10.471}{100.000} = 0{,}10471 = 10{,}47\%$$

<u>!Tú debes elegir el método que desees!</u>

Del problema anterior, también es posible determinar la tasa efectiva semestral.

!HAZLO!

<u>Respuesta:</u>

a.- Uso de fórmula:

$$i_e = (1 + 0{,}10 / 12)^6 - 1 = 5{,}1\ \%$$

b.- Uso de procedimiento:

1.- Cálculo de interés semestral:

$$Is = 100.000\left((1 + 0{,}10 / 12)^6 - 1\right) = \$\ 5.105$$

2.- Cálculo de la tasa efectiva semestral:

$$i_e = \frac{5.105}{100.000} = 5{,}1\ \%$$

<u>Problema 1. 10:</u>

Del ejemplo anterior (Capital, $ 100.000; Tasa de Interés, 10 % anual con capitalización mensual), calcula las siguientes tasas efectivas:

a.- Tasa efectiva trimestral

b.- Tasa efectiva mensual

c.- Tasa efectiva cuatrimestral

!FÁCIL!

***! VERDAD*!**

Respuesta:

a.- 2,52 %

b.- 0,83 %

c.- 3,38 %

☺ o ☹

Hasta el momento hemos conocido la tasa de interés nominal y tasa de interés efectiva, pero aún nos falta por saber sobre la ***tasa de interés equivalente***, para poder resolver de mejor forma algunos problemas financieros.

1.2.6.4.3 ***Tasa de interés equivalente***:

Dos tasas de interés son equivalentes (no iguales) si aplicadas sobre un mismo capital, durante un mismo tiempo, permiten generar un mismo interés.

> Por ejemplo: si un C = $ 200.000 se invierte durante 3 años, a una tasa de interés del 12% anual con capitalización semestral. Determinemos una tasa de interés equivalente mensual.

Para calcular la tasa equivalente mensual, lo primero es calcular el interés que genera la inversión durante el tiempo de uso del dinero, en este caso, 3 años: !VEAMOS!

$$I = 200.000 \left((1 + 0,12 / 2)^6 - 1 \right) = \$\ 83.704$$

Posteriormente, debemos determinar una tasa de interés mensual que aplicada sobre el capital inicial durante tres años, nos permita generar $ 83.704 por concepto de intereses ! VEAMOS!

$$83.704 = 200.000 \left((1 + i_m)^{36} - 1 \right)$$

$$\frac{83.704}{200.000} + 1 = (1 + i_m)^{36}$$

$$1,41852 = (1 + i_m)^{36} \quad / \quad \text{si sacamos la raíz 36}$$

$$i_m = 0,98\ \%$$

Por lo tanto, la tasa de interés mensual del 0,98% es equivalente a la tasa de interés anual del 12 % con capitalización semestral.

Para el mismo problema, determina la tasa equivalente:

a.- Semestral

b.- Semestral con capitalización trimestral

c.- Trimestral con capitalización mensual

Respuesta:

a.- $83.704 = 200.000 \left((1 + i_s)^6 - 1 \right)$

$i_s = 6\ \%$

b.- $83.704 = 200.000 \left((1 + i_s / 2)^{2 \times 6} - 1 \right)$

$i = 5{,}9\%$ semestral capitalizable trimestralmente

c.- $83.704 = 200.000 \left((1 + i_{tr} / 3)^{12 \times 3} - 1 \right)$

$i = 2{,}9\%$ trimestral capitalizable mensualmente

Lo importante para determinar una tasa equivalente es que ambas tasas se apliquen sobre un mismo tiempo. En los ejemplos anteriores, se ha utilizado como tiempo de uso del dinero 3 años. Pero también se pudo haber empleado un periodo de un año, de un semestre u otro tiempo, obteniéndose la misma tasa equivalente en todos los casos.

Comprueba la afirmación anterior en las letras a, b y c , considerando como tiempo de uso del dinero: un año y un semestre

Por ejemplo:

a.1.- $i = 0{,}12 / 2$ $\quad I = 200.000 \left((1 + 0{,}12 / 2)^2 - 1 \right)$
$C = 200.000$
$t = 1$ año $\quad I = \$\ 24.720$
$i_{eq\ sem} = ?$

$24.720 = 200.000 \left((1 + i_s)^2 - 1 \right)$

$i_s = 6\%$

Como te has podido dar cuenta, se ha obtenido la misma tasa de interés con distinto tiempo de uso del dinero.

!Continúa con la tarea!

Por otro lado, dos tasas de interés que sean equivalentes, se deben aplicar sobre un mismo capital, cualquiera que sea éste.

Teniendo presente lo señalado anteriormente, podemos llegar a determinar otra forma para calcular una tasa equivalente. Para ello, consideremos una tasa de interés anual con capitalización semestral, y un tiempo de uso del dinero de 3 años:

$$I = C\left((1 + ia / 2)^6 - 1 \right)$$

Pero si utilizamos una tasa de interés mensual y el tiempo de uso del dinero es de 3 años, el interés lo obtendríamos de la siguiente forma:

$$I = C\left((1 + im)^{36} - 1 \right)$$

Como ambas fórmulas permiten generar el mismo interés para un periodo de 3 años, se pueden dejar expresadas como una igualdad.

$$C\left((1 + ia / 2)^6 - 1 \right) = C\left((1 + im)^{36} - 1 \right) \quad / \text{ Simplificando por C}$$

$$(1 + ia / 2)^6 - 1 = (1 + im)^{36} - 1$$

$$(1 + ia / 2)^6 = (1 + im)^{36}$$

Como te puedes dar cuenta:

1.- Para determinar una tasa equivalente no es necesario conocer el capital inicial.

2.- El tiempo de uso del dinero, puede ser cualquiera, lo importante, que para ambos lados de la igualdad sea el mismo.

3.- Sólo se debe conocer la tasa de interés a la que se ha de determinar la tasa equivalente.

Ahora, apliquemos el segundo procedimiento, para determinar la tasa equivalente de las letras a, b y c, utilizando como tiempo de uso del dinero.

1.- 3 años
2.- 1 año
3.- 1 semestre

(***comprueba los resultados anteriores***)

Saber cómo determinar una tasa equivalente, es importante, cuando se requiere transformar una tasa de un período a otro. Por ejemplo, si se dispone de una tasa anual (15%) y se necesita convertirla a mensual. En *interés simple* bastaría con dividir la tasa anual por 12 (0,15 / 12 = 1,25 %). Pero si el problema es a *interés compuesto,* no es correcto aplicar este procedimiento, debido a que los intereses para los 12 meses son distintos, por lo tanto, se ha de determinar una tasa mensual, de tal modo que los intereses mensuales para un año sean iguales al obtenido si se ha utilizado una tasa del 15% anual por ese mismo tiempo. Si utilizas la conversión de tasas usando la metodología de interés simple, en un problema en que los intereses se capitalizan, los intereses resultantes, para cierto periodo de tiempo serán mayores.

En el presente problema, la tasa mensual compuesta se obtendría:

$$(1 + 0{,}15)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

$$i_m = 1.17\%$$

Como se te has podido dar cuenta, la tasa equivalente mensual simple (1,25%) es mayor a la tasa equivalente mensual compuesta (1.17%), esto se debe a que para obtener el mismo interés anual se requiere una tasa mayor en interés simple que en interés compuesto, debido a que en este último, los intereses mensuales se capitalizan y el capital relevante cada mes es mayor.

Problema 1.11:

De las siguientes tasas:

1.- 18% anual
2.- 12% semestral c/cap. trimestral
3.- 10% semestral c/ cap. mensual

Calcula las tasas:

a.- equivalente mensual
b.- equivalente trimestral
c.- anual c/cap. trimestral
d.- efectiva anual
e.- efectiva trimestral

Utiliza como tiempo de uso del dinero ***un año***

Respuesta:

1a.-	$(1 + 0,18)^1$	=	$(1 + i_m)^{12}$	=>	i_m	=	1.39 %
1b.-	$(1 + 0,18)^1$	=	$(1 + i_{tr})^4$	=>	i_{tr}	=	4,2 %
1c.-	$(1 + 0,18)^1$	=	$(1 + ia/ 4)^4$	=>	$ia\ c/c_{tr}$	=	16,9%
1d.-	$(1 + 0,18)^1$	=	$(1 + ie)^1$	=>	iea	=	18%
1e.-	$(1 + 0,18)^{1/4}$	=	$(1 + i_{tr})^1$	=>	ietr	=	4,22%
2a.-	$(1 + 0,12/ 2)^4$	=	$(1 + i_m)^{12}$	=>	i_m	=	1,96%
2b.-	$(1 + 0,12/2)^4$	=	$(1 + i_{tr})^4$	=>	i_{tr}	=	6 %
2c.-	$(1 + 0,12/2)^4$	=	$(1 + ia/4)^4$	=>	iac/c_{tr}	=	24%
2d.-	$(1 + 0,12/2)^4$	=	$(1 + ie_a)^1$	=>	ie_a	=	26.25%
2e.-	$(1 + 0,12/2)^1$	=	$(1+ ie_{tr})^1$	=>	ie_{tr}	=	6 %
3a.-	$(1 + 0,10/6)^{12}$	=	$(1 + i_m)^{12}$	=>	i_m	=	1,67%
3b.-	$(1 + 0,10/6)^{12}$	=	$(1 + i_{tr})^4$	=>	i_{tr}	=	5,08%
3c.-	$(1 + 0,10/6)^{12}$	=	$(1 +ia/4)^4$	=>	$ia\ c/c_{tr}$	=	20,34%
3d.-	$(1 + 0,10/6)^{12}$	=	$(1 + ie_a)^1$	=>	ie_a	=	21,94%
3e.-	$(1 + 0,10/6)^3$	=	$(1 + ie_{tr})^1$	=>	ie_{tr}	=	5,08%

PRUEBA Nº 4

Juan Pérez prestó a su amigo David Raúl $300.000 el 18.03.97, a una tasa de interés del 15% anual. David Raúl se comprometió a devolver el préstamo más los intereses el 22.05.97.

- a.- Determina el tiempo de uso del dinero ,según criterio exacto y aproximado.

- b.- Determina la tasa de interés equivalente mensual a interés simple y a interés compuesto.

- c.- Calcula el interés que genera la deuda, a interés simple y a interés compuesto.

- d.- Si el plazo del préstamo hubiese sido de 2 meses:

  1.- Determina su fecha de vencimiento

  2.- Calcula el interés del préstamo (IS e IC)

- e.- Si Juan Pérez desea que el préstamo genere $15.000 por concepto de interés:

  1.- ¿Cuál debería ser la fecha de vencimiento de la deuda a interés simple e interés compuesto (manteniéndose la tasa de interés).

- f.- Determina el interés que genera la deuda entre los días 14.04.97 y 21.04.97 (ambas fecha inclusive). (IS, IC)

- g.- ¿Cuánto debería ser el dinero prestado por Juan Pérez para obtener un monto de $400.000.- (IS, IC).

- h.- Explica porqué en la letra **c,** el interés compuesto resulta ser menor que el interés simple.

Pauta de Corrección

a.-

Determinación de tiempo exacto: 18.03.97 --- 22.05.97

Marzo	31	13
Abril	30	30
Mayo	31	22
		65 días

Determinación de tiempo aproximado

año	mes	día
97	05	22
97	03	18
0	2	4

$$2 \times 30 + 4$$
$$60 + 4 = 64 \text{ días}$$

b.-

Tasa de interés equivalente mensual simple

$$\frac{0{,}15}{12} = 1{,}25\ \%$$

Tasa equivalente mensual compuesto

$$(1 + 0{,}15)^{1} = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_m = 1.17\ \%$$

c.-

Interés que genera la deuda a interés simple

$$I = 300.000 \times \frac{0{,}15}{360} \times 65 = \$\ 8.125$$

Interés que genera la deuda a interés compuesto

Tasa equivalente diaria $(1 + 0{,}15)^{1} = (1 + i_d)^{360}$

$$i_d = 0{,}000388303$$
$$i_d = 0{,}0388303\%$$

$I = 300.000 \quad [(1.000388303)^{65} - 1) = \quad \$ 7.667$

d.-

1.- Fecha de Vencimiento: 18.05.97

2.- Interés Simple:

$I = 300.000 \times \frac{0,15}{12} \times 2 = \$ 7.500$

Interés Compuesto

$I = 300.000 \left((1,0117)^2 - 1 \right) = \$ 7.061$

e.-

1.-

I = 15.000
C = 300.000
i = 15% anual

a interés simple:

$I = C \times n \times i$

$15.000 = 300.000 \times 0,15 \times n$

n = 0,333 años
n = ¼ de año
n = 4 meses

=> fecha de vencimiento: 18.07.97 (aproximado)

a interés compuesto:

$15.000 = 300.000 \left((1,15)^n - 1 \right)$

$1.05 = (1 .15)^n \quad /\log.n$

$n = \frac{\log(1.05)}{\log (1,15)}$

n = 0.3490947774 año

tiempo : 4 meses, 5 días, 16 horas

fecha de vencimiento:24.07.97

Al emplear el método de Interés Compuesto se requiere mayor tiempo que en interés simple debido a que la tasa de interés equivalente mensual compuesta es menor a la tasa de interés equivalente mensual simple:

f.-

Periodo 14.04.97 --- 21.04.97 (ambos fechas inclusive)

Días exactos : 8

a.- Interés para el periodo (8 días): método simple

$$I = 300.000 \times \frac{0,15}{360} \times 8 = \$\ 1.000$$

b.- Interés para el periodo (8 días): método compuesto

1.- Cálculo del Monto acumulado al día 13.04.97

$$M = 300.000\ (1 + 0,0117)^{26/30}$$

$$M = 303.040$$

También pudiste calcular el monto , utilizando una tasa equivalente diaria, y usando como exponente 26 (número de días exactos entre el 18.03 y el 13.04)

$$I = 303.040\ \left((1,000388303)^{8} - 1 \right) = \$\ 943$$

g.-

M = $ 400.000
C = ?
i = 15% anual
5 = 65 días

a) Interés simple

$$400.000 = C\left(\frac{0{,}15}{360} \times 65 + 1\right)$$

$$C = \$\ 389.452$$

b.- Interés Compuesto

$$400.000 = C\ (1 + 0{,}000388303)^{65}$$

$$C = \$390.032$$

h.- En **c** el interés compuesto es menor al interés simple, para el tiempo indicado, debido a que la tasa de interés equivalente mensual compuesta es menor a la tasa equivalente mensual simple:

¡DESCANSA!

HEMOS TÉRMINADO EL PRIMER CAPÍTULO

<u>Te recuerdo</u>

Si algún tema tratado en el capítulo n°1 no te ha quedado claro, vuelve a estudiarlo, plantea tus propios problemas, consulta la bibliografía propuesta por el profesor. Si tu avanzas teniendo dudas o no comprendiendo algún tema, tendrás mayores **DIFICULTADES** más adelante.

!Continuamos avanzando!

CAPÍTULO N° 2

VALOR ACTUAL, PAGARE, DESCUENTOS Y PAGOS PARCIALES

OBJETIVOS:

Al término del capítulo, estarás capacitado para:

1.- Determinar el valor actual de una deuda futura

2.- Resolver problemas de pagarés

3.- Conocer las distintas modalidades de descuentos de intereses

4.- Determinar el valor de las cuotas y/o repactaciones de deuda, según regla americana y regla comercial

2.1 VALOR ACTUAL DE UNA DEUDA CON VENCIMIENTO EN EL FUTURO

En el capítulo anterior, se determinó el monto de un capital (C + I) a una determinada fecha. Para ello, al capital se le agregaba los intereses que generaba éste durante cierto tiempo.

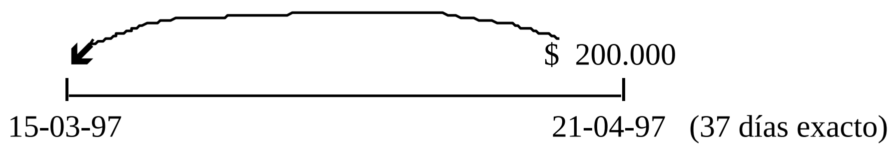
Por ejemplo, un capital de $1.000.000 se invierte el 1,5% mensual, durante un mes. El monto de dicho capital corresponde a 1.015.000. En otras palabras $1.015.000 y $1.000.000 son valores equivalentes que se encuentran en distinta fecha. Para la persona que hoy deba $1.000.000 y pueda invertir su dinero al 1,5% mensual, le dará lo mismo pagar 1.000.000 hoy o $ 1.015.000 al cabo de un mes. Por supuesto que si el acreedor acepta recibir $1.000.000 dentro de un mes, el deudor saldría ganando, debido a que si invierte hoy $1.000.000 podrá ganar $15.000 al cabo de un mes. A esa fecha paga la deuda de $1.000.000 quedándole en su poder los $15.000 de interés que generó la inversión. En este sentido, y sin que el acreedor cobre intereses por la demora del pago, conviene retrasar éste, siempre y cuando se pueda invertir el dinero.

Este mismo problema puede ser visto en sentido contrario, es decir, de un valor futuro, se puede determinar un valor actual o presente. Este último es equivalente al valor futuro.

Una deuda futura, es aquella que tiene una fecha de vencimiento en el futuro.

> Por ejemplo, Pedro Díaz, el 15 de Marzo de 1997 contrae una deuda por $200.000.- la cual debe ser cancelada o vence el 21 de Abril de 1997.

Gráficamente:



El valor actual de una deuda futura consiste en determinar un valor equivalente al valor futuro, en una fecha anterior a la fecha de vencimiento, es decir, el valor actual responde a la pregunta ***<u>¿qué capital invertido hoy (o la fecha del valor actual), durante el tiempo comprendido entre la fecha del valor actual y la fecha del vencimiento de la deuda, permitiendo generar o devengar un valor o monto igual al valor de vencimiento de la deuda ($200.000).</u>***

Para determinar el valor actual, al valor futuro se le debe descontar intereses. Estos intereses son los que generaría el capital durante el lapso de tiempo entre las fechas del valor actual y del valor futuro.

Para determinar los intereses a descontar, además del capital invertido y tiempo correspondiente, debemos disponer de una tasa de interés, que en el caso del descuento de intereses, recibe el nombre de ***tasa de descuento*** (d).

La tasa de descuento puede corresponder:

➘1.- A la rentabilidad que desea obtener una institución financiera por adquirir documentos (pagarés, bonos, etc.).

Por ejemplo, si un Banco compra pagarés, y por esta operación cobra un 5% mensual, la tasa de descuento sería de 5% mensual.

➘2.- Por el lado del deudor, debería corresponder a la rentabilidad de la mejor alternativa de inversión (hasta el momento no se considera la diferencia de riesgo entre alternativas de inversión).

Por ejemplo, si el Sr. Díaz tiene 2 alternativas de inversión de similar riesgo, las que generan una rentabilidad del 2 y 2,5% mensual. En este caso, la tasa de descuento sería de un 2,5% mensual.

NO TE OLVIDES DE ÉSTO

Cuando existe alguna diferencia de tasas de descuento entre deudor y acreedor, se soluciona el problema con la negociación, sacando mayor ventaja el que tenga mayor poder de negociación.

El valor actual de una deuda futura, se puede obtener a interés simple o a interés compuesto, dependiendo de lo que acuerden las partes, o si los intereses que se generan se capitalizan o no.

2.1.1 VALOR ACTUAL A INTERÉS SIMPLE

Nosotros conocemos cómo determinar el monto de un capital, usando la fórmula:

$$M = C\left(1 + n \times i\right)$$

Además, sabemos qué pregunta responde el concepto de Valor Actual (si te olvidaste vuelve a la página anterior). Por lo tanto, podemos dejar expresado el valor futuro, como:

$$VF = VA\left(1 + n \times d\right)$$

$$\boxed{VA = VF / (1 + n \times d)}$$

Donde:

VA	:	Valor actual de un valor futuro
VF	:	Valor futuro o deuda futura
n	:	Número de periodos de generación de intereses
d	:	Tasa de descuento.

Supón que el ejemplo anterior, se pacta a interés simple.

$$VA = \frac{200.000}{1 + \frac{0,025}{30} \times 37} = \$\ 194.018$$

A Pedro Díaz le da lo mismo pagar $ 194.018 el 15.03.97 o $ 200.000 el 21.04.97 Siendo ambas cifras equivalentes.

<u>¿Porqué le da lo mismo?</u>

Respuesta:

Si los $ 194.018 de hoy, los invierte al 2,5 % mensual, al cabo de 37 días obtendrá $ 200.000. Por lo tanto, si paga hoy $ 194.018 o $ 200.000 al cabo de 37 días, a Pedro no le generará ni pérdidas ni ganancias el pago adelantado.

¿CÓMO VAS?

Ejercicio 2.1:

¿Cuál es el V.A. calculado a una tasa de descuento del 42% anual simple a la fecha hoy, de un valor futuro de $132.000 que vence dentro de 6 meses.

$$VA = 132.000 / (1 + (0,42 / 12) \times 6) = \$\ 109.091$$

2.1.2. VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO

$$VA\ (1 + d)^n = VF$$

$$\boxed{VA = VF / (1 + D)^n}$$

Por ejemplo, determina el valor actual de una deuda de $300.000 que vence al cabo de 5 meses, considerando una tasa de descuento del 2% mensual.

$$VA = \frac{300.000}{(1 + 0,02)^5} = \$\ 271.719$$

Observaciones:

- Mientras mayores sean los periodos de capitalización o de generación de intereses, frente a un mismo valor futuro y tasa de descuento, menor será el V.A.

- Mientras mayor sea la tasa de descuento, frente a un mismo valor futuro, y tiempo de uso del dinero, menos será el V.A.

- Pueden existir gran cantidad de valores actuales de un mismo Valor Futuro. Por ejemplo, para un Valor Futuro que vence el 18.09.97 se puede calcular VA para 17.09.97, 16.09.97 y para cualquier otra fecha anterior al 18.09.97.

2.2 PAGARÉ

Desde el punto de vista financiero, entenderemos por **Pagaré, como un documento o una orden escrita de pago, donde una persona (deudor) se compromete a cancelar en determinada fecha o después de cierto tiempo, una cantidad de dinero a otra persona (acreedor o tenedor).**

El valor del documento, en la fecha de suscripción o generación de la obligación recibe el nombre de *valor nominal del Pagaré* (V.N.).

Un pagaré puede o no generar intereses. Dependerá de lo que acuerden las partes.

Si al valor nominal (V.N.) se le agregan los intereses que genera el documento, obtendremos el valor de vencimiento (V.V.).

El valor de vencimiento será igual al valor nominal cuando en un pagaré no se pactan intereses.

El tiempo de vigencia del documento se puede establecer en términos mensuales (anuales) o en términos diarios. Para determinar la fecha de vencimiento en el primer caso se utiliza criterio aproximado, y en el segundo, el criterio exacto.

2.2.1 VALOR DE VENCIMIENTO DE UN PAGARÉ:

Para determinar el valor de Vencimiento de un Pagaré, al igual que el monto de un capital, se debe considerar.

- 1.- Valor nominal del Pagaré (VN)
- 2.- Tasa de interés que genera el Pagaré (i)
- 3.- Tiempo de vigencia del documento (n)
- 4.- Modalidad de cálculo de interés (Simple o Compuesto).

Si se utiliza la modalidad de Interés Simple:

$$V.V \quad = \quad VN\ (1 + i \times n)$$

Si se utiliza la modalidad de Interés Compuesto:

$$V.V. \quad = \quad VN\,(1 + i)^{n}$$

Supongamos el siguiente ejemplo:

> Juan André por la compra de un determinado artículo de escritorio, firma un Pagaré el 12.03.97 con vencimiento en 4 meses, con un valor nominal de $15.000, a una tasa de interés del 3% mensual simple. Determina la fecha y el valor de vencimiento del Pagaré.

a.- Fecha de Vencimiento:

Como se ha señalado, cuando el tiempo de uso del dinero, se ha pactado en meses o años, para determinar la fecha de vencimiento, se ha de usar el criterio aproximado, por lo tanto la fecha de vencimiento será: **12.07.97**

$$VV \quad = \quad 15.000\,(1 + 0{,}03 \times 4) \quad = \quad \$\,16.800$$

Juan André el 12.07.97 (criterio aproximado) deberá cancelar al tenedor del documento (la casa Comercial u otra persona) $ 16.800.

Como puedes darte cuenta, el documento en un período de 4 meses generó intereses por $ 1.800.

Si el periodo de vigencia del documento se hubiese pactado en 120 días, debería usarse el criterio exacto.

! Determina la fecha de vencimiento en este caso!

¿Cuánto dinero deberá pagar Juan André el 12.07.97, si se hubiere pactado a Interés Compuesto?.

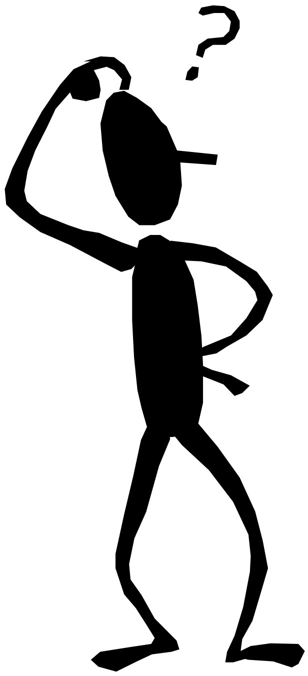
$$VV \quad = \quad 15.000\,(1 + 0{,}03)^{4} \quad = \quad \$\,16.883$$

Ejemplo 2.2:

Una casa comercial tiene en su poder 2 Pagarés firmados por el cliente Pedro Pablo. El Pagaré Nº 1 se firmó hace 5 meses con un valor nominal de $ 200.000, con una tasa de interés del 18,5% anual simple, vence dentro de 8 meses,. El Pagaré Nº 2 vence al cabo de 1 mes, teniendo como valor de vencimiento $ 150.000.

➘ a.- Determina la cantidad de dinero a cancelar por Pedro Pablo en fecha de vencimiento por el Pagaré Nº 1.

➘ b.- Responde pregunta **a.-** en interés compuesto.



Respuesta:

a.-

VN	= 200.000		VV	=	$200.000 \left(1 + \frac{0,185}{12} \times 13\right)$
i	= 18,5% anual				
n	= 13 meses		VV	=	\$ 240.083

b.-

1.- Cálculo tasa equivalente mensual

$$(1 + 0,185)^{1} = (1 + i_m)^{12}$$

$$i_m = 1,4245748\%$$

2.- Cálculo del valor de vencimiento del pagaré

$$VV = 200.000\,(1 + 0,014245748)^{13} = \$\ 240.376$$

2.2.2 VALOR DE LIQUIDACIÓN O VENTA DE UN PAGARÉ.

El tenedor de un Pagaré no necesariamente debe esperar hasta la fecha de vencimiento de éste para obtener el dinero de la obligación. Aquel puede vender el documento a cualquier persona o institución. Por supuesto, el precio de venta del Pagaré, generalmente será menor a su valor de vencimiento. Esto se debe a que el comprador por prestarle el servicio de adelantamiento del dinero, de evitarle al tenedor del pagaré el riesgo de no pago por parte del deudor, cobrará una determinada comisión, la que se descuenta del valor de vencimiento. Esta comisión o descuento se obtiene aplicando una determinada tasa de descuento.

La tasa de descuento, está determinada por:

- 1.- Riesgo de no pago de la deuda
- 2.- Tiempo entre fecha de venta del Pagaré y la de su vencimiento
- 3.- Rentabilidad que desee ganar el comprador
- 4.- Poder de negociación de las partes

El valor de liquidación (VL) o venta de un Pagaré, corresponde al valor actual del valor de vencimiento (VV) del Pagaré.

$$VL = \frac{VV}{(1 + d \times n)} \quad \text{(a interés simple)}$$

$$VL = \frac{V.V}{(1 + d)^n} \quad \text{(a interés compuesto)}$$

Siempre que se desee determinar el valor de liquidación de un Pagaré, es necesario disponer del valor de vencimiento, y a éste descontarle los intereses (comisión) que cobre el comprador.

Ejemplo 2.3:

Considerando el ejemplo 2.2, supón que el día de hoy la casa comercial vende los documentos a una institución financiera, la cual cobra un 3,5% mensual simple por realizar dicha operación.

- a.- ¿Cuánto deberá cancela Pedro Pablo a la institución financiera en la fecha que venza cada uno de los documentos?

- b.- ¿Cuánto dinero recibirá la casa comercial de parte de la institución financiera por la venta de los Pagarés el día de hoy?.

- c.- ¿Cuánto dinero deberá sacrificar la casa comercial por vender el pagaré n° 1 el día de hoy?

REALIZA LA RECTA DE TIEMPO

a: $ 150.000 y $ 240.083 (pagaré 2 y .pagaré 1)

b: V.L. Pagaré 1 $= \dfrac{240.083}{1 + 0{,}035 \times 8} =$ $ 187.565

V.L. Pagaré 2$= \dfrac{150.000}{1 + 0{,}035} =$ $ 144.928

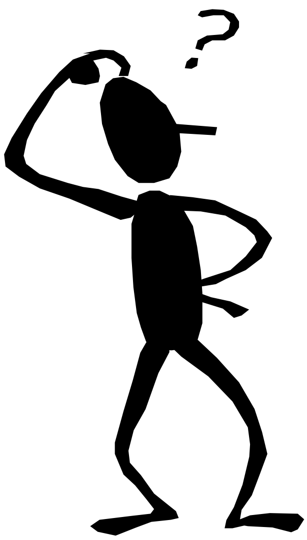
c:

V.L.	240.083
V.L.	187.565
	$ 52518

(Ganancia de la institución financiera por la compra del pagaré N°1)

Ejemplo 2.4:

Resuelve el problema 2.3, considerando que la institución financiera aplica interés compuesto en las operaciones de compra de pagarés.



Respuesta:

a: $ 150.000 y $ 240.083 (no sufre modificación respecto al caso anterior).

b.- V.L. pag. 1 = $\dfrac{240.083}{(1 + 0,035)^8}$ = $ 182.322

V.L. pag. 2 = $\dfrac{150.000}{(1,035)^1}$ = $ 144.928

c.-

V.V.	240.083
V.L.	182.322
	$ 57.761

Alguien podría pensar que para determinar el valor de liquidación de un pagaré, bastaría agregarle al valor nominal, los intereses que genere la obligación entre la fecha de suscripción y la fecha de venta. Si observas el gráfico del ejemplo 2.3, a simple vista se tiende a pensar que la afirmación es correcta. **Pero no es así**. Recuerda que quien compra el pagaré, es una persona o institución que desea ganar algo por aquella operación. El dinero que destine a la compra, es una inversión que ella realiza, obteniendo los retornos de la inversión cuando el deudor cancela la deuda en la fecha de vencimiento. Por tal motivo, la ganancia de la inversión se obtiene por el diferencial entre valor de venta y valor de vencimiento.

Por otro lado, en el caso de interés simple, los intereses que se agregan al valor nominal, se determinan usando como base este último, en cambio, los intereses que se descuentan del valor de vencimiento se calculan usando como base el valor de liquidación del pagaré. Como éste es mayor al valor nominal, los intereses a descontar por la venta del documento son mayores que los intereses que genera originalmente el pagaré.

!Compruébalo!.

¿LO HICISTE?

En el caso de interés compuesto, el resultado es el mismo si se agrega intereses al valor nominal o se descuenta intereses al valor de vencimiento. Esto debido a que el capital relevante o que sirve de base para calcular los intereses de cada período (mes o año) va creciendo por las capitalizaciones de los intereses. Por lo tanto, según se observa en el gráfico de la pregunta 2.3 el monto al tiempo cero (o) es igual el valor actual a tiempo cero ***!Compruébalo!.***

Ejemplo 2.5:

Una empresa necesita obtener $1.000.000 para cancelar el finiquito de un trabajador. Para ello decide vender un pagaré que tiene en su poder y cuyo valor nominal es de $950.000. Se firmó hace 2 meses a una tasa de interés simple del 10.5% anual y vence dentro de 10 meses. Por la venta del documento se obtiene exactamente el $1.000.000. ¿qué tasa de interés aplicó el comprador del documento?.

$$V.V = 950.000 \text{ x } \left(1 + \frac{0{,}105}{12} \text{ x } 12\right) = \$\ 1.049.750$$

i = 10,5 %

950.000 V.V. = ?

|______|______|______|______|______|______|______|______|______|______|______|______|

2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1.000.000 d = ?

$$V.L. = \frac{V.V}{1 + d \text{ x } n}$$

$$1.000.000 = \frac{1.049.750}{1 + d \text{ x } 10}$$

d = 0,5% mensual

2.3 DESCUENTO RACIONAL Y DESCUENTO BANCARIO

En los problemas de Valor Actual y de liquidación de pagarés, descontábamos intereses a un valor futuro o valor de vencimiento. Para descontar estos intereses, existen dos modalidades.

- 1.- Descuento Racional o Matemático
- 2.- Descuento Bancario

2.3.1 DESCUENTO RACIONAL O MATEMÁTICO:

El descuento Racional o Matemático corresponde a aquellos intereses que se descuentan de un valor futuro, utilizando como base de cálculo el valor actual.

Esta modalidad de descuento de intereses, es el que hemos utilizado anteriormente en el cálculo de valor actual.

El descuento racional que se efectúa a un valor futuro, corresponde a la diferencia entre el valor futuro y el valor actual.

$$D.r. = VF - VA$$

Sea:
Dr = Descuento racional
VF = Valor futuro
VA = Valor actual

Como debes recordar, el VA se obtiene de la siguiente manera:

$$VA = VF / (1 + n \times d)$$

Al observar esta fórmula, una persona podría pensar que los intereses que se descuentan, se determinan usando como base de cálculo el valor futuro (***!compruébalo***!). Pero anteriormente se hemos señalado, que esa idea es errónea, ***porque se calcula sobre el V.A.***

Utilizando las ecuaciones de descuento racional y de valor actual, podemos determinar una fórmula para obtener en forma inmediata el descuento racional.

1.- $Dr = VF - VA$

2.- $VA = \dfrac{V.F.}{1 + n \times d}$

Reemplazando 2 en 1 obtenemos

$$Dr = VF - \frac{V.F}{1 + n \times d}$$

$$\boxed{Dr = VF\left(1 - 1/\left(1 + n \times d\right)\right)}$$

Por ejemplo, una deuda de $40.000 se ha de cancelar dentro de 6 meses, la tasa de descuento aplicada es de un 2,5% mensual simple.

➘ a.- Determina valor actual al día de hoy.

VA = 40.000 / (1 + 6 x 0,025) = $ 34.763

➘ b.- Determina el descuento racional calculado implícitamente en el problema anterior.

VF - VA = Dr

40.000 - 34.763 = $ 5.217

Según fórmula:

$$Dr = 40.000 \left(1 - \frac{1}{1 \times 6 \times 0{,}025}\right) = \$\ 5.217$$

2.3.2 **DESCUENTO BANCARIO**

El Descuento Bancario, es la operación en la cual el tenedor de un documento mercantil, transfiere dicho documento a favor de otra persona, (generalmente, empresa), antes de su vencimiento, a cambio de cierta cantidad de dinero menor al monto nominal o de vencimiento del documento. Los intereses a descontar corresponden al cobro de intereses anticipados, los que se calculan sobre el monto nominal del documento.

De la presente definición, es necesario distinguir entre valor nominal del documento y monto nominal de éste. El primero no contiene interés y el segundo incluye los intereses que genera la obligación.

Por ejemplo una persona obtiene un préstamo $ 200.000 al 5% anual simple, a un plazo de 3 años, previa firma de un pagaré.

Monto Nominal	: 200.000 (1 + 3 x 0,05)	=	$ 230.000
Valor Nominal	: 230.000 - 30.000	=	$ 200.000

El descuento bancario se caracteriza porque los intereses se descuentan de un valor futuro, y se determinan sobre dicho valor o monto. En cambio, en el descuento racional, los intereses se calculan sobre el valor actual.

La tasa de interés anticipada que se aplica en la operación recibe también el nombre de tasa de descuento bancario.

Un documento puede ser descontado cuantas veces se pueda antes de la fecha de vencimiento. Cuando esta operación se efectúa entre instituciones financieras y/o bancarias, recibe el nombre de ***redescuento***.

La operación de descuento bancario es una operación de corto plazo.

Determinación de descuento bancario:

$$\boxed{D = M \times n \times d}$$

donde:

D = Descuento bancario
M = Monto Nominal del documento
n = Tiempo para el cual se calcula el descuento
d = Tasa de interés anticipada o de descuento bancario por unidad de tiempo.

La fórmula anterior es análoga a $I = C \times n \times i$. Esto se debe a que los intereses que se descuentan para cada periodo son iguales, debido a que la base de cálculo es la misma (monto nominal del documento).

Si deseamos determinar el valor actual o valor de liquidación del documento, utilizando esta modalidad.

$$VA = VF - D$$

pero
$$D = M \times n \times d$$
o
$$= VF \times n \times d$$

$$VA = VF - VF \times n \times d$$

$$\boxed{VA = VF\,(1 + n \times d)}$$

Supongamos que el problema anterior se pactó según la modalidad de descuento bancario. Calcula el descuento bancario y el Valor Actual.

D = 230.0000 x 3 x 0,05 = $ 34.500

VA = 230.000 - 34.500 = $195.500

Utilizando la fórmula de V.A. según descuento bancario.

VA = 230.000 (1 - 3 x 0,05) = $195.500

Como nos podemos dar cuenta en la modalidad de descuento bancario sólo se hizo a interés simple, en cambio, en el caso de descuento racional, este se calculó a interés simple y a interés compuesto (dependiendo si los intereses se capitalizan o no). Esto se explica, porque en el descuento bancario, los intereses son iguales para todos los meses (días o años). Para utilizar el interés compuesto la tasa de cálculo debería modificarse periodo a periodo, lo que conceptualmente no es procedente.

Ejemplo 2.6:

El 01 de Abril de 1997, se descontó un pagaré de monto nominal $200.000, con vencimiento el 01 de Agosto de 1997, utilizando una tasa de interés anticipada o tasa de descuento bancario de 6% mensual.

Calcula:

➘ a.- El descuento bancario correspondiente a cada mes en el periodo de vigencia del pagaré.

➘ b.- El descuento bancario total efectuado (utiliza tiempo aproximado).

Respuesta:

a.-	Cada mes:	D	=	200.000 x 0,06	=	$ 12.000
b.-	Descuento total D		=	12.000 x 4	=	$ 48.000

Según fórmula:

D = 200.000 x 4 x 0,06

D = $ 48.000

En general, en las operaciones de descuento bancario se utiliza el método bancario (transformación de tasa ordinaria, tiempo exacto).

Por lo tanto, ahora resolvamos el mismo problema usando el criterio bancario.

a)	Abril	=	D	=	200.000 x 30 x 0,06/30	=	12.000
	Mayo	=	D	=	200.000 x 31 x 0,06/30	=	12.400
	Junio	=	D	=	200.000 x 30 x 0,06/30	=	12.000
	Julio	=	D	=	200.000 x 31 x 0,06/30	=	12.400
							$ 48.800

b) D = 200.000 x 122 x 0,006/30 = $ 48.800

PRUEBA N° 5

Un pagaré de monto nominal $100.000 con vencimiento el 1º de Diciembre de 1997 fue descontado (vendido) en un banco al 3% mensual el día 1º de Mayo de 1997, posteriormente, el 1º de Agosto se vendió al Banco Central al 4% mensual. (Use tiempo aproximado).

- a.- Calcula el valor de compra del documento por parte del banco comercial.
- b.- Calcula el dinero ganado por el banco comercial por la compra del pagaré.
- c.- Calcula el valor de compra del documento por parte del Banco Central.
- d.- Calcula el dinero ganado por el Banco Central por la compra del pagaré.
- e.- Responde las preguntas de las letras a, b, c, d utilizando descuento racional (emplea tiempo aproximado).

!No mires los resultados!

<u>Pauta de Corrección:</u>

Recta de tiempo

d = 3 % $ 100.000

01.05 01.06 01.07 01.08 01.09 01.10 01.11 01.12

a.- VA = VF (1 - n x d)

VA = 100.000 (1 - 7 x 0,03) = $ 79.000

b.- D2 = 100.000 x 7 x 0,03 = $ 21.000

c.-

d = 4 %

100.000

01.08 01.09 01.10 01.11 01.12

VA = 100.000 (1 - 4 x 0,04) = $ 84.000

d.- Db = 100.000 x 4 x 0.04 = $ 16.000

e.-

a.- VA = $\dfrac{100.000}{1 + 7 \times 0,03}$ = $ 82.645

b.- VF - VA = Dr

100.000 - 82.645 = $ 17.355

c.- $VA = \dfrac{100.000}{1 + 4 \times 0{,}04} = \$ 86.207$

d.- Dr = VF - VA

100.000 - 86.207 = $ 13.793

2.4. ECUACION DE VALORES EQUIVALENTES

Hasta este momento, estamos en condiciones de calcular el interés de cualquier préstamo u obligación, su monto y su valor actual.

Al hablar de monto y valor actual de una deuda nos estamos refiriendo a valores equivalente que se encuentran en distinta fecha.

Dos o más cantidades de dinero de distinta cuantía, con vencimientos en distintos momentos en el tiempo, **son equivalentes** a una tasa de interés dada, si sólo si, trasladas o evaluadas en una fecha común, llamada fecha focal, utilizando dicha tasa de interés, resultan de igual cuantía.

Los traslados o evaluaciones de las cantidades de dinero a la fecha focal, pueden hacerse de dos maneras:

a.- Capitalización

b.- Actualización

a.- <u>Capitalización:</u>

Cuando hablamos de capitalización nos referimos a la determinación del valor futuro o monto de un cierto capital o deuda, es decir, a este capital o deuda se le agregan los intereses que generaría dicho capital o dinero adeudado si se invirtiera a una determinada tasa de interés, entre la fecha del capital o vencimiento de la obligación y la fecha focal. En este caso, siempre la fecha focal es posterior a la fecha de vencimiento de la obligación.

b.- <u>Actualización:</u>

Cuando hablamos de actualización, nos referimos a la determinación del valor actual o del capital de cierta deuda futura o monto, es decir, a dicha deuda futura se le descuenta los intereses que habría generado el capital invertido o deuda entre la fecha focal y la fecha de vencimiento de la obligación. En este caso, siempre la fecha focal es anterior a la fecha de vencimiento de la obligación. La metodología de descuento a utilizar debe ser el racional o matemático.

Para entender mejor el concepto de valores equivalentes, veamos el siguiente ejemplo:

> Una deuda de $ 100.000 con vencimiento el día de hoy es equivalente a $120.000 con vencimiento dentro de un año, si los $ 100.000 se pueden invertir durante ese año a una tasa de interés del 20% anual. La fecha focal que se utilice puede ser el día de hoy, o bien, un año más, o cualquier otra fecha.

Fecha Focal: Dentro de un año

$M = 100.000\ (1 + 0{,}20 \ \ x\ 1)$
$M = 120.000$

$ 100.000 $ 120.000

0 VA = 120.000 / (1,20) 12 meses (1 año)

VA = $ 100.000

Fecha Focal: hoy (tiempo cero)

hoy		dentro de un año	
100.000	=	120.000	evaluado al día de hoy.
100.000	=	120.000 / (1 + 0,20 x 1)	
100.000	=	100.000	

Fecha Focal: dentro de un año

hoy		dentro de un año
100.000	=	120.000
evaluado dentro de un año		
100.000 (1 + 0,20 x 1)	=	120.000
120.000	=	120.000

Como te has podido dar cuenta los $ 100.000 de hoy evaluados dentro de un año ascienden a $ 120.000, y los $ 120.000 del próximo año evaluados al día de hoy corresponde a $ 100.000, es decir, ambos valores son equivalentes.

El ejemplo anterior fue resuelto a interés simple, pero si lo hacemos a interés compuesto, nos daría el mismo resultado.

¿Por qué crees tú?.

?

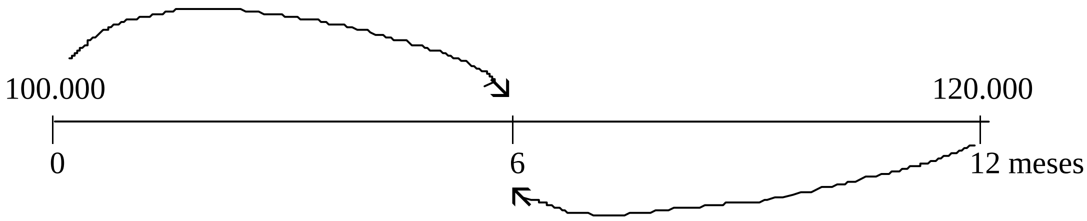
Respuesta:

Porque el periodo de capitalización es de un año, y el tiempo de uso del dinero es un año, es decir, n = 1, y para un sólo periodo con un mismo capital y tasa de interés, el interés resultante es igual en interés simple y en interés compuesto.

En interés simple la elección de la fecha focal altera las equivalencias, de tal forma que dos o más cantidades de dinero que son equivalentes utilizando una fecha focal no lo serán si se emplea otra fecha focal. Situación que no ocurre si se utiliza la metodología de interés compuesto. ***(Comprobémoslo).***

Del ejemplo anterior verifiquemos si ambos valores ($100.000 y $120.000) son equivalentes, usando como fecha final el mes 6.

Gráficamente:



Cálculo a interés simple:

Fecha Focal: mes 6

$100.000 evaluado al mes 6 = $120.000 evaluados al mes 6

$$100.000 \left(1 + \frac{0,20}{12} \times 6\right) = 120.000 \,/\, \left(1 + \frac{0,20}{12} \times 6\right)$$

$$\$\ 110.000 \neq \$\ 109.091$$

Preguntas:

a.- ¿Porqué la diferencia?
b.- Verifica si la diferencia se produce utilizando la modalidad de interés compuesto.

Respuestas:

a.- Si te puedes dar cuenta, al observar la gráfica del problema, para evaluar los $100.000 de hoy en el mes 6, es decir, para calcular el monto al mes 6; a los $100.000 se le deben agregar intereses que generaría los $100.000 durante los 6 meses siguientes ($1.667 por cada mes), obteniendo un monto de $110.000.

Para evaluar los $120.000 con vencimiento dentro de un año, en la fecha final del mes 6, ósea, determinar su valor equivalente al final del mes 6, al valor futuro de $120.000 se le deben descontar intereses por los 6 meses de uso de dinero, estos intereses que se descuentan utilizan como base de cálculo el valor equivalente del mes 6 (109.091), ósea, los intereses mensuales que se descuentan corresponden a $1.818,18 ($ 10.909 durante 6 meses).

Por lo tanto, para calcular el monto al mes 6, la base de cálculo fue $100.000, para calcular el V.A. de los $120.000 al mes 6, la base de cálculo fue de 109.091. En el primer caso los intereses mensuales agregados ascendían a $ 1.667, y en el segundo caso, los intereses mensuales descontados a $ 1.818 lo que explica que a una distinta fecha focal, el valor actual de un valor futuro sea distinto al monto de un capital a esa misma fecha focal, es decir, que ambos valores no sean equivalentes a dicha fecha focal.

b.- Como ahora el problema se revuelve a interés compuesto, se está hablando de períodos mensuales y la tasa de interés es anual. Lo primero es determinar una tasa equivalente mensual.

Determinación de tasa equivalente mensual

$(1 + 0,20)^1 \quad = \quad (1 + i_m)^{12}$

$i_m \quad = \quad 1.530947\%$

Evaluación de los valores en distintas fechas focales

FF hoy: $100.000 \quad = \quad 120.000 \,/\, (1 + 0,01530947\,)^{12}$

$100.000 \quad = \quad 100.000$

- Si existe alguna diferencia en decimales corresponde a aproximaciones realizadas

FF 1 año: $100.000\,(1 + 0,01530947)^{12} \quad = \quad 120.000$

$120.000 \quad = \quad 120.000$

$FF_{6\ meses}$ $100.000\,(1 + 0,01530947)^{6} \quad = \quad 120.000 \,/\, (1 + 0,01530947)^{6}$

$109.544,51 \quad = \quad 109.544.51$

De los cálculos anteriores podemos concluir, que a interés compuesto, dos valores son equivalentes, cualquiera sea la fecha focal empleada.

Para explicar lo anterior, nos basaremos en el siguiente ejemplo:

C = 500.000
n = 3
i = 2% mensual

500.000   510.000   520.200   530.604

0   I = 10.000   1   I = 10.200   2   Y = 10.404   3   meses

FF (0) = 500.000 = 530.604 - (10.000 +10.200 + 10.404)

500.000 = 500.000

FF (3) = 500.000 + (10.000 + 10.200 + 10.404) = 530.604

530.604 = 530.604

FF (1) = 500.000 + (10.000) = 530.604 (10.200 + 10.404)

510.000 = 510.000

Para calcular el interés de cada mes se usa una base distinta, producto de las capitalizaciones de los intereses. Los intereses que se determinan servirán para ser sumados al capital o descontados al valor futuro. A diferencia del método de interés simple que los intereses agregados son distintos a los intereses descontados.

Los problemas financieros tratados hasta el momento se han centrado solamente en determinar el interés de un capital o préstamo, venciendo éste en una fecha determinada, es decir, la cancelación de la obligación se efectúa en un pago único. En la práctica, los prestamos se pueden cancelar en varias cuotas o hacer varios pagos parciales para terminar con la obligación. Para determinar estos pagos parciales y los intereses relacionados, es necesario utilizar y conocer las llamadas ***ecuaciones de valores equivalentes.***

Una ecuación de valores equivalentes corresponde a una ecuación que involucra sólo cantidades financieras de valor equivalente, en los términos de la definición anterior.
La ecuación del valor equivalente permite a una persona realizar una serie de cálculos, por ejemplo determinar el valor de las cuotas de un préstamo, el capital no cancelado a una fecha determinada, repactaciones de préstamos, etc.

Para poder entender el tema, nos basaremos en el siguiente ejemplo, Una persona obtuvo un crédito por $200.000 el día de hoy, a una tasa de interés del 3% trimestral. El crédito se cancelará en dos cuotas iguales trimestrales y vencidas.

200.000

0	1	2	trimestres
	X	X	

i = 3% trimestral

X = cuotas iguales trimestrales y vencidas (la cuota al ser vencida significa que se cancela al final del periodo (trimestre). Si fuese anticipada se cancela al inicio del periodo).

En el presente ejemplo la deuda de $ 200.000 más los intereses que esta genera debe ser cancelada en 2 cuotas iguales (X). Por supuesto, que la suma de las dos cuotas será mayor que la deuda, producto de los intereses. Pero la suma de los valores equivalente en fecha focal (0) de cada una de las cuotas debe ser igual al préstamo. Es decir, al producirse dicha igualdad la cancelación de las cuotas implica la devolución total de la deuda.

<u>!Resolvamos el problema!</u>

a.- Determinemos el valor de las cuotas, usando fecha focal tiempo cero (hoy), a interés simple.

200.000

0	1	2	trimestres
	X	X	

$$200.000 = \frac{X}{1 + 0,03 \text{ x } 1} + \frac{X}{1 + 0,03 \text{ x } 2}$$

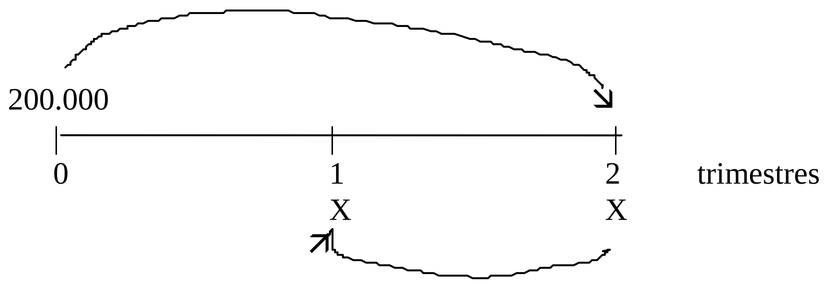
$$X = 104.478$$

b.- Determinemos el valor de las cuotas, usando fecha focal tiempo cero (hoy), a interés compuesto.

$$200.000 = \frac{X}{(1 + 0{,}03)^1} + \frac{X}{(1 + 0{,}03)^2}$$

$$X = \$\ 104.522$$

c.- Determinemos el valor de las cuotas usando fecha focal trimestre 2, a interés simple y compuesto.



Interés simple:

$$200.000\ (1 + 0{,}03 \times 2) = X\ (1 + 0{,}03 \times 1) + X$$

$$212.000 = X\ (1.03) + X$$

$$212.000 = 2{,}03\ X$$

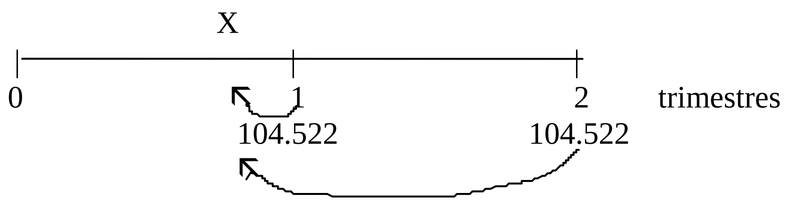
$$X = \$\ 104.433$$

Interés compuesto:

$$200.000\ (1 + 0{,}03)^2 = X\ (1.03) + X$$

$$X = \$\ 104.522$$

d.- Supongamos que un mes antes de vencer la primera cuota, el deudor desea cancelar en un sólo pago la totalidad de la deuda. Determina el dinero a cancelar en esa oportunidad. Usa como valor de cuota $104.478 y la modalidad de interés simple.



$$i = 3\% \text{ trimestral}$$

$$X = \frac{104.478}{(1 + 0{,}03 / 3 \times 1)} + \frac{104.478}{(1 + 0{,}03 / 3 \times 4)}$$

$$X = \$\ 203.903$$

El deudor en vez de pagar dos cuotas de $ 104.478 en la fecha correspondiente, un mes antes del vencimiento de la primera cuota debería cancelar $ 203.903.

e) Resuelve el problema anterior a Interés compuesto.

Determinación de tasa mensual equivalente a la tasa trimestral.

$$(1 + 0{,}03)^1 = (1 + i_m)^3$$

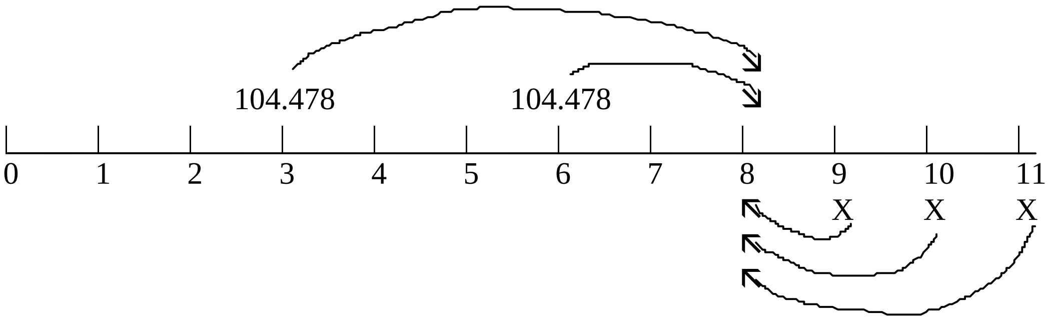
$$i_m = 0{,}9901634\%$$

$$X = \frac{104.478}{(1{,}009901634)^1} + \frac{104.478}{(1{,}009901634)^4}$$

$$X = \$\ 203.894$$

Al observar el resultado de los problemas **d** y **e,** observamos que según la modalidad de interés compuesto, el valor de la cuota es menor a lo que se obtiene a interés simple. Esto se debe a que para un determinado período de tiempo el interés compuesto es mayor al interés simple, por lo tanto se requiere menor capital para llegar al mismo monto en interés compuesto en comparación al caso de interés simple.

f) Supón que el deudor del préstamo no podrá cancelar las cuotas de $ 108.478 en la fecha estipulada, y desea cancelar la deuda en 3 cuotas mensuales iguales y vencidas. La primera de ellas 3 meses después de vencimiento de la segunda cuota. Se acuerda mantener la tasa de interés.



Usando la modalidad de Interés simple y fecha focal mes 8

$$104.478\,(1 + 0{,}03 / 3 \times 5) + 104.478\,(1 + 0{,}03 / 3 \times 2) = \frac{X}{(1 + 0{,}03 / 3\ \ 1)} + \frac{X}{(1 + 0{,}03 / 3 \times 2)} + \frac{X}{(1 + 0{,}03 / 3 \times 3)}$$

$$109.702 + 106.568 = 2{,}9401364953\ X$$

$$X = \$\ 73.527$$

A modo de ejercitación:

1.- Resuelve el problema:
- a.- a Interés compuesto y fecha focal mes 8
- b.- a interés simple y compuesto y fecha focal mes 4
- c.- a Interés simple y compuesto, y fecha focal mes cero (0),considerando que la primera cuota repactada se cancela 6 meses después de vencer la cuota 2 original.

2.5. PAGOS PARCIALES

Como hemos señalado al hablar de pagos parciales, nos referimos a la sucesión de pagos o cuotas que ha de pagar el deudor de una obligación, con el objeto de cancelar totalmente la deuda.

Para determinar el valor de las cuotas existen dos formas:

1.- Regla comercial
2.- Regla Americana o Regla de Saldos Insolutos

2.5.1 ***Regla comercial***:

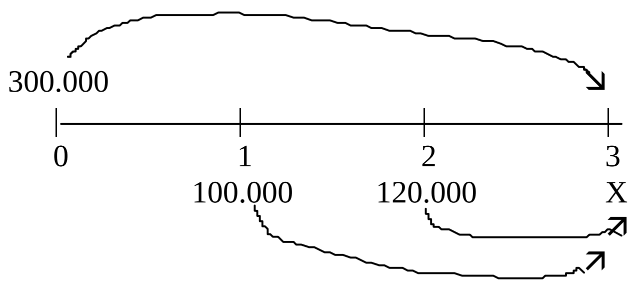
El total de los pagos parciales debe ser equivalente al capital prestado, utilizando para la evaluación la tasa de interés del crédito y como fecha focal, la del vencimiento de la última cuota (Principalmente para interés simple). En caso de aplicarse la modalidad de interés compuesto, como ya sabemos, es indiferente la fecha focal utilizada.

Para entender mejor el concepto y la metodología de cálculo, veamos un ejemplo.

Se solicita en préstamo $300.000 al 2,5% mensual simple, se acuerda su devolución en 3 cuotas. La primera cuota de $100.000, la segunda de $120.000, y la tercera, el saldo correspondiente.

Esta regla requiere la utilización de la ya estudiada ecuación de valores equivalentes.

Recta de tiempo:



i = 2,5% mensual

Si usamos la modalidad de Interés simple:

$$300.000\,(1 + 0{,}025 \times 3) = 100.000\,(1 + 0{,}025 \times 2) + 120.000\,(1 + 0{,}025 \times 1) + X$$

$$322.500 = 105.000 + 123.000 + X$$

$$X = \$\,94.500$$

Recuerda, si cambias de fecha focal el resultado es diferente (a interés simple).

2.5.2. ***Regla americana o de saldos Insoluto***

El saldo insoluto de una deuda en un momento dado, es el capital pendiente de pago (también llamado capital vivo, capital no amortizado, o saldo de capital).

Por norma general, un saldo absoluto no contiene ningún tipo de interés y permanece invariable mientras no se efectúa un pago de capital.

Los intereses se determinan sobre el saldo absoluto respectivo, por lo tanto, al ir cancelando las cuotas, el saldo absoluto va disminuyendo y el interés resultante es cada vez menor (En general una cuota incluye intereses y amortización de capital).

!Que te parece si el problema anterior, lo resolvemos según la regla de saldos insolutos.!

☺

300.000 207.500 92.688

|———————|———————|———————|

0 1 2 3 meses

i = 2,5 % m 100.000 120.000 X (saldo)

PERÍODO	SALDO INSOLUTO	INTERÉS. DEL PERÍODO	CUOTA
0 - 1	300.000	300.000 x 0,025= 7500	100.000
1 - 2	207.500	207.500 x 0,025= 5188	120.000
2- 3	92.688	92.688 x 0,025= 2317	95.005

<u>Problema 2.7:</u>

Para reformar esta regla, supón que la deuda anterior se acuerda cancelarla en 3 cuotas. En cada una de ellas amortiza o devuelve $100.000 de la deuda original más los intereses correspondientes, determinemos el valor de cada cuota:

300.000

|———————|———————|———————|

0 1 2 3 meses

A_k 100.000 100.000 100.000

+ I I I Y

cuota C_1 C_2 C_3

PERÍODO	SALDO INSOLUTO	INTERÉS DEL PERÍODO	CUOTA
0 - 1	300.000	I_1= 300.000 X 0,025= 7500	C_1= 107.500
1 - 2	200.000	I_2= 200.000 X 0,025=5000	C_2= 105.000
2 - 3	100.000	I_3= 100.000 X 0,025= 2500	C_3= 102.500

Cada pago parcial debe cubrir a lo menos los intereses que se generan en el período correspondiente. En caso contrario los intereses no cancelados en la cuota o pago parcial se capitalizan.

Problema 2.8:

Una persona debe a otra $ 150.000.- Esta última le cobra una tasa de interés del 3% mensual. Las cuotas se cancelarán en los meses 2, 5 y 9, con valores de $ 40.000, $ 60.000 y $ 60.000 respectivamente. Comprueba si la forma de pago permite la devolución total del préstamo, usando regla comercial y regla de saldos insolutos.

$ 150.000

|______|______|_____|_____|______|_____|______|_____|______|

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

40.000 60.000 60.000

a.- ***Regla Comercial***:

(fecha focal: mes 9, fecha de vencimiento de la última cuota)

$$150.000 (1 + 9 \times 0,03) = 40.000 (1 + 0,03 \times 7) + 60.000 (1 + 0,03 \times 4) + 60.000$$

$$190.500 = 48.400 + 67.200 + 60.000$$

$$190.500 = 175.600$$

Usando fecha focal, mes 9, al cancelar la última cuota queda pendiente de pago $ 14.900 (190.500 - 175.600)

b.- ***Regla Saldos Insolutos***:

Periodo	**Saldo Insoluto**	**interés**	**cuota**
0 - 1	150.000	I1 = 150.000 x 0.03 x 2 = 9.000	40.000
1 - 2	119.000	I2 = 119.000 x 0.03 x 3 = 10.710	60.000
2 - 3	69.710	i3 = 69.710 x 0.03 x 4 = 8.365	60.000

Según esta metodología queda pendiente de pago \$18.075, (69.710 + 8.365 - 60.000).

Como podemos observar la regla de saldos insolutos permite determinar una mayor cuantía del saldo a pagar en comparación con la regla comercial, para un mismo caso. Su explicación, es que la regla de los saldos insolutos implica el establecimiento de una ecuación de valores equivalentes, en la cual se devengan intereses sobre intereses (la regla de los saldos insolutos implica interés compuesto).

Problema 2.9:

Resuelve el ejemplo 2.1 a interés compuesto, usando regla comercial y regla americana.

a.- Regla comercial:

$$150.000\,(1{,}03)^{9} = 40.000\,(1{,}03)^{7} + 60.000\,(1{,}03)^{4} + 60.000$$

$$195.715 = 176.725$$

diferencia \$ 18.990

b.- Regla de Saldos insolutos

Periodo	**Saldo Insoluto**	**Interés**	**Cuota**
0 - 1	150.000	$Y1 = 150.000\left((1{,}03)^{2} - 1\right) = 9.135$	40.000
1 - 2	119.135	$Y1 = 119.135\left((1{,}03)^{3} - 1\right) = 11.047$	60.000
2 - 3	70.182	$Y1 = 70.182\left((1{,}03)^{4} - 1\right) = 8.808$	60.000

diferencia \$ 18.990

¡Qué simpático!

Ambas reglas, a interés compuesto arrojan el mismo resultado (si se produce alguna pequeña diferencia, se explica por las aproximaciones que tú puedes hacer o haga la calculadora internamente).

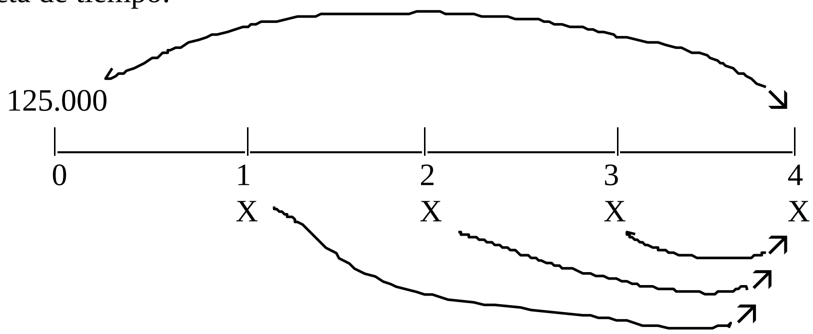
PRUEBA N° 6

María Paz ha comprado en una casa comercial un artículo por un valor de $125.000. La compra se hace a crédito al 5% mensual. El pago se hace en 4 cuotas iguales mensuales y vencidas a interés simple.

- a.- Determina el valor de la cuota, según regla comercial
- b.- Determina el valor de la cuota, según regla de saldos insolutos
- c.- Determina el valor de la cuota a interés compuesto
- d.- Determina el valor de la cuota regla comercial. Suponiendo que la compra se hace el 01 de Junio de 1997 y los pagos se hacen los días primero de mes.

Pauta de corrección:

a.-
Recta de tiempo:



$$125.000\ (1 + 0{,}05 \times 4) = X\ (1 + 0{,}05 \times 3) + X\ (1 + 0{,}05 \times 2)$$

$$X\ (1 + 0{,}05 \times 1) + X$$

$$150.000 = 4{,}3\ X$$

$$X = \$\ 34.884$$

b.-

$$\Big(\big(\ (125.000 + 125.000 \times 0{,}05 \times 1) - X\big)\ (1 + 0{,}05 \times 1) - X\big)\ (1 + 0{,}05 \times 1) - X\ \Big)(1{,}05) - X = 0$$

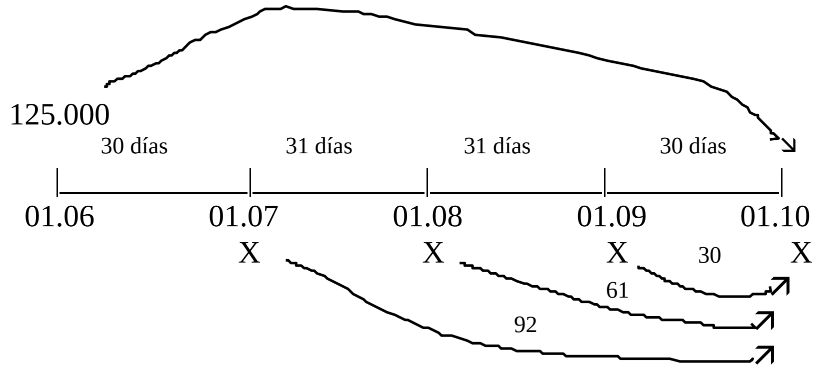
$$X = \$\ 35.251$$

c.- fecha focal (0)

$$125.000 = X / (1.\ O5)^{1} + X / (1{,}05)^{2} + X / (1{,}05)^{3} + X / (1{,}05)^{4}$$

$$X = \$\ 35.251$$

d.-



fecha focal: 01.10

125.000 (1 + 0,05/30 x 122) = X(1 + 0,05/30 x 92) + X(1 + 0,05/30 x 61) + X(1 + 0,05/30 x 30) + X

150.417 = 4,305 X

X = $ 34.940

!Continuamos aprendiendo!

CAPÍTULO N° 3

ANUALIDAD Y AMORTIZACIÓN DE CAPITAL

OBJETIVOS:

Al terminar el capítulo, estarás en condiciones de:

1.- Calcular el valor actual de distintos tipos de anualidades

2.- Determinar el monto de una anualidad

3.- Calcular cuotas, tasas de interés, y tiempo de vigencia de una obligación, en que se realiza pagos periódicos de capital.

4.- Conocer los distintos tipos de amortización de capital

5.- Confeccionar tablas de amortización

6.- Confeccionar el fondo de amortización de una deuda

3.1 **ANUALIDAD**

Cuando se solicita un crédito, éste se puede devolver en un pago único, o en un número reducido de cuotas, tal como hemos visto los problemas anteriormente. Pero ¿qué ocurre cuando la deuda se cancela en 6, 12, 24, 48, etc. cuotas?. En este caso, se puede utilizar la misma metodología de pagos parciales recientemente tratadas. Pero existe el problema de ser un proceso lento, engorroso y de fácil equivocación.

Para hacer más fácil los cálculos, estudiaremos las llamadas **Anualidades**

Una **anualidad** ***es una sucesión de ingresos o pagos periódicos.*** Por ejemplo tenemos sueldos, cuotas mensuales de crédito, cotizaciones previsionales, arriendos, etc.

3.1**. EXPRESIONES RELACIONADAS CON ANUALIDADES:**

Renta: Es la cuantía de cada pago o ingreso periódico. Puede ser en $, U$, UF, etc.

Periodo de renta: Es el lapso de tiempo entre dos pagos o ingresos sucesivos. Ej.: Si las cuotas se pagan los días 1º de cada mes, el período de pago es mensual.

Plazo de una anualidad: Es el intervalo de tiempo entre el comienzo del primer período de pago(renta) y el final del último período de renta. En la recta de tiempo anterior se observa que el plazo de la anualidad es de 3 meses.

Por ejemplo: Una persona el 01 de Junio contrajo una deuda. Se acuerda devolver el préstamo en 3 cuotas de $ 50.000 cada una, los días 01 de Julio, 01 de Agosto y 01 de Septiembre.

En el presente ejemplo la renta Es de $ 50.000, el periodo de renta Es de 1 mes, y el plazo de la anualidad Es de 3 meses.

3.2. CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES:

Existen varios tipos de anualidades:

1.- ***Anualidades variables***:

Son aquellos en que el valor de las cuotas son distintas y/o el período de pago o renta es diferente. En este caso, tenemos tres tipos de anualidades:

a.- ***Anualidad con cuotas distintas y periodos de pago iguales***:

30.000 40.000 20.000
|______|______|______|
0 1 2 3 meses

b.- ***Anualidad con periodos de pago diferentes y cuotas iguales:***

R R
|____|____|____|____|____|____|
0 1 2 3 4 5 6 años

c.- ***Anualidad con periodos de pago diferentes y cuotas distintas***:

30.000 40.000 20.000
|____|____|____|____|____|____|
0 1 2 3 4 5 6 años

2.- ***Anualidades de renta constante y período de pago constante***.

Estas son aquellas en que todas las cuotas son de igual valor y los períodos de pago iguales, ya sea mensual, trimestral, semestral, anual, etc.

De estas anualidades podemos encontrar las siguientes:

- 1.- Anualidad vencida
- 2.- Anualidad anticipada
- 3.- Anualidad diferida
- 4.- Anualidad perpetua
- 5.- Anualidad eventual

1.- ***Anualidad vencida***:

Aquella en que los pagos o ingresos periódicos se efectúan o se producen al final de cada período de pago. También son conocidas con el nombre de anualidades ordinarias. Por ejemplo: la compra en una casa comercial a 3 meses precio contado pagando la 1º cuota al final del mes; préstamos hipotecarios, préstamos de consumo, etc.

```
          R         R            R              R              R              R
|_________|_________|_________|__________|__________|__________|
0         1          2          3           4            5           6   años
```

2.- ***Anualidad anticipada***:

Aquella en que los ingresos o pagos periódicos se producen al comienzo de cada uno de los periodos de renta. Por ejemplo, compra en una casa comercial a 3 meses precio contado, pagando la 1º cuota el día de la compra.

```
R         R         R          R           R           R
|_________|_________|_________|__________|__________|__________|
0         1          2          3           4            5            6 años
```

Las anualidades vencidas y anticipadas vistas en los puntos 1 y 2 también reciben el nombre de anualidades actuales, ya que el primer periodo de renta comienza junto con el acto o contrato que le da lugar.

3.- ***Anualidad diferida***:

Es aquella en que el primer periodo de renta comienza en una fecha posterior al acto o contrato que le da lugar. Por ejemplo, rentas de arrendamiento provenientes de un contrato sobre la casa en construcción (se comienza a pagar después que la casa este construida).

El periodo que transcurre entre la firma del contrato y la fecha de inicio del primer período de pago, recibe el nombre de **plazo de gracia**, (en el cual la deuda puede o no generar intereses, depende de lo pactado por las partes). En nuestro caso, y por norma general, trabajaremos con un plazo de gracia en donde el capital genera intereses.

Una anualidad diferida puede ser vencida o anticipada.

* Gráfica de una anualidad diferida y vencida

```
                                        R          R           R           R
|_________|_________|_________|__________|__________|__________|__________|
0         1         2         3          4          5          6          7 años
```

Plazo de Gracia

* Gráfica de una anualidad diferida y anticipada

```
                              R          R          R          R          R
|_________|_________|_________|__________|__________|__________|__________|
0         1         2         3          4          5          6          7 años
```

Plazo de Gracia

Las anualidades tratadas en los puntos 1, 2 y 3 reciben el nombre de anualidad a plazo, ya que tienen un plazo finito para terminar con la obligación..

4.- ***Anualidad perpetua:***

Es aquella que tiene un plazo infinito, es decir, no se conoce la fecha de término (n =?). Por ejemplo, un legado filantrópico, una anualidad que se genera por retiro periódico sólo de interés correspondientes a un gran capital depositado.

Toda vez que la cuota o renta sea inferior al interés que genera el capital de cada período de pago, estaremos en la presencia de una anualidad perpetua.

```
          R         R         R          R          R
|_________|_________|_________|__________|__________|_ _ _ _ _ _ _ _ _
0         1         2         3          4          5                  años
```

También podemos encontrar anualidades perpetuas anticipadas como vencidas.

5.- ***Anualidades eventuales:***

Son aquellas en que el comienzo o fin de la anualidad es impreciso o depende de algún acontecimiento externo. Por ejemplo, el montepío (pensión de viudez).

Las anualidades tratadas en los puntos 1, 2, 3 y 4 reciben el nombre de anualidades ciertas, dado que el plazo de la anualidad está estipulado en términos concretos, por adelantado.

A continuación presentaremos las fórmulas que se desprenden de aquellas anualidades vencidas, anticipadas, perpetuas y diferidas. **Cabe señalar, que si las cuotas o los periodos de pago son distintos, no es posible utilizar dichas fórmulas, por lo tanto, para resolver problemas con estas características se deberá desarrollar el procedimiento visto en pagos parciales.**

!No lo olvides!

Las anualidades se pueden dar a interés simple, como a interés compuesto. Debido a las diferencias de ambas modalidades, las fórmulas que permiten simplificar los cálculos son diferentes:

3.1.3 VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD

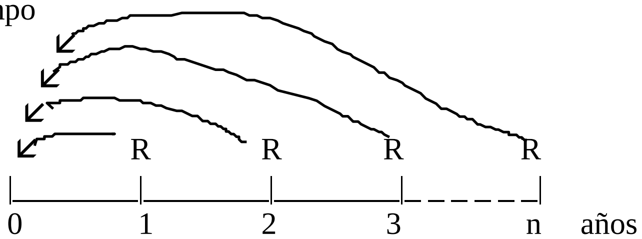
El valor actual de una anualidad a una fecha dada, y a una tasa de interés dada, (llamada tasa de descuento racional), es aquel capital que colocado a esa tasa de interés, por un lapso de tiempo igual al que existe entre la fecha del valor actual y la fecha del vencimiento de la renta futura, ascenderá exactamente a esa suma futura. En otras palabras, corresponde al valor equivalente en la fecha del valor actual, de la suma de cada una de las cuotas de la anualidad.

3.1.3.1 VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD A INTERÉS SIMPLE:

Las anualidades a interés simple, generalmente corresponden a vencidas y anticipadas, por tal motivo, sólo estos dos tipos serán tratadas en lo que respecta a su valor actual.

3.1.3.1.1. Valor actual de una anualidad vencida:

Recta de Tiempo



$$VA_{AV} = \frac{R}{(1 + i \times 1)} + \frac{R}{(1 + i \times 2)} + \frac{R}{(1 + i \times 3)} + \ldots + \frac{R}{(1 + i \times n)}$$

Como podemos observar, estamos en presencia de una suma de una proporción geométrica de n términos, lo que nos lleva a concluir en la siguiente fórmula.

$$\boxed{VA_{AV} = R\left(\frac{2n + n\,i\,(n-1)}{2\,(1 + i \times n)}\right)}$$

donde:

VA_{AV}	=	Valor actual de una anualidad vencida
R	=	Valor de la cuota o renta
n	=	Número de cuotas
i	=	Tasa de interés por periodo de pago

(Si deseas demostrar cómo se llegó a esta fórmula tú puedes hacerlo o consulta la bibliografía recomendada.)

<u>Problema 3. 1</u>

Determina el valor actual de la siguiente anualidad:

0	1	2	3	4 meses
	10.000	10.000	10.000	10.000

i = 3% mensual

Para resolver un problema de Anualidad, en este caso, Valor Actual de una anualidad vencida a interés simple, existen dos caminos:

a.- Descontar a cada cuota los intereses correspondientes desde la fecha de la cuota y la fecha focal uno a uno. A continuación lo denominaremos método carretero

b.- Usar la fórmula de anualidad

a.- *Método Carretero*:

$$VA_A = 10.000 / (1 + 0.03 \times 1) + 10.000 / (1 + 0.03 \times 2) + 10.000 / (1 + 0.03 \times 3)$$
$$+ \quad 10.000 / (1 + 0.03 \times 4)$$

$$VA_A = \quad \$ \, 37.246$$

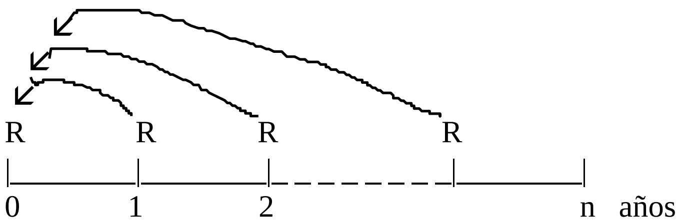
b.- *Usando la fórmula*:

$$VA_A = 10.000 \left(\frac{2 \times 4 + 4 \times 0.03 \times 3}{2 (1 + 0.03 \times 4)} \right)$$

$$VA_A = \$ \; 37.321$$

3.1.3.1.2 *Valor actual de una anualidad anticipada*

Recta de tiempo:



$$VA_{AA} = R + \frac{R}{(1 + i \times 1)} + \frac{R}{(1 + i \times 2)} + \ldots + \frac{R}{(1 + i \times n)}$$

Aplicando la suma de una progresión geométrica de n términos, llegamos a la siguiente formula:

$$\boxed{VAAA = R \left(\frac{2 n + n i (n + 1)}{2 (1 + i n)} \right)}$$

Por ejemplo calcula el valor actual de una anualidad anticipada de 3 cuotas mensuales de $ 1.000 cada una, a una tasa de interés del 2% mensual.

Recta de tiempo:

```
1.000      1.000      1.000
|__________|__________|__________|
0          1          2          3     meses
```

i = 2 % mensual

a.- *Método carretero:*

$$VA_{AA} = 1.000 + \frac{1.000}{(1 + 0{,}02 \times 1)} + \frac{1.000}{(1 + 0{,}02 \times 2)}$$

$$VA_{AA} = \$\ 2.942$$

b.- Usando la fórmula:

$$VA_{AA} = 1.000 \left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 0{,}02 \times 4}{2\,(1 + 0{,}02 \times 3)} \right)$$

$$VA_{AA} = \$\ 2.942$$

3.1.3.2. **VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD A INTERÉS COMPUESTO**:

En este caso, serán tratados las anualidades vencidas, anticipadas, diferidas y perpetuas, por ser los más utilizadas en la práctica.

3.1.3.2.1. ***Valor actual de una anualidad vencida:***

```
           R          R          R               R
|__________|__________|__________|_ _ _ _ _ _ _|
0          1          2          3               n   años
```

a.- *Método Carretero*:

$$VA_{AV} = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Como estamos en presencia de una suma de una proporción geométrica de n términos, podemos concluir en la siguiente fórmula.

$$\boxed{VA_{AV} = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}$$

Donde:

VA_{AV}	=	Valor Actual de una anualidad vencida a interés compuesto.
R	=	Renta o Cuota
i	=	Tasa de interés por periodo de pago
n	=	Número de cuotas a las que se les ha de descontar intereses

Como te has podido dar cuenta en este caso, al igual que en interés simple, existen dos caminos para resolver el problema, el método carretero y el uso de fórmulas de anualidad.

RECUERDA: **Sólo se pueden usar las fórmulas si las cuotas y los periodos de pago iguales son iguales.**

La tasa de interés debe estar expresada en el mismo tiempo del período de pago.

Por ejemplo, una persona pide un préstamo en un banco por $1.000.000 al 2,5% mensual, y acuerda pagarlo en 12 cuotas iguales mensuales y vencida. ¿Cuánto deberá pagar mensualmente esa persona?

Recta de tiempo:

```
1.000.000      R          R          R             R
   |__________|__________|__________|_ _ _ _ _ _ _|
   0          1          2          3            12    meses
```

$$i = 2{,}5\ \%\ \text{mensual}$$

a.- *Método Carretero*:

$$1.000.000 = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + :\ldots + \frac{R}{(1+i)^{12}}$$

$$R = \$\ 97.487$$

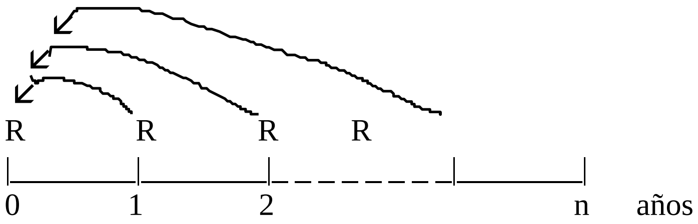
b.- *Usando la fórmula*:

$$1.000.000 = R\left(\frac{1-(1+0{,}025)^{-12}}{0{,}025}\right)$$

$$R = \$\ 97.487$$

La persona al pagar 12 cuotas de $ 97.487 estaría devolviendo el préstamo de $1.000.000 más los intereses respectivos.

3.1.3.2.2. ***Valor actual de una anualidad anticipada***



a.- Método Carretero:

$$VA_{AA} = R + \frac{R}{(1 + i \times 1)} + \frac{R}{(1 + i \times 2)} + \ldots + \frac{R}{(1 + i \times n)}$$

b.- Usando la Fórmula:

$$\boxed{VA_{AA} = R\left((1 + i)\left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right) \right)}$$

Como puedes observar de la fórmula, la expresión $\left(1 - (1 + i)^{-n} \right) / i$ multiplicada por **R,** corresponde al valor actual de una anualidad vencida, por lo tanto, se estaría determinando el valor de la anualidad un período (mes) antes de la fecha requerida, es decir, se ha descontado intereses por un periodo adicional. Para arreglar esto, se multiplica por $(1 + i)$, lo que permite agregarle los intereses descontados adicionalmente (por un periodo).

Por ejemplo, supón que la persona del ejemplo anterior acuerda pagar las 12 cuotas en forma anticipada. ¿Cuánto deberá pagar mensualmente?.

Recta de tiempo:

R R R R

|______|______|_ _ _ _ _ _|______|

0 1 2 12 meses

1.000.000

a.- Método Carretero:

$$1.000.000 = R + \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

$$R = \$\ 95.109$$

b.- Usando la fórmula:

$$1.000.000 = R\left(1{,}025\left(\frac{1 - 1{,}025^{-12}}{0{,}025}\right)\right)$$

$$R = \$\ 95.109$$

3.1.3.2.3 ***Valor actual de una anualidad diferida (vencida)***

Recta de tiempo

R_1 R_2 R_3 $R_{n-y)}$

|__________|______|______|______|_ _ _ _ _ _|

0 y 1 2 3 n años

Plazo de Gracia = **y**

donde:

n = Número de cuotas vencidas
y = Periodo o plazo de gracia

a.- *Método Carretero*:

$$VA_{AV} = \frac{R}{(1+i)^{y+1}} + \frac{R}{(1+i)^{y+2}} + \frac{R}{(1+i)^{y+3}} + :... + \frac{R}{(1+i)^{y+n}}$$

por lo tanto, la fórmula sería:

$$\boxed{VA_{AD} = \frac{R\left(\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}{(1+i)^{y}}}$$

Donde:

VA_{AD} = Valor actual de una anualidad diferida
R = Valor de la cuota
i = Tasa de interés por periodo de pago
n = Número de cuotas vencidas
y = Periodo de gracia

Si nos encontramos con un problema en que la anualidad Es diferida y a la vez anticipada ¿cómo sería la fórmula a emplear?. **¡Tú puedes determinarla!** (recuerda lo que has aprendido recientemente).

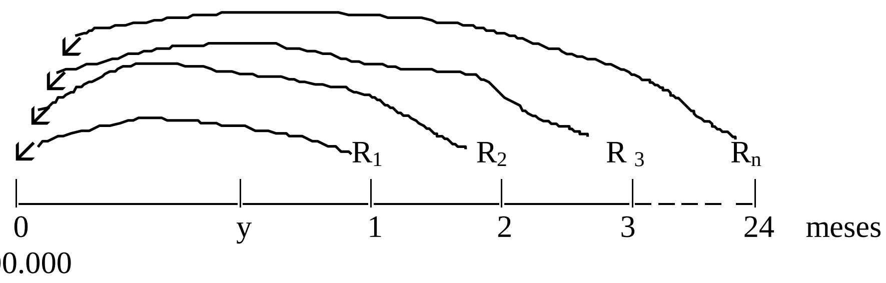
Respuesta:

$$VA_{AD} = \frac{R\left((1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)\right)}{(1+i)^{y}}$$

Para aplicar la fórmula veamos el siguiente ejemplo:

El día de hoy, se pide un préstamo de \$ 500.000 al 3% mensual, a cancelar en 24 cuotas iguales y vencidas, con un plazo de gracia de 3 meses. Se pide graficar la recta de tiempo y determinar el valor de la cuota.

Recta de tiempo:



Plazo de Gracia = **y =** 3 meses

$$VA_{AV} = \frac{R}{(1,03)^{3+1}} + \frac{R}{(1,03)^{3+2}} + \frac{R}{(1,03)^{3+3}} + \ldots + \frac{R}{(1,03)^{3+24}}$$

o bien:

$$500.000 = \frac{R\left((1-1,03^{-24})/0,03\right)}{1,03^{3}}$$

$$R = \$32.261$$

Por ejemplo resuelve el problema anterior, si las cuotas son anticipadas:

Recta de tiempo:

```
                R         R  R        R          R
|_______________|_________|_________|_________|_ _ _ _ _ _ _|
0               y         1         2         3             n    años
```

Plazo de Gracia = **y** **=** 3 meses

a.- *Método Carretero*:

$$500.000 = \frac{R}{(1+i)^{y+o}} + \frac{R}{(1+i)^{y+1}} + \frac{R}{(1+i)^{y+2}} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{y+(n-1)}}$$

o bien:

$$500.000 = R\left(\frac{1,03\left((1-1,03^{-24})/0,03\right)}{1,03^{3}}\right)$$

$$R = \$\ 31.322$$

3.1.3.2.4 ***Valor actual de una anualidad Perpetua (vencida)***

```
          R         R         R
|_________|_________|_________|_ _ _ _ _ _ _
0         1         2         3             años
```

a.- Método Carretero:

$$VA_{AP} = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Estamos en presencia de una sumatoria de una progresión geométrica de infinitos términos, por lo tanto, su límite estará expresado por:

$$\boxed{VA_{AP} = \frac{R}{i}}$$

donde:

R = Valor de la cuota
i = Tasa de interés por periodo de pago

(*compruébalo o consulta la bibliografía*)

La anualidad perpetua también puede ser:

a.- Anticipada.
b.- Con un plazo de gracia de n meses

¿Cómo serían las rectas de tiempo y fórmulas a emplear?

¡Hazlo!.

Veamos el siguiente problema:

Un multimillonario desea asegurar el futuro de un niño pobre. Para ello, deposita cierta cantidad de dinero en un Banco, a una tasa de interés del 1,2% mensual. La idea es que el niño pobre retire mensualmente en forma vencida $100.000. ¿Cuánto dinero deberá depositar el multimillonario, si los retiros comienzan a efectuarse al mes siguiente del deposito?.

$$VA_{AP} = \frac{100.000}{0{,}012}$$

$$VA_{AP} = \$\ 8.333.333$$

Siguiendo con el problema anterior, supón que el mismo día del depósito, el niño pobre comienza a realizar los retiros. ¿Cuánto dinero deberá depositar el multimillonario?.

$$VA_{APA} = 100.000 \left(\frac{1 + 0{,}012}{0{,}012} \right)$$

$$VA_{APA} = \$\ 8.433.333$$

(usamos la fórmula determinada por ti recientemente)

Modificando el problema del multimillonario, el Banco solo puede comenzar a pagar los retiros 4 meses de realizado el depósito. ¿Cuánto dinero se deberá depositar para que niño pobre comience a efectuar los retiros?.

$$VA_{APAD} = \frac{100.000 / 0{,}012\ (\ 1{,}012\ )}{1{,}012^{\ 4}}$$

$$R = \$\ 8.040.392$$

OBSERVACIÓN:

* El valor actual de una anualidad no sólo se puede calcular a tiempo cero (se descuenta interés a todas las cuotas de la anualidad), sino que se puede hacer para cualquier otra fecha. Pero en este caso, sólo se deben incluir las cuotas con vencimiento en el futuro.

* El valor actual de una anualidad a una determinada fecha, corresponde al saldo insoluto a dicha fecha.

* Recuerda siempre que el interés se calcula sobre el saldo insoluto.

En general, los préstamos se otorgan en cuotas vencidas, por tal motivo la fórmula más utilizada es la de anualidad vencida.

Por otro lado, de la fórmula de anualidad vencida, haciendo un pequeño ajuste es posible obtener las otras fórmulas de anualidad.

3.1.3.3 USOS DEL VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD A INTERÉS COMPUESTO:

Cualquiera sea la anualidad o la fórmula de anualidad que se utilice es posible determinar:

a.- ***Valor de la cuota:***

Conociendo el capital, la tasa de interés por período de pago y el número de cuotas. (Tema ya tratado anteriormente)

b.- ***Determinación del capital vivo o saldo insoluto de una deuda:***

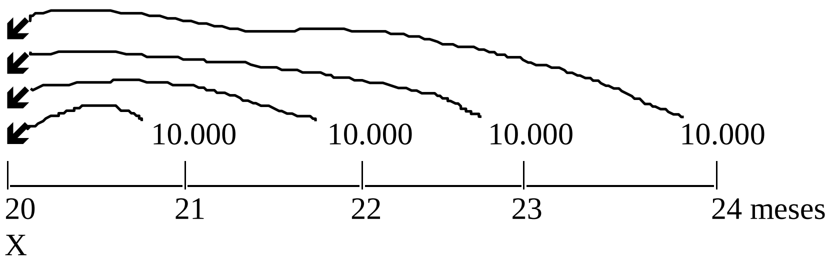
En alguna oportunidad, el deudor de un préstamo con cuotas pendientes de pago desea saber cuánto es el total de la deuda a una cierta fecha. Para determinar la deuda pendiente de pago, es necesario saber si es o no posible descontar los intereses que incluye cada cuota (norma que generalmente es establecida por la institución financiera). Si la respuesta es negativa basta multiplicar el número de cuotas pendientes de pago por el valor de la cuota, como ocurre generalmente en las casas comerciales o en financieras. En cambio, si es posible descontar los intereses a las cuotas pendientes de pago se les ha de determinar su valor actual o equivalente a una determinada fecha, usando el llamado método carretero o la fórmula de anualidad.

$$\boxed{S.I. = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)}$$

donde:

S.I. = Saldo insoluto de la deuda
n = Número de cuotas pendientes de pago
R = Valor de la cuota
i = Tasa de interés por periodo de pago

Para ejemplificar, supongamos que una persona ha contraído una deuda, pagadera en 24 cuotas iguales vencidas mensuales, por un valor de $10.000 a una tasa de interés del 1,7% mensual. Después de cancelar la cuota 20, le nace la inquietud de saber ¿cuánto debería pagar ese mismo día, para terminar con la totalidad de la deuda?.



usando la fórmula:

$$S.I._{20} = 10.000 \left(\frac{1 - (1{,}017)^{-4}}{0{,}017} \right)$$

$$S.I._{20} = \$\ 38.356$$

Si no es posible descontar los intereses de las cuotas pendientes de pago.

Deuda = 10.000 x 4 = $ 40.000

<u>Explicación:</u>

Como te has de acordar, cada cuota está compuesta por una parte amortización de capital y por otra de intereses.

Cuota < amortización del capital / intereses

Al determinar el valor actual de las cuotas pendientes de pago, estamos descontando los intereses que cada cuota habría generado, si en la fecha del valor actual la cantidad de dinero correspondiente se hubiese invertido a una determinada tasa de interés, por lo tanto, lo que queda de cada cuota es la parte de amortización de capital, al sumar éstas, obtenemos el capital vivo de la deuda o saldo Insoluto.

c.- ***Número de cuotas que permiten devolver totalmente un préstamo:***

Conociendo el capital solicitado en préstamo, el valor de la cuota a cancelar y la tasa de interés por periodo de pago. (Para resolver el problema se requiere del uso de logaritmo).

$$n = \frac{\log \left(1 - (VA \times i) / R \right)}{\log (1 + i)}$$

Si no te acuerdas de las propiedades de los logaritmos te recomiendo que uses esta fórmula.

Ahora veamos un problema en que apliquemos lo señalado en la letra **c**

Supón que una persona pide un préstamo de $ 500.000, y desea cancelarlo en cuotas de $50.000 mensuales; la tasa de interés aplicada es de un 3.5% mensual. ¿En cuántas cuotas devolverá el préstamo?.

$$500.000 = 50.000 \left(\frac{1 - 1{,}035^{-n}}{0{,}035} \right)$$

Si aplicas la fórmula vista en **c:**

$$n = 12{,}52 \text{ meses}$$

El préstamo se devuelve en 13 cuotas; las 12 primeras de $ 50.000 y la última (13) de $ 26.000 (0,52 x 50.000).

Tú puedes despejar la ecuación o aplicar la fórmula despegada.

d.- ***Tasa de interés aplicada al préstamo:***

A lo mejor has visto la siguiente situación: Un (a) representante de ventas de una institución financiera, te entrega un folleto, donde aparece un cuadro que muestra distintas alternativas de préstamo y el valor de la cuota a cancelar según la alternativa de pago que uno elija, pero no te informa respecto a la tasa de interés que te cobran.

En este caso tú conoces el valor actual de una anualidad vencida (préstamo), el número de cuotas (n) y el valor de la cuota 8 (R) pero desconoces la tasa de interés por periodo de pago (i) que te aplica la institución financiera.

Por ejemplo veamos el siguiente problema: Un préstamo de $ 1.000.000 cancelable en 24 cuotas iguales y vencidas de $60.000 cada una.

$$1.000.000 = 60.000 \left(\frac{1 - (1+i)^{-24}}{i} \right)$$

Tú podrías pensar, **¡Ahora despejamos i!. ¡Es muy complicado!.**

Lo que se debe hacer en este caso es ir probando tasas de interés hasta lograr que una determinada tasa permita que se produzca la igualdad. **¡Hagámoslo!.**

Si pruebas con un 5% mensual. (reemplazamos el 5 % en la fórmula anterior)

$$1.000.000 \neq 827.919$$

A las 24 cuotas se les descontó mucho interés, es decir, se aplicó una tasa de interés muy elevada, por lo tanto, debes probar con una tasa menor.

Si pruebas con un 4%

$$1.000.000 \neq 914.818$$

La diferencia disminuyó pero aún la tasa es elevada.

Si pruebas con un 3 %

$$1.000.000 \neq 1.016.133$$

¡Nos pasamos!.

Ahora descontamos menos intereses que los correspondientes. Es decir, nuestra tasa de interés está entre un 3 y un 4%.

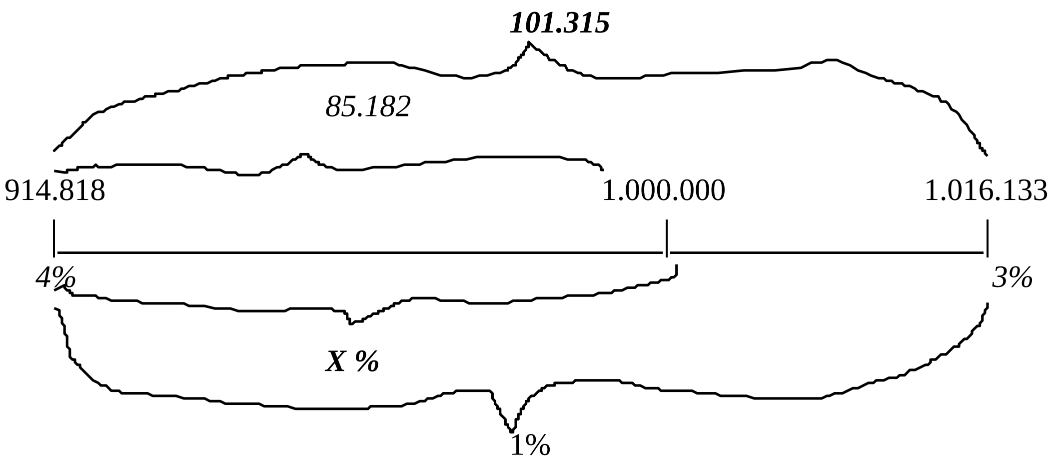
Existen dos alternativas para seguir.

1.- Seguir probando hasta llegar a la igualdad
2.- Interpolar

<u>**¡tú eliges!**</u>

Pero ¿*cómo interpolo*?. Te preguntarás

!Así!



Con un 4 % el valor actual de la anualidad es de $914.818, con un 3 % es de $1.016.133. A simple vista se observa que para llegar a 1.000.000, la tasa de interés está más cercana al 3 % que al 4 %.

El disminuir la tasa de descuento en un 1% hace aumentar el valor actual en \$101.315 (1.016.133 - 914.818). Al aplicar la tasa del 4% quedamos cortos en \$ 85.182 (1.000.000 - 914.818), por lo tanto, con una regla de tres podemos estimar la tasa de interés aplicada al préstamo.

Si un aumento del valor actual de \$ 101.315 esta relacionada con una disminución de tasa del 1%, ¿En cuánto deberá disminuir la tasa para obtener ahora un aumento de \$85.182?.

$$\frac{101.315}{1\ \%} = \frac{85.182}{X\ \%}$$

$$X\ \% = 0{,}84\ \%$$

Por lo tanto, la tasa del 4 % debe disminuir en 0,84 % para obtener la tasa de interés aplicada al préstamo, es decir, 3,16 %

Cabe mencionar que la interpelación sólo es una aproximación al resultado, mientras menor sea el rango o intervalo empleado mayor será la exactitud.

e.- *Factor Bancario*:

Quizás alguna vez has ido a un Banco o institución financiera a solicitar un préstamo. El ejecutivo, entre otras preguntas, te consulta sobre el monto del crédito a pedir, el número de cuotas en que deseas devolver el préstamo (él conoce la tasa de interés que se está cobrando). Con estos dos datos (tres incluyendo la tasa de interés) consulta una tabla de factores (o el computador), multiplica el monto del crédito por el factor correspondiente y obtiene el valor de la cuota. **¡Qué fácil**!

En general, si tu le preguntas a él sobre ese factor, la respuesta típica “es un dato entregado por la casa central” o “lo arroja el computador”.

Pero este factor tú lo puedes calcular.

Tú conoces la cantidad de dinero a solicitar en préstamo (Valor Actual de una anualidad), el número de cuotas (n), la tasa de interés que te debería informar el Banco o su representante (i), lo único desconocido es el valor de la cuota.

Relacionemos tus conocimiento de valor actual de una anualidad, con lo que hace el ejecutivo del Banco.

Lo que tú conoces	Lo que hace el ejecutivo
$VA = R \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$	Préstamo x factor = R
$R = VA \times i / (1 - (1 + i)^{-n})$	R = Préstamo x factor (VA)

Si te das cuenta, el factor va a estar dado por:

$$\textbf{\textit{Factor}} = \frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{1 - (1 + i)^{-n}}}$$

Por lo tanto, para determinar el factor sólo se necesita conocer la tasa de interés por período de pago y el número de cuotas.

Veamos el siguiente ejemplo. Supongamos que la tasa de interés mensual es de un 3%, y el número de cuota es 12. Calcula el factor y el valor de la cuota para un préstamo de $600.000.

1.- Factor = $\frac{0{,}03}{1 -(1{,}03)^{-12}}$ = 0,100462

2.- Valor de la cuota:

Préstamo x Factor = cuota

600.000 x 0,100462 = cuota

$ 60.277 = cuota

OBSERVACIÓN:

Las instituciones financieras tienen sus propias políticas respecto a las repactaciones o adelantamiento de cuotas, por ejemplo:

a.- Se cancelan 3 cuotas sin descuento de intereses y el resto sólo la parte de amortización de capital.

b.- Aplica una tasa de descuento menor a la tasa de interés utilizada en el préstamo.

c.- No descuentan los intereses (como en el caso de las financieras). Etc.

Ahora apliquemos lo que has aprendido de valor actual de una anualidad.

PRUEBA N° 7

José María desea comprarse un automóvil, cuyo valor asciende a $5.000.000. Para ello acude al Banco "de la Plaza". Este cobra una tasa de interés del 2,0 % mensual. Se acuerda el pago de 24 cuotas iguales mensuales y vencidas.

Determinar:

a.- Valor de la cuota

b.- Factor bancario

c.- Valor de la cuota, si éstas se han pactado en forma anticipada

d.- Valor de la cuota, si el Banco otorga un plazo de gracia de dos meses.

e.- Valor de la cuota, para que la anualidad sea perpetua

f.- Si el banco determina como valor de cuota $280.000 ¿Cuál es la tasa de interés mensual que está aplicando?.

g.- Supón que el día en que corresponda pagar la cuota 20, José María desea terminar con toda la obligación, haciendo un pago único. (considera que el Banco permite el descuento de todos los intereses de las cuotas pendientes de pago).

Pauta de Corrección

5.000.000

0	1	2	3	4	5	6	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _	23	24
	R	R	R	R	R	R		R	R

i = 2,0 % mensual

a.- Valor de la cuota

$$5.000.000 = R\left(\frac{1 - 1,02^{-24}}{0,02}\right)$$

$$R = \$\ 264.355$$

b.- Factor Bancario:

$$F = i \,/\, (1 - (1+i)^{-n})$$

$$F = 0,02 \,/\, (1 - 1,02^{-24})$$

$$F = 0,005287109725$$

c.-

$$5.000.000 = R\left(1,02\left(\frac{1 - 1,02^{-24}}{0,02}\right)\right)$$

$$R = \$\ 259.172$$

d.-

$$5.000.000.- = \frac{R\left((1 - 1,02^{-24}) / 0,02\right)}{1,02^{2}}$$

$$R = \$\ 275.035$$

e.-

$$VA = R / i$$

$$5.000.000 = R \,/\, 0,02$$

$$R = \$\ 100.000$$

f.- $$5.000.000 = 280.000 \left(\frac{1 - (1 + i)^{-24}}{i} \right)$$

aplicando tanteo e interpolación

tasa de interés (i)	V. A.
2 %	5.295.899 (*hay que aumentar la tasa*)
4 %	4.269.150

La tasa de interés aplicado por el banco se encuentra entre 3% y 4 %. Ahora debemos interpolar (**Has tú la gráfica, si no te acuerdas vuelve a la página donde aparece**)

Haciendo la regla de tres:

$$\frac{1.026.749}{1\%} = \frac{295.899}{X\,\%}$$

$$X\,\% = 0,29\,\%$$

Por lo tanto:

2 %	➔	5.295.899
+ 0,29 %	➔	- 295.499
3,29 %		5.000.000

3,29 % es la tasa de descuento aplicada por el banco

g.- Recta de tiempo:

```
R      R      R      R      R
|______|______|______|______|
20     21     22     23     24
X  ———————————→   Valor de la cuota única repactada
```

R = $ 264.355

Estamos en presencia de una anualidad anticipada. La fecha focal elegida será: mes 20.

$$X = 264.355 \left(1{,}02 \left(\frac{1 - 1{,}02^{-5}}{0{,}02} \right) \right)$$

$$X = \$\ 1.270.947$$

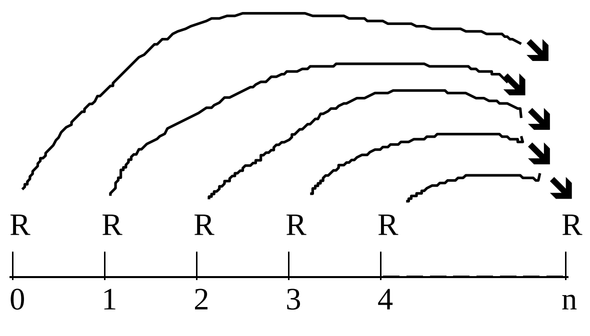
Otra forma de resolver el problema pudo haber sido utilizando el llamado método carretero.

3.1.4 MONTO DE UNA ANUALIDAD

Si te acuerdas cuando hemos hablado de monto de un capital, al capital inicial le sumábamos los intereses que el capital generaba durante cierto tiempo. Si a una anualidad le deseamos calcular su monto, a cada una de las cuotas le debemos sumar los intereses que generarían estas cuotas si fuesen invertidas a una determinada tasa de interés, hasta una determinada fecha futura, y en esa fecha sumar cada uno de los montos de las cuotas, es decir:

El monto de una anualidad a una fecha dada y a una tasa de interés dada, ***es el monto que se acumularía a esa fecha, si cada renta fuera colocada inmediatamente a esa tasa de interés hasta dicha fecha .***

Gráfica de Monto de una Anualidad



Al igual que en el caso de valor actual de una anualidad, el monto de una anualidad se puede dar en problemas a interés simple como a interés compuesto.

Llegaremos al despeje de algunas fórmulas, pero que sólo están relacionadas con anualidades de cuotas iguales y de períodos de pago iguales. Si las cuotas son variables y o aperiódicas (períodos de pagos diferentes), el monto de la anualidad sólo es posible obtenerlo con el llamado método carretero.

3.1.4.1 **MONTO DE UNA ANUALIDAD A INTERÉS SIMPLE**:

Método Carretero:

$$M_A = R (1 + i (n-1) + R (1 + i (n- 2) + . . . + R (1 + i \; 1) + R$$

Aplicando la sumatoria de una progresión aritmética, obtenemos

$$M_A = R \left(\frac{n}{2} \left(2 + (n - 1) i \right) \right)$$

donde:

M	=	Monto de la anualidad
R	=	Cuota o renta
n	=	Número de cuentas
i	=	Tasa de interés por periodo de pago

Veamos un ejemplo:

Una persona debe 3 cuotas mensuales de $12.000 cada una. La primera vence hoy, la tasa de interés pactada es de un 3.5% mensual. Si no paga ninguna cuota ¿cuánto deberá pagar en la fecha de la última cuota, si en esa oportunidad desea pagar toda la deuda?. (Se mantiene la tasa de interés).

```
12.000          12.000             12.000
|_______________|__________________|
0               1                  2   meses
```

Método Carretero

M = 12.000 (1 + 0,035 x 2) + 12.000 (1 + 0,035 x 1) + 12.000

M = $ 37.260

La fórmula de monto de una anualidad es aplicada para cualquier tipo de anualidad (anticipada, vencida , o diferida).

3.1.4.2 MONTO DE UNA ANUALIDAD A INTERÉS COMPUESTO:

Método carretero

$$M_A = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + R(1 + i)^{n-3} + \dots\dots + R(1+i) + R$$

Como estamos en presencia de una sumatoria de una progresión geométrica descendiente de n términos, podemos llegar a obtener la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathbf{MA = R\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right)}}$$

Donde

MA = Monto de la anualidad
R = Cuota o renta
n = Número de cuotas
i = Tasa de interés por período de pago

IMPORTANTE: ***Recuerda siempre que n corresponde al número de cuota , y no al número de periodos.***

Para aplicar la fórmula, supongamos que el problema anterior se pacta a interés compuesto:

Método carretero

$$MA = 12.000\ (1{,}035)^2 + 12.000\ (1{,}535)^1 + 12.000$$

$$MA = \$\ 37.275$$

Usando la fórmula:

$$MA = 12.000 \left(\frac{1{,}035^3 - 1}{0{,}035} \right)$$

$$MA = \$\ 37.275$$

Al igual que en Interés Simple, la fórmula de monto de una anualidad a interés compuesto es aplicable tanto a anualidades vencidas, anticipadas como diferidas. (**A una anualidad perpetua no se le puede calcular su monto, porque se desconoce cuando terminará n).**

PRUEBA N° 8

Una persona deposita cada comienzo de trimestre y durante un año $100.000 en una cuenta de ahorro, que ofrece una tasa de interés del 20% anual con capitalización trimestral. Calcula el monto acumulado en la cuenta al final de ese año, utilizando el método carretero y fórmula de monto de una anualidad.

Pauta de Corrección:

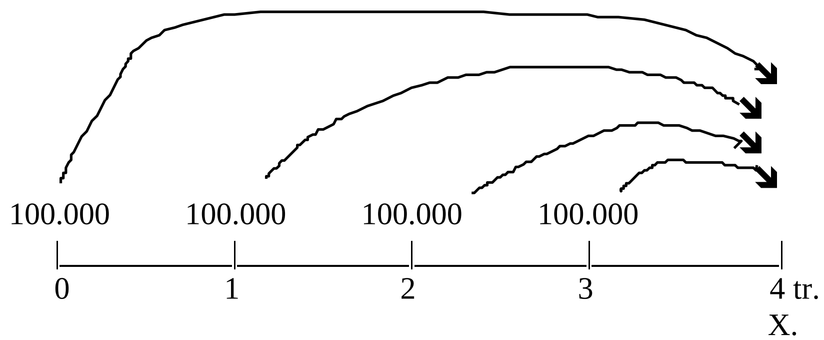
Datos:

$R = 100.000$

$n = 4$

$i = \frac{0,20}{4}$ trimestral

Recta de tiempo:



Método carretero:

$$X = 100.000(1 + 020/4)^4 + 100.000(1 + 0,20/4)^3 + 100.000(1 + 0,20/4)^2$$

$$100.000(1 + 0,20/4)^1$$

$$X = \$\ 452.563$$

Usando la fórmula:

Como la fórmula te permite calcular el monto de la anualidad en la fecha de la última cuota, para este problema es necesario agregar los intereses correspondientes al último trimestre multiplicando la fórmula por (1 + i_{tri})

$$X = 100.000\left(\frac{(1 + 0,20/4)^4 - 1}{0,20/4}\right)(1 + 0,20/4)$$

$$X = \$\ 452.563$$

OBSERVACIÓN:

* La tasa de interés siempre tiene que coincidir con el período de pago. Por ejemplo, si las cuotas son mensuales la tasa de interés debe ser mensual. Si esto no ocurre, existen dos alternativas:

1.- Transformar la tasa de interés, obteniendo una tasa equivalente para el tiempo que indica el período de pago. Por ejemplo: cuotas mensuales de $20.000 y la tasa de interés es de 12% anual.

A Interés Simple:

$$i_m = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01 = 1\%$$

A Interés compuesto:

$$(1 + 0{,}12)^1 = (1 + i_m)^{12}$$
$$i_m = 0{,}009488793$$
$$i_m = 0{,}9488793\%$$

2.- Mantener el tiempo de la tasa de interés y transformar las cuotas

$$i_a = 12\%$$

Cuotas mensuales de $20.000 = R

Se requiere cuotas anuales.

	20.000	20.000		20.000	20.000
0	1	2	…	11	12

Para calcular la cuota equivalente anual, igual se requiere la tasa equivalente mensual.

$$X = 20.000 \left(\frac{(1 + 0{,}009488793)^{12} - 1}{0{,}009488793} \right)$$

$$X = \$\ 252.930$$

!Cómo te puedes dar cuenta, es más fácil transformar la tasa!.

Si tú, para obtener la cuota anual, multiplicas la cuota mensual por 12 (10.000 x 12 = 240.000), estás cometiendo un grave error conceptual, estás considerando que no existen intereses de por medio, estás suponiendo, que el dinero tiene igual valor en el tiempo y tú sabes que eso no es así, porqué de alguna forma puedes invertir el dinero.

3.2 AMORTIZACIÓN DE UNA DEUDA

Cuando tú tienes una deuda, cada vez que cancelas una cuota, estas haciendo dos cosas:

1.- Devolviendo o amortizando parcialmente el préstamo, y

2.- Pagando los intereses que ha generado el préstamo aun no devuelto por el periodo comprendido entre dos cuotas.

Entenderemos por **amortización de una deuda,** ***como un procedimiento, en el cual se extingue gradualmente una deuda, a través de una serie de pagos o depósitos en el plazo de la deuda.***

Existen dos tipos de amortización.

1.- Amortización periódica

2.- Fondos de Amortización

3.2.1. AMORTIZACIÓN PERÍODICA DE UNA DEUDA

Es un proceso de amortización que se lleva a cabo por medio de una serie de pagos a intervalos regulares de tiempo, en que cada pago incluye los intereses sobre el saldo insoluto.

En general, las cuotas son de igual cuantía y vencidas, por lo que esta materia constituye una aplicación de anualidades vencidas.

El amortizar una deuda, va a depender de lo que convengan las partes (deudor y acreedor), por tal motivo, pueden existir una infinidad de formas de amortización.

A continuación veremos tres de las formas de amortización más utilizadas:

a.- Amortización progresiva de la deuda

b.- Amortización constante de la deuda

c.- Amortización de la deuda al final del periodo de pago.

3.2.1.1 AMORTIZACIÓN PROGRESIVA DE LA DEUDA:

Esta modalidad de amortizar la deuda, se basa en cuotas iguales periódicas y vencidas. En cada cuota se paga una parte del capital (deuda) y se cancela intereses. A medida que se van cancelando las cuotas, el saldo insoluto va disminuyendo, por ende, los intereses son cada vez menores. Por lo tanto, como las cuotas son iguales, en las primeras se cancela gran cantidad de intereses, siendo reducida la amortización de capital, situación que se va invirtiendo a medida que las cuotas se cancelan .

Para que nos quede más claro, veamos el siguiente problema:

Rosa María, pidió $ 300.000 a cancelar en cuatro cuotas mensuales iguales y vencidas, con una tasa de interés del 2% mensual.

a.- Determina el valor de la cuota.

b.- Confecciona tabla de amortización.

a.- Determinación del valor de la cuota:

$$\$\,300.000 = R\left(\frac{1-(1{,}02)^{-4}}{0{,}02}\right)$$

$$R = \$\,78.787$$

TABLA DE AMORTIZACIÓN PROGRESIVA DEL CAPITAL

PERIODO	SALDO INSOLUTO	VALOR DE LA CUOTA	INTERESES	AMORTIZACIÓN DE CAPITAL	CAPITAL AL FINAL DEL PERIODO
1	$ 300.000	$ 78.787	$ 6.000	$72.787	$ 227.213
2	227.213	78.787	4.544	74.243	152.970
3	152.970	78.787	3.059	75.728	77.242
4	77.242	78.787	1.545	77.242	0

Como puedes observar en la tabla de amortización:

1.- A medida que se cancelan las cuotas:

El saldo insoluto va disminuyendo
Los intereses van disminuyendo
La amortización de capital va aumentando.

2.- El saldo insoluto (Capital al final del periodo) después de cancelar la última cuota, debe ser cero. Si esto no ocurre, generalmente, la diferencia es por las aproximaciones que realiza uno o la calculadora. En tal caso, se ha de ajustar los intereses correspondientes a la última cuota, de tal modo que el saldo insoluto después de cancelar la última cuota sea cero.

3.2.1.2. AMORTIZACIÓN FIJA DE UNA DEUDA.

En este caso, la amortización de capital que se efectúa en cada cuota es la misma.

Para determinar la cuantía de la amortización de capital, basta dividir la deuda o capital por el número de cuotas.

Cada vez que se cancela una cuota, se amortiza el capital y se cancela el interés que genera el saldo insoluto por el tiempo de uso del dinero (período de pago). Como el saldo insoluto va disminuyendo en la medida que se van cancelando las cuotas, los intereses resultantes cada vez son menores, por ende, las cuotas son decrecientes.

Apliquemos este tipo de amortización en el problema anterior, para ello, supongamos que la amortización de la deuda se hace en forma fija.

1.- Determina la cuantía de la amortización de capital

2.- Confecciona la tabla de amortización

3.- Determina el valor de las cuotas.

1.- Determinación de la amortización de capital:

$$Ak = \frac{\text{Préstamo}}{\text{Nº de Cuotas}}$$

$$Ak = \frac{\$\ 300.000}{4}$$

$$Ak = \$\ 75.000$$

TABLA DE AMORTIZACIÓN FIJA DE CAPITAL

PERIODO	SALDO INSOLUTO	AMORTIZACIÓN DE CAPITAL	INTERES	CUOTA	CAPITAL AL FINAL DEL PERIODO
1	$ 300.000	$ 75.000	$ 6.000	$ 81.000	$ 225.000
2	225.000	75.000	4.500	79.500	150.000
3	150.000	75.000	3.000	78.000	75.000
4	75.000	75.000	1.500	76.500	0

3.2.1.3. AMORTIZACIÓN DE CAPITAL A FINAL DEL PERIODO DE PAGO.

En esta modalidad de amortización, periódicamente sólo se cancela los intereses que genera el capital, a excepción de la última cuota, en la que se paga el préstamo más los intereses que genera éste en el último periodo.

El problema anterior daría como resultado la siguiente tabla de amortización.

TABLA DE AMORTIZACIÓN AL FINAL DEL PERÍODO DE PAGO

PERIODO	SALDO INSOLUTO	AMORTIZACIÓN DE CAPITAL	INTERES	CUOTA	CAPITAL AL FINAL DEL PERIODO
1	$ 300.000	0	$ 6.000	6.000	300.000
2	300.000	0	6.000	6.000	300.000
3	300.000	0	6.000	6.000	300.000
4	300.000	300.000	6.000	306.000	0

Para determinar la forma de amortizar una deuda, es muy importante el cómo se determina el valor de la cuota. La manera para determinar el valor de la cuota varia según se trate de una institución financiera o de una casa comercial.

3.2.2 . DETERMINACIÓN DEL VALOR DE LA CUOTA EN CASAS COMERCIALES

Los métodos de determinación del valor de la cuota vistos anteriormente se da en instituciones financieras. En las casas comerciales utilizan metodologias distintas.

Entre muchas formas, se pueden mencionar dos:

1.- Se recarga al precio contado en un porcentaje de éste (k), se rebaja la cuota inicial, si existe, y la diferencia se divide por el número de cuotas mensuales a pagar.

$$R = \frac{\text{Precio contado}(1 + k) - \text{Cuota Inicial (Pie)}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de cuotas}}$$

2.- Al precio contado se le rebaja la cuota inicial, si existe, y a este resultado, se le recarga en un k%, luego se divide por el número de cuotas mensuales vencidas.

$$R = \frac{(\text{Precio Contado} - \text{Cuota Inicial})(1 + k)}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de cuotas mensuales vencidas}}$$

Si deseamos obtener la tasa efectiva mensual compuesta cargada a un crédito de casa comercial, lo lograremos de la siguiente manera:

$$\text{Precio Contado} = \text{Cuota Inicial} + R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

Veamos el siguiente problema:

Una casa comercial vende un artículo electrónico en $ 120.000 precio contado. Ofrece implícitamente los siguientes planes alternativos para la adquisición a crédito.

a.- El precio contado se recarga en un 97,54%, pagándose 18 cuotas mensuales vencidas e iguales, y una cuota inicial de $ 10.000.

b.- Una cuota inicial de $ 4.000 a la diferencia con el precio se recargan en un 100%, cancelándose 18 cuotas mensuales de igual cuantía.

Se pide:

1.- Determina la cuantía de las cuotas
2.- Determina la tasa de interés efectiva mensual compuesta que se carga a cada alternativa.

1..- Cuantía de las cuotas:

<u>1ª alternativa:</u>

$$R = \frac{120.000\,(1 + 0{,}9754) - 10.000}{18}$$

$$R = \$\ 12.614$$

2° alternativa

$$R = \frac{(120.000 - 4.000)(1 + 1{,}0)}{18}$$

$$R = \$\ 12.889$$

b.- *Tasas efectivas mensuales compuestas:*

1º alternativa:

$$120.000 - 10.000 = 12.614 \left(\frac{1 - (1 + i)^{-18}}{i} \right)$$

$$i = ¿$$

2º *alternativa*:

$$120.000 - 4.000 = 12.889 \left(\frac{1 - (1 + i)^{-18}}{i} \right)$$

$$i = ¿$$

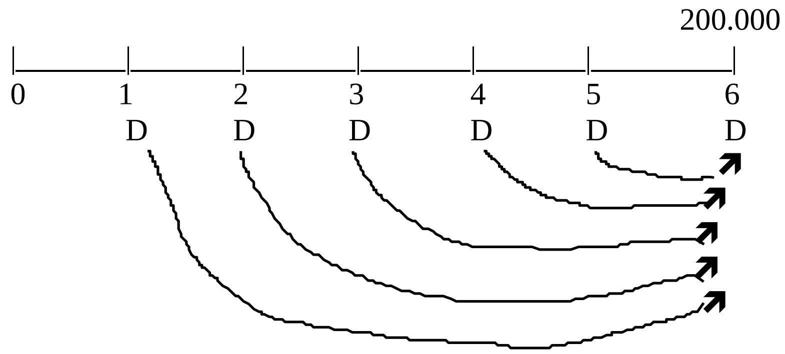
3.3 FONDO DE AMORTIZACIÓN:

Entenderemos como **Fondo de Amortización**. ***a la cantidad de dinero que se va acumulando mediante depósitos periódicos que generan intereses*** Se usa principalmente para pagar el capital de una deuda al vencimiento, o bien, para cumplir compromisos futuros de otra índole, por ejemplo, renovación de maquinarias o equipos, compra de un televisor al contado, etc.

En lo que respecta a las deudas de mediano y largo plazo, el fondo de amortización se puede utilizar para el rescate de una emisión de bonos, en el cual los intereses se van pagando periódicamente con otras fuentes y el monto acumulado por el fondo de amortización es utilizado para cancelar el valor del bono a su vencimiento.

Solamente veremos fondos de amortización de depósitos de igual cuantía, de tal modo de utilizar la fórmula de Monto de Anualidades. Si los depósitos son de distinta cuantía y/o de diferente período de depósito se deberá usar el método carretero.

Por ejemplo, Una persona desea reunir $200.000 al cabo de 6 meses. Para ello depositará en un Banco cierta cantidad de dinero todos los meses. Comenzará a depositar al final del mes. El banco otorga una tasa de interés del 1,2% mensual. ¿Cuánto dinero deberá depositar mensualmente?.



Método carretero:

$$200.000 = D\ 1{,}0112^{5} + D\ 1{,}012^{4} + D\ 1{,}012^{3} + D\ 1{,}012^{2} + D\ 1{,}012^{1} + D$$

o bien

$$200.000 = D \left(\frac{1{,}012^{6} - 1}{0{,}012} \right)$$

$$D = \$\ 32.347$$

PRUEBA N° 9

María José, dueña de una empresa, ha pedido un préstamo en el Banco X por un total de $15.000.000, a una tasa de interés del 15% anual con capitalización semestral pagadero en 12 cuotas iguales semestrales y vencidas.

a.- Determina valor de la cuota

b.- ¿Cuánto dinero deberá depositar mensualmente, a 30 días, con renovación automática, a una tasa de interés del 1,0 % para cancelar la primera cuota. Supón que comienza a depositar el día de hoy.

c.- Determina el saldo insoluto después de cancelar la cuota Nº 8.

d.- Determina el interés que se cancela a la cuota Nº 9

e.- Determina la fecha de vencimiento de la última cuota, si el valor de ésta es de $1.125.000 semestral.

Pauta de corrección:

a.- $15.000.000 = R\left(\frac{1-(1+0{,}15/2)^{-12}}{0{,}15/2}\right)$

$R = \$\ 1.939.167$

b.- $1.939.167 = D\left(\frac{1{,}01^{7}-1}{0{,}01}\right)$

$D = \$\ 268.823$

c.- $VA_8 = 1.939.167\left(\frac{1-1{,}075^{-4}}{0{,}075}\right)$

$VA_8 = \$\ 6.494.903$

d.- Interés periodo 9:

$I_9 = 6.494.903 \times 0{,}075$

$I_9 = \$\ 487.118$

e.- No se puede determinar por qué la anualidad es perpetua, ya que cada cuota sólo cancela intereses.

!Continúamos aprendiendo!

CAPÍTULO N° 4

INFLACIÓN EN LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

OBJETIVOS:

Al término del capítulo, tú podrás:

1.- Resolver problemas financieros, considerando la existencia de inflación

2.- Determinar rentabilidades nominales y reales

3.- Determinar valores nominales y reales

4.- Resolver problemas pactados en Unidad de Fomento (UF)

Hasta el momento no nos hemos preocupado de la existencia de la inflación. Se ha supuesto en cada uno de los problemas financieros que en el país no existe inflación.

4.1 CONCEPTO DE INFLACIÓN.

Como tú debes saber, la inflación consiste en el alza sostenida en los niveles de precios. Cuando hablamos de niveles de precios nos referimos al conjunto de precios que existe en la economía, como por ejemplo, el precio de un automóvil, de un dulce, de un pasaje escolar, etc.

En la mayoría de los países existe inflación (unos más, otros menos). Chile no está al margen de ello.

Las personas que dependen de un sueldo, que en general viaria una vez al año, se enfrentan a un ingreso fijo y a precios de productos en constante crecimiento. Esto lleva con sigo que con el mismo ingreso, producto de la inflación, estas personas cada vez tengan menos poder de compra, es por ello, que se dice que la inflación genera pérdida del poder adquisitivo del dinero.

Si pensamos que la riqueza de las personas, en términos materiales, está dado por lo que éstas poseen, la inflación tiende a provocar una disminución en la riqueza de las personas.

Teniendo presente lo anterior, ya no es válido pensar que si yo deposito $100.000 hoy al 10% anual, durante 1 año, mi riqueza aumentará en $10.000 al cabo de un año. La variación de la riqueza va a depender además de la tasa de interés, de la inflación en el periodo (en el ejemplo, 1 año).

Si la inflación en el año fue de un 20% , significa que los precios de los bienes y servicios se incrementaron, en el año, en un 20%.

Para poder comprar dentro de 1 año lo mismo que has adquirido con $ 100.000 el día de hoy, necesitarás $ 120.000. Pero como sólo podrás retirar $ 110.000 (monto), ello implicará que deberás comprar menos de lo que hoy compras.

Si no hubieses considerado la existencia de la inflación, tu decisión habría sido el de depositar, es decir, te habrías equivocado, porque con lo calculado anteriormente, lo que te conviene es comprar hoy y no invertir. En otras palabras, si no incluimos la inflación en los problemas financieros, lo más probable que estemos tomando malas decisiones.

El incluir la inflación involucra hablar en términos nominales y en términos reales, es por ello, que daremos algunas definiciones.

4.2. EXPRESIONES RELACIONADAS*:*

Valor monetario nominal: Es un valor monetario expresado en unidades de poder adquisitivo "variable" (decreciente en períodos inflacionarios). Por ejemplo $ 50.000.

Valor monetario real: Es un valor monetario expresado en unidades de poder adquisitivo "constante". En el ejemplo, los $ 100.000 hoy y los $ 120.000 dentro de un año, son valores reales, dado que con ambas cantidades de dinero en las fechas correspondientes puedes adquirir la misma cantidad de bienes y servicios (Ej. Unidad de Fomento)

Tasa de interés nominal: Es una tasa de interés que se aplica a un valor monetario nominal, y por lo tanto, mide el costo o rentabilidad "antes de inflación". Por ejemplo: 1,6 % mensual.

Tasa de interés real : Es una tasa que se aplica sobre valores monetarios reales, por lo tanto, mide el costo o rentabilidad "después de inflación".

No debes confundir tasa nominal v/s tasa efectiva
con el problema tasa nominal v/s tasa real.

Lo importante es poder determinar valores y tasas de intereses reales, conociendo los valores y tasas de interés nominales (viceversa); para ello, es necesario trabajar con la inflación del período.

4.3 DETERMINACIÓN DE LA INFLACIÓN DE UN PERIODO:

Como es muy difícil determinar la inflación de un país, nos conformaremos con conocer la estimación de la inflación, dada por la variación del índice de precios al consumidor (I.P.C), entregado todos los meses. por Instituto Nacional de Estadística (I.N.E),

Para conocer la variación del IPC, es necesario que sepas que un índice de precios es un indicador numérico que intenta cuantificar la variación porcentual del precio de un bien o del nivel de precios de un conjunto de bienes, respecto a su precio o nivel de precios en un momento dado, llamado momento o periodo base.

Por lo tanto, entenderemos como **Índice de Precios al Consumidor (I.P.C.)** ***como un número índice, que intenta reflejar el nivel de precios y medir las variaciones del nivel de precio de una canasta fija de bienes y servicios consumidos por una familia tipo, con respecto a un momento base.***

$$IPC = \frac{\text{Valor de la canasta base a precios del mes corriente}}{\text{Valor de la canasta base a precios del mes base}} \times 100$$

El IPC se calcula mensualmente y por convención se asume que su valor es el del último día del mes.

Las variaciones anuales del IPC calculadas a partir de las variaciones mensuales no son el resultado de un proceso agregativo simple (no se suman), debido a que cada variación mensual está referida al mes anterior. Si las variaciones de IPC estuvieran basadas en el mes base, entonces se podrían sumar. (siempre el IPC del mes base es cero).

Supongamos que la canasta base tiene un costo de $75.840.- en el mes base y hoy (mes corriente) esa misma canasta se valoriza a $84.355 Por lo tanto, el IPC para el presente mes será:

$$IPC = \frac{84.355}{75.840} \times 100$$

$$IPC = 111{,}23$$

El IPC para este mes es de 111.23, esto significa que el valor de la canasta entre el mes base y el mes corriente (hoy) ha aumentado en un 11,23 % (111,23 - 100)/ 100, es decir, la inflación estimada para ese período fue de 11,23%. Pero nosotros no queremos conocer la inflación entre un determinado mes, y el mes base, sino que deseamos saber cuál es la inflación mensual, semestral o anual. Para ello, debemos conocer los IPC de cada mes y calcular la variación porcentual mes a mes, obteniendo la estimación de la inflación mensual.

Por ejemplo:

MES	**IPC**	Var. **IPC %**
Enero	225,14	0,6
Febrero	225,82	0,3
Marzo	227,40	0,7
Abril	228,76	0,6
Mayo	230,59	0,8
Junio	232,67	0,9

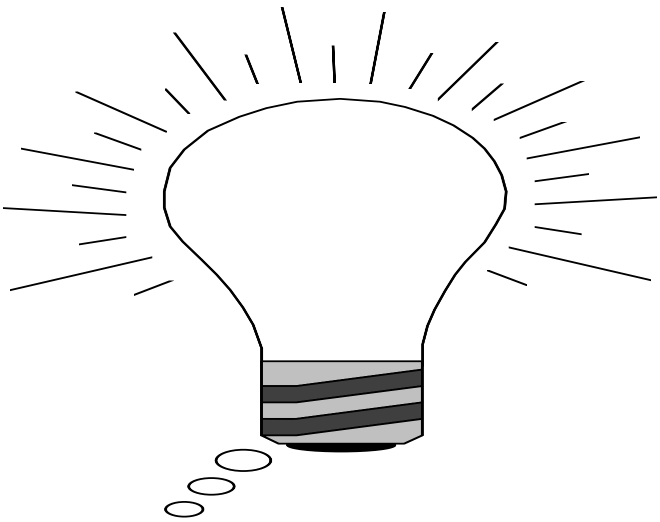
!Comprueba los resultados de las variaciones de IPC mensual!

PRUEBA N° 10

1.- Explica qué significa que el IPC de Abril sea de 228,76.

2.- Explica qué significa que la variación del IPC en Junio sea de 0,9 %

3.- Calcula la inflación semestral.



Pauta de Corrección:

1.- El IPC de Abril de 228,76, significa que el nivel de precios (de los bienes considerados en la canasta, representativos de todos los bienes de la economía), entre el último día del mes base y el 30 de Abril, se han incrementado en un 128,76% (228,76 - 100) x 100 / 100)

2.- El IPC entre Mayo y Junio se ha incrementado en un 0,9 %, en otras palabras, los precios entre 31 de Mayo y el 30 de Junio han aumentado, en promedio, en un 0,9%.

3.- Si tú sumas las variaciones de IPC mensual, obtendrías 3,9% pero estarías equivocado, (no debes sumar). Para calcular variación del IPC semestral necesitas conocer el IPC del mes anterior al inicio del período y el IPC del último mes del período. En este caso, Diciembre y Junio.

Pero no conoces el IPC de Diciembre

¿se puede calcular?

¡Por supuesto!

Tú conoces:

a.- La variación del IPC de Enero = 0,6 %

b.- IPC mes de Enero = 225,14

Por lo tanto, puedes determinar el IPC de Diciembre.

$$\text{Var.IPC ene} = \frac{\text{IPCene} - \text{IPC Dic}}{\text{IPCdic}} \times 100$$

$$0,6 = \frac{225,14 - \text{IPCdic}}{\text{IPCdic}} \times 100$$

IPCdic = 223,79

Inflación del primer semestres: $= \frac{(232,67 - 223,79)}{223,79} \times 100$

$= 3,96\ \%$

$= 4,0\ \%$

4.4 MONTO O VALOR REAL

Supón la siguiente situación: tú tienes la posibilidad de depositar durante un año $100.000.- al 18% nominal anual. La Inflación estimada para ese año es de un 12% anual ¿te conviene hacer el depósito o es recomendable que esa plata la inviertas adquiriendo algo hoy?.

Para responder la pregunta, lo primero a hacer es determinar la cantidad de dinero que retiraras al cabo de un año (capital más intereses). Ese monto recibe el nombre de <u>monto nominal</u> (no hemos considerado la inflación, en otras palabras no hemos visto ¿Cuánto podemos comprar con ese dinero?).

$M_N = 1.000.000\ (1 + 0{,}18 \times 1) = \$\ 1.180.000$ (interés simple)

Interés nominal $= \$180.000$ (M - C)

Es decir, durante un año ganarías $180.000 al depositar $1.000.000, si un artículo vale $1.000 hoy, tú podrías comprar 180 unidades más de ese articulo al final de un año.

Pero sabemos que la inflación en el año será del 12%, es decir, las cosas en promedio, costarán un 12% más caro, por lo tanto, el citado depósito no hará aumentar la capacidad de compra en 180 unidades, la inflación provocará que sean menos de 180, o quizás que pueda comprar con $ 1.180.000 dentro de un año, menos unidades de las que puede comprar hoy con $1.000.000.

Para saber cuánto es el real poder de compra con el monto nominal, es necesario ajustar los valores por la inflación, de tal modo, de expresar los valores en pesos de igual poder adquisitivo, en otras palabras, se debe calcular valores monetarios reales, en monedas de un mismo tiempo.

1.000.000 i_n = 18 % anual 1.180.000

|____|

0 inflación = 12 % anual 1 año

El monto nominal de $ 1.180.000 está relacionado con los precios que tengan los bienes y servicios dentro de un año. Pero como la idea es dejar expresado el M_N a un mismo poder de compra del depósito, (usaremos los precios de la fecha de este último)., al monto nominal le debemos descontar la inflación del período (1 año), obteniendo el Monto Real, usando la siguiente fórmula.

$$\boxed{Mr = \frac{Mn}{(1 + inf)}}$$

donde:

Mr	=	monto real
Mn	=	monto nominal
inf.	=	inflación del periodo entre la fecha del depósito y la fecha del retiro

en el ejemplo:

$$Mr = \frac{1.180.000}{1 + 0,12} = 1.053.371$$

$ 1.053.371 significa que por depositar $ 1.000.000 hoy, en un año se retirarán $1.180.000, pero este dinero está relacionado a los precios de hoy con sólo $1.053.371. Es decir, en el caso de comprar un artículo a $ 1.000 producto de la inflación no podríamos aumentar el consumo del artículo en 180 unidades, sino solo en 53. En este caso, si no existe otra alternativa mejor, conviene depositar el dinero porque aumentaría tu riqueza.

¡Qué pasaría si el dinero quieres mantenerlo depositado durante 3 años!.

¿Conviene?.

Para responder la pregunta, primero necesitas conocer o estimar la inflación para ese período de tiempo. Supongamos que se estima la inflación para el periodo en:

AÑO	INFLACIÓN %
1	12
2	10
3	8

1.000.000 i = 18 % anual Mn

|________|________|________|

0 inf: 12% 1 inf: 10 % 2 inf: 8% 3

$$M_N = 1.000.000\ (1 + 0{,}18 \times 3) = \$\ 1.540.000$$

$$M_R = \frac{1.540.000}{1{,}12 \times 1{,}1 \times 1{,}08} = \$\ 1.157.407$$

Si tú conoces los valores de los IPC, utilizando éstos puedes obtener un monto o valor real de un monto o valor nominal. Para ello, necesitas disponer del IPC de la fecha del capital o depósito y el IPC de la fecha del monto o retiro.

Para determina el monto real, utilizando los IPC, debemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{M_R = M_N \times \frac{\text{IPC base}}{\text{IPC cte.}}}$$

donde:

Mr	=	Monto real
MN	=	Monto nominal
IPCbase=		Valor del IPC de la fecha del capital
IPCcte.=		Valor del IPC de la fecha del monto

del primer ejemplo:

1.000.000	1.180.000
0	1
IPC = 100	IPC = 112

$$M_R = 1.180.000 \times \frac{100}{112} = \$\ 1.053.571$$

del segundo ejemplo

1.000.000 i = 18 % anual 1.540.000

0 inf: 12%	1 inf: 10 %	2 inf: 8%	3
100	112	123,2	133,06

$$MR = 1.540.000 \times \frac{100}{133,06} = \$\ 1.157.373$$

En los problemas anteriores, hemos descontado la inflación del período para obtener los valores reales. También podemos obtener éstos, si al capital le agregamos la inflación del período, es decir, en el ejemplo, al capital le agregamos la inflación del 12%, para comparar este nuevo valor con el monto nominal. Como ambos valores van a estar a poder adquisitivo de la fecha del monto, estos recibirán el nombre de ***valores reales***

$$C_R \text{ o } V_R = C_N \text{ o } V_N \ (1 + \text{inf})$$

$$C_R = 1.000.000\ (1 + 0{,}12) = \$\ 1.120.000$$

En el ejemplo, para adquirir las cosas que se compran hoy con $1.000.000, el próximo año se necesitarán $ 1.120.000, por lo tanto, este capital (1.120.000) se debe comparar con el monto de $1.180.000, y como ambos están expresados en poder adquisitivo de un año más, ambos valores son reales.

En el ejemplo 2:

$$V_R = 1.000.000\ (1{,}12)\ (1{,}10)\ (1{,}08)$$

inflación año 1 inflación año 2 inflación año3

Si queremos usar los IPC, agregando la inflación:

$$V_R = V_N \times (\text{IPC cte.} / \text{IPC base})$$

en el ejemplo 1

$$VR = 1.000.000 \times \frac{112}{100} = \$\ 1.120.000$$

en el ejemplo 2

$$VR = 1.000.000 \times \frac{133{,}06}{100} = \$\ 1.330.560$$

4.5. **DETERMINACIÓN DE LA TASA DE INTERÉS REAL**:

Para determinar la tasa de interés real de un préstamo, es necesario conocer el capital el monto real y el tiempo de uso del dinero. Por otro lado, hay que considerar si el préstamo se cancela en un pago único o a través de pagos parciales.

4.5.1 **Préstamo se cancela en Pago Unico**

Si a un capital le aplicamos una tasa de interés nominal, obtenemos el monto nominal de dicho capital, y si le aplicamos una tasa de interés real, logramos su monto real. Por lo tanto, si conocemos el Capital, el Monto Real y el tiempo, podemos obtener la tasa de interés real ir.

$$M_N = C\,(1 + i_N \times n)$$

$$M_R = M_N / (1 + inf)$$

O bien

$$M_R = M_N \times \frac{\text{IPC base}}{\text{IPC cte}}$$

también podemos obtener el monto real:

$$M_R = C\,(1 + i_r \times n)$$

Si unimos las dos fórmulas:

$$C\,(1 + i_N \times n) / (1 + inf) = C\,(1 + i_r \times n)$$

Factorizando y simplificando:

$$\boxed{\mathbf{i\,r} = \frac{\big((1 + i_N \times n) / (1 + inf)\big) - 1}{n}}$$

NOTA:

La inflación a considerar debe corresponder al tiempo de uso del dinero, Es decir, el periodo comprendido entre la fecha del capital y la fecha del monto.

Apliquemos la fórmula en el siguiente problema:

Determina la tasa de interés real anual, de los dos ejemplos vistos anteriormente.

en el ejemplo 1:

$$1.053.571 = 1.000.000\ (1 + i\ r \times 1)$$

$$i\ r = 5{,}36\ \%$$

usando la fórmula:

$$i\ r = \frac{((1 + 0{,}18 \times 1) / (1{,}12) - 1}{1}$$

$$i\ r = 5{,}36\ \%$$

en el ejemplo 2:

$$1.157.407 = 1.000.000\ (1 + i\ r \times 3)$$

$$i\ r = 5{,}25\ \%$$

usando la fórmula:

$$i\ r = \frac{((1 + 0{,}18 \times 3) / 1{,}12 \times 1{,}1\ \ 1{,}08) - 1}{3}$$

$$i\ r = 5{,}25\ \%$$

¡Veamos lo que has aprendido!

1.- Comprueba el resultado de la tasa de interés real, si en vez de descontar la inflación al monto nominal, se la agregas al capital

2.- Obtén las fórmulas para determinar la **ir,** si utilizas interés compuesto.

Ahora que has aprendido a determinar la tasa de interés real aplicada a un préstamo o depósito, debo decirte, que existe una forma más fácil de obtener la tasa de interés real, corresponde al teorema llamado TEOREMA DE FISHER el cual dice que, para obtener la tasa de interés nominal basta agregarle a la tasa de interés real la inflación del período, de la siguiente manera:

$$(1 + in \times n) = (1 + ir \times n) \times (1 + inf)^n$$

De este planteamiento podemos llegar a la siguiente fórmula para obtener la **ir,** si el periodo es un año**.**

$$\boxed{\mathbf{ir} = \frac{(1 + in)}{(1 + inf)} - 1}$$

Usemos el teorema de Fisher en los dos ejemplo anteriores:

del ejemplo 1

$$ir = \frac{(1 + 0{,}18)}{(1 + 0{,}12)} - 1$$

$$ir = 5{,}36\% \text{ anual}$$

del ejemplo Nº 2

i_N = tasa de interés nominal para 3 años 0,18 x 3 = 0,54
inf = tasa inflacionaria para 3 años (1 + 0,12) (1 + 0,1) (1 + 0,08) = 1,33056
ir = tasa de interés real para 3 años

$$ir = \frac{1 + 0{,}54}{1 + 0{,}33056} - 1$$

$$ir = 0{,}1574 \text{ (para 3 años)}$$

Tasa de interés real anual (0,1574/3) = 5,25%

¡Recuerda!

La tasa de interés real, nominal a inflación deben estos expresados para en mismo tiempo.

4.5.2. Préstamo se cancela con Pagos Parciales

Las fórmulas anteriores para determinar la tasa de interés real aplicada a un préstamo o depósito, no es posible utilizarla, cuando existen pagos parciales. Cuando esto ocurre, se recomienda la siguiente metodología.

1.- Transformar los valores nominales a reales
2.- Plantear la ecuación de valores equivalente (usa recta de tiempo)
3.- Descubrir aquella tasa de descuento que haga cumplir la igualdad

Para entender lo anterior, veamos un ejemplo.

Una persona pide un préstamo de $ 350.000 a una tasa de interés nominal del 2% mensual compuesto. El préstamo se cancela en 4 cuotas iguales mensuales y vencidas. La inflación mensual estimada para los próximos cuatro meses es de un 0,5%.

1º Determinación del valor de las cuotas nominales

$$350.000 = R \left(\frac{1 - (1,02)^{-4}}{0,02} \right)$$

$$R = \$ \; 91.918$$

2º Recta de tiempo (este punto puede ir primero)

Hazlo tú

3º Transformación de valores nominales a reales

CUOTA	CUOTA NOM	CUOTA REAL
1	91.918	91.918/1,005 = 91.461
2	91.918	$91.918/1,005^{2}$ = 91.006
3	91.918	$91.918/1,005^{3}$ = 90.553
4	91.918	$91.918/1,005^{4}$ = 90.102

Las cuotas reales se encuentran a poder adquisitivo de tiempo cero (o) , es por eso, que a la cuota Nº 1 se le descontó la inflación del primer mes; a la cuota N° 2, la inflación acumulada de los dos primeros meses ((1,005) x (1,005)); a la cuota Nº 3 la inflación de los tres primeros meses, y a la cuota Nº 4 la inflación de los cuatro meses.

4º. Planteamiento de la ecuación de valores equivalentes

$$350.000 = \frac{91.461}{(1+i)} + \frac{91.006}{(1+i)^{2}} + \frac{90.543}{(1+i)^{3}} + \frac{90.102}{(1+i)^{4}}$$

5º.- Tanteo, para descubrir la tasa de descuento que permita cumplir con la igualdad.

Como debes recordar, nos enfrentamos a cuotas reales de distinto valor, por lo tanto, no podemos usar las fórmulas de anualidades, debemos utilizar el método denominado carretero.

TASA DE INTERÉS	VALOR ACTUAL (350.000)	
2 %	345.700	debo disminuir i
1,6 %	349.074	debo disminuir i
1,4 %	350.781	nos pasamos

La tasa de interés real mensual se encuentra entre 1.4% y 1.6%. Podemos seguir tanteando o interpolamos **.¡Hazlo!.**

Por lo tanto, la tasa de interés real es del **1, 49 %**

Si tú conocer los valores reales y la tasa de interés real, puedes determinar valores nominales y la tasa de interés nominal. Para ello, debes usar la misma metodología, con la diferencia que ahora debes transformar los valores reales a nominales.

Es importante conocer los valores nominales, dado que estos corresponden a la cantidad de dinero que el deudor ha de cancelar al acreedor.

En la actualidad son muy comunes los préstamos en cuotas fijas y en pesos (valores nominales), pero también, se da en muchos casos, que las cuotas de un préstamo se determinan en términos reales, es decir, en Unidades de Fomento: (U.F).

Dada la importancia que ha tenido la UF, en la economía chilena, creo necesario que debes conocer algo más sobre este tema.

4.6 UNIDAD DE FOMENTO

La Unidad de Fomento (U.F.) es otra moneda que es utilizada en el País. Tiene la característica de mantener su poder adquisitivo, es decir, no se desvaloriza producto de la inflación, dado que la UF se reajusta diariamente por la inflación.

El valor de la UF, se calcula para cada día del periodo comprendido entre el día 10 del mes "j" y el día 9 del mes " j + 1 ", utilizando la variación diaria del IPC del mes " j - 1", empleando para el cálculo el número exacto de días entre el 10 del mes "j" y el 9 del mes "j + 1", ambos inclusive.

Por ejemplo, si queremos calcular los valores de las UF entre los días 10 de Junio y 9 de Julio, necesitamos:

1.- Valor de la UF del día 9 de Junio (mes j)

2.- Inflación diaria de Mayo (mes j-1)

Para determinar la inflación diaria de Mayo, requerimos la inflación de ese mes, y el número de días entre el 10 de Junio y el 9 de Julio (ambos inclusive), es decir, 30 días. Para transformar la inflación mensual a diaria, debemos utilizar lo aprendido en *tasa equivalente a interés compuesto.*

Por ejemplo, supongamos que la UF al 9 de Octubre del presente año es de $ 345,12 y la inflación de Septiembre de 0,8%. Calculemos las UF para el período comprendido entre el 10 de Octubre y el 9 de Noviembre.

1.- Cálculo de la inflación diaria:

inflación de Septiembre : 0, 8 %
número de días 10.10-----9.11 : 31 días

$$(1 + 0.008)^{1} = (1 + inf_{d})^{31}$$

$$inf_{d} = 0,000257071$$

2.- Cálculo de UF para algunos días del período:

$$UF\ 10.10 = UF\ 09.10\ (1 + inf_{d})$$

$$= 345,12 (1 + 0,00257071) = 345,21$$

UF 11.10 Para calcular la UF de este día, tenemos dos caminos:

| a.- Agregarle a la UF del 10.10 la inflación de un día

$$= UF\ 10.10 (1 + inf_{d})$$

$$= 345,21 (1 + 0,00257071)$$

$$= 345,30$$

b.- Agregarle a la UF del 09.10 la inflación de dos días

$$= UF\ 9.10 (1 + inf_{d})^{2}$$

$$= 345,12 (1 + 0,00257071)^{2}$$

$$= 345,30$$

Es recomendable usar el segundo camino para determinar los valores de UF para los demás días. Si usas el primero, es necesario determinar previamente las UF de los días anteriores.

Cálculo de: UF 15.10

UF 09.10 = 345,21

Días de ajuste inflacionario = 6 (10.10---15.10 ambos inclusive)

$$= 345{,}21\ (\ 1{,}000257071\ )^{6}$$

$$= 345{,}74$$

! VEAMOS AHORA LO QUE HAS APRENDIDO!

PRUEBA N° 11

María Paz, el 01 de Febrero de 1997, pidió un préstamo de $ 500.000 en una financiera, al 3,21 % mensual compuesto. Acordó devolver el préstamo en 3 cuotas iguales vencidas, los días primero de cada mes. Ella además dispone de la siguiente información:

a.- La inflación estimada para los meses de Marzo, Abril y Mayo es de 1,0; 0,5; y 0,6 % respectivamente.

b.- La inflación de Nov. , Dic., Ene., y Feb. fue de 0,5; 0,7; 0,4 y 0,4 % respectivamente.

c.- Valor de la UF del día 05.01.97 es de $ 244,86.

Se pide:

1.- Determina el valor de las cuotas mensuales.

2.- Determina la tasa de interés real mensual pagado por María Paz

3.- Determina la cantidad de UF solicitada en préstamo.

Pauta de Corrección:

1.- Como los meses tienen distinta cantidad de días, no es posible usar las fórmulas de anualidad (salvo si tú quieres un resultado rápido y aproximado).

1.1 Determinación del número de días:

Periodo	Nº de días	
01.02-- 01.03	28	
01.02-- 01.04	59	(28 + 31)
01.02-- 01.05	89	(28 + 31 + 30)

1.2 Determinación de la tasa de interés diaria equivalente:

$$(1 + 0{,}0321) = (1 + i\,d)^{30}$$

$$id = 0.00105374$$

1.3 Formulación de ecuación de valores equivalentes (ff 01.02)

$$500.000 = \frac{X}{1{,}00105374^{28}} + \frac{X}{1{,}00105374^{59}} + \frac{X}{1{,}00105374^{89}}$$

$$X = 177.228$$

2.-

2.1 Determinación de cuotas reales:

cuota real 1 = 177.228 / 1,004 = 176.522

cuota real 2 = 177.228 / 1,004 x 1,01 = 174.774

cuota real 3 = 177.228 / 1,004 x 1,01 x 1,005 = 173.905

2.2 Planteamiento de ecuación de valores equivalentes (f.f 01.02)

$$500.000 = \frac{176.522}{(1 + id)^{28}} + \frac{174.774}{(1 + id)^{59}} + \frac{173.904}{(1 + id)^{89}}$$

Tanteando e interpolando

ir **=** 2,51 % aproximadamente

3.-

Datos disponibles:

UF 05.01.97 = $ 244,86
Inflación Noviembre: 0,5 %

!Te queda claro el porqué consideramos la inflación de Noviembre!

3.1 Cálculo de inflación diaria:

$(1 + \text{inf d})^{31}$ = (1 + 0,005) (Dic. tiene 31 días)

inf d = 0,000160901

3.2 UF 09.01.97

= $244,86\,(1,000160901)^{4}$

= $ 245,02

3.3 UF al 01.02.97

3.3.1 Cálculo de inflación diaria:

$(1 + \text{inf d})^{31}$ = 1,007 (inflación de Dic. 0,7 % , Ene. tiene 31 días)

inf d = 0,000225045

3.3.2 UF 01.02.97

$$= \text{UF } 09.01.97\ (1 + \text{inf d})^{23}$$

$$= 245{,}02 \times 1{,}000225045^{23}$$

$$= 246{,}29$$

3.3.3 UF solicitado en préstamo:

$$\frac{\text{préstamo en pesos}}{\text{valor UF } 01.02.97} = \frac{500.000}{246{,}29} = 2.030{,}13 \text{ UF}$$

!Continuamos aprendiendo!

CAPÍTULO N° 5

MATEMÁTICAS FINANCIERAS EN LA EVALUACIÓN DE INVERSIONES

OBJETIVOS:

Al término del capítulo, tú podrás:

1.- Conocer la importancia de las matemáticas financieras en la evaluación de inversiones

2.- Entender conceptualmente, y determinar el Valor Actual Neto (VAN) de una inversión.

3.- Entender conceptualmente, y determinar la Tasa Interna de Retorno (TIR) de una inversión.

El presente módulo no pretende hacer un estudio profundo respecto a la preparación y evaluación de inversiones. Sino sólo mostrar cómo participa las Matemáticas Financieras en algunas técnicas de evaluación de inversiones.

Antes e evaluar un proyecto, es necesario hacer una serie de estudios, de tal modo, de poder determinar:

5.1 <u>**INFORMACIÓN REQUERIDA PARA LA EVALUACIÓN DE INVERSIONES**</u>:

1.- La inversión necesaria para iniciar el proyecto.

2.- Los flujos de fondos (ff) periódicos que genera el proyecto, tales como, ingresos y egresos (la diferencia entre ingresos y egresos recibe el nombre de Ingresos Netos (YN).

3.- El tiempo de vigencia del proyecto, conocido como vida útil.

4.- El valor residual del proyecto, también llamado Valor de Desecho o Valor de Salvamento, es decir, el valor de mercado que se estima tendrán las maquinarias, equipos e instalaciones, una vez terminada la vida útil.

5.- La tasa de descuento, para evaluar dineros que se encontrarán en distinta fecha. Esta tasa de descuento recibe el nombre de *tasa de costo de capital* (K).

Cabe señalar que esta etapa es la más complicada, y en la que se debe destinar mayor cantidad de tiempo y recursos.

Nosotros, consideraremos que el estudio del proyecto ya ha sido realizado, por lo tanto, disponemos de los datos señalados en los 5 puntos anteriores, como podemos observar en la siguiente recta de tiempo.

II = 1.000.000

0		1	2	3	4	5 años
Y	=	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000
E	=	200.000	200.000	200.000	200.000	200.000
YN		300.000	300.000	300.000	300.000	300.000
					V.D.	200.000

K = 10 % anual

De la presente recta de tiempo, podemos observar la siguiente información:

I.I.	=	Inversión Inicial	=	$ 1.000.000
Y.N.	=	Ingreso Neto	=	$ 300.000 anual
V.D.	=	Valor de Desecho	=	$ 200.000
V. Útil	=	Vida Útil	=	5 años
K	=	Tasa costo de capital	=	10 % anual

De las 5 variables que se necesitan para efectuar una evaluación de inversiones, la que requiere mayores comentarios es la tasa de costo de capital (K).

Al observar la recta de tiempo de nuestro proyecto de inversión, nos enfrentamos a dineros que se pagarán y/o recibirán periódicamente, durante toda la vida útil del proyecto, es decir, ***dineros que están en distinto tiempo***. Es por eso, que si deseamos utilizar técnicas de evaluación de inversiones que consideren que el dinero tiene distinto valor en el tiempo, debemos emplear una tasa de descuento, que permita evaluar cada uno de los flujos de fondos en una misma fecha focal. Por convención, y debido a que es el día de hoy donde se debe tomar la decisión, se ha optado como fecha focal el tiempo cero (0), o la fecha en que se realiza la inversión.

Para decidir si conviene o no llevar a cabo el proyecto, es necesario determinar los beneficios que genera el proyecto o la rentabilidad de éste. Y luego comparar éstos con los beneficios o rentabilidad de otras alternativas de inversión.

Por norma general, si el proyecto permite generar mayores beneficios o rentabilidad que cualquier otra alternativa de inversión, es recomendable llevar a cabo el proyecto. En caso contrario, el dinero se deberá invertir en la mejor de las otras alternativas de inversión. Por ejemplo, si mi proyecto me permite una rentabilidad del 15 % anual, y existe otra alternativa viable de inversión que solo genera un 12 % anual (ambas con igual riesgo), conviene hacer el proyecto.

En caso que existan varias alternativas de inversión, deberás ordenar éstas, y la mejor de todas se deberá utilizar para comparar con el proyecto. Es decir, el proyecto se compara con la mejor alternativa de inversión. Los beneficios de esta alternativa que se dejarían de percibir que recibe el nombre de **costo de oportunidad**, dado que esta se desecharía al realizarse el proyecto.

Existen varios criterios de decisión para comparar entre proyectos, los principales desde el punto de vista económico son:

1.- Rentabilidad

Esta consiste en los retornos que genera la inversión, durante la vida útil del proyecto.

2.- Riesgo

Corresponde a la probabilidad de no obtener los retornos estimados del proyecto.

Cuando dos o más alternativas de inversión tienen igual riesgo, se debe optar por la de mayor rentabilidad.

Cuando dos o más alternativas de inversión tienen igual rentabilidad, debe optar por la de menor riesgo, y

Cuando una alternativa de inversión tiene mayor riesgo y mayor rentabilidad que otra, el criterio de decisión va a depender de quien deba tomar la decisión. Si le interesa sólo ganar dinero, preferirá aquella inversión de mayor rentabilidad, pero deberá asumir mayor riesgo. Si la persona es adversa al riesgo elegirá la alternativa de menor riesgo y que tiene a la vez menor rentabilidad.

Un inversionista decidirá hacer un proyecto, toda vez que éste le genere por lo menos una cierta rentabilidad. Esta rentabilidad mínima exigida al proyecto por él o los inversionistas recibe el nombre de ***Costo de Capital***. (Existen cursos de finanzas que gran parte de su programa de estudio considera la tasa de costo de capital. Si quieres profundizar en el tema, consúltalos).

5.1.1. **Tasa de Costo de Capital**.

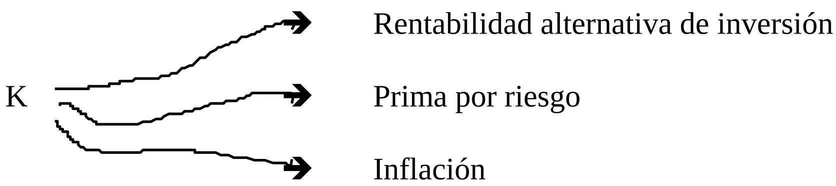
Como lo hemos señalado, la **tasa de costo de capital**, ***consiste en la rentabilidad mínima exigida al proyecto por el inversionista.***

Esta rentabilidad mínima debe incluir:

1.- Rentabilidad de la mejor alternativa de inversión que se desecharía al hacerse el proyecto.

2.- Si el proyecto tiene un mayor riesgo que la inversión considerada como alternativa, el inversionista para hacer el proyecto exigirá una rentabilidad mayor que la rentabilidad de la alternativa que se desecharía. La diferencia entre estas rentabilidad recibe el nombre de **prima por riesgo**. La magnitud de esta prima, dependerá del inversionista.

3.- Si los valores del o los flujos de fondos del proyecto, están expresados en términos nominales ($), se deberá incluir la inflación periódica estimada por toda la vida útil del proyecto. En cambio, si los flujos de fondos están expresados en términos reales (UF), no se requiere el ajuste inflacionario (esta considerado en la UF).



Por ejemplo, supón que una persona desea invertir su dinero en la compra de un colectivo. Ella también podría depositar su dinero en un banco al 12 % anual. Pero como el operar con el colectivo implica un riesgo mayor que el deposito bancario sólo comprará el colectivo, si éste le reporta anualmente un 25 %. La inflación anual se estima en un 6 %.

Rentabilidad alternativa de inversión	=	12 %
Prima por Riesgo	=	13% (25 - 12)
Inflación	=	6 %
Costo de capital	=	31 %

Insisto, el costo de capital, incluye una serie de conceptos no tratados en este módulo, pero desde el punto de vista de las Matemáticas Financieras, es suficiente con lo visto hasta el momento.

5.2 **TÉCNICAS DE EVALUACIÓN DE INVERSIONES**:

Para evaluar un proyecto, existen varias técnicas, las más utilizadas, y que consideran que el dinero tiene distinto valor en el tiempo son:

1.- Valor Actual Neto (V.A.N.)

2.- Tasa Interna de Retorno (T.I.R.)

Las otras técnicas, son temas relevantes para un curso de evaluación de inversiones. A nosotros nos basta con estas dos.

5.2.1 **VALOR ACTUAL NETO (V.A.N.)**

Si un proyecto de inversión tiene n períodos de vida útil, el cual genera ingresos netos esperados de YN_1, YN_2, YN_3.........YNn (incluida la I I). Y si K es la tasa mínima de rentabilidad exigida por periodo, se tiene:

$$\boxed{V.A.N. \quad = \quad -II + \sum_{i=1}^{n} \frac{YN\, i}{(1+K)\, i}}$$

donde:

YN	:	Ingreso neto del periodo
K	:	Tasa de costo de capital
n	:	Vida útil del proyecto
II	:	Inversión Inicial (va con signo negativo por ser un egreso)

Este método supone que los flujos de fondos intermedios se reinvierten a la tasa de costo de capital.

La fórmula del VAN, consiste en descontar a los ingresos netos futuros estimados, los intereses que el inversionista podría obtener si destina su dinero a la otra alternativa de inversión. Por lo tanto, mientras mayores sean los beneficios que genere la otra alternativa de inversión, menor será al VAN, es decir, el resultado del VAN va a depender de la rentabilidad exigida al proyecto, y por ende, de las variables que influyen en éste.

El VAN puede tener tres resultados:

1.- VAN $>$ 0

2.- VAN $<$ 0

3.- VAN $=$ 0

1.- **<u>VAN $>$ 0:</u>**

Si el VAN de un proyecto resulta ser positivo, es decir, mayor que cero, significa que los retornos o beneficios que generará el proyecto permitirá cubrir la inversión inicial y los beneficios que se dejarían de percibir por no hacer la otra alternativa de inversión. La diferencia, dada por el resultado del VAN, nos indica cuanto más rico hace a los inversionistas el proyecto de inversión, respecto a la otra alternativa o respecto a lo que exigen éstos.

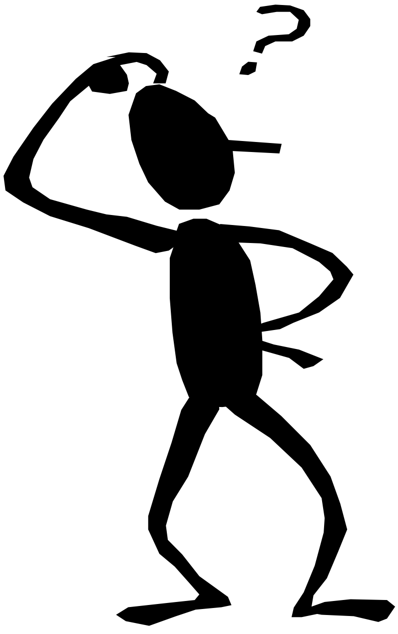
Por ejemplo, si el VAN de un proyecto es de $ 1.200.000 El proyecto se debe realizar.

¿porqué?

<u>Respuesta:</u>

Porque al hacer el proyecto se gana durante la vida útil de éste, valorizado a tiempo cero, $ 1.200.000, más de lo que se habría obtenido con la otra alternativa de inversión.

!Ahora tú puedes responder qué significa las alternativas 2 y 3!



Respuesta

1.- **VAN < 0:**

El proyecto se debe rechazar, se debe destinar el dinero a la otra alternativa de inversión. El hacer el proyecto implica obtener retornos o beneficios menor que la mejor alternativa de inversión. Esto no implica que el proyecto genere pérdidas, sino, que si se hace, se estaría dejando de ganar dinero respecto a la otra alternativa de inversión.

2.- **VAN = 0**

Implica indiferencia entre hacer el proyecto o destinar el dinero a la otra alternativa. En este caso no significa que el proyecto no genere rentabilidad, sino que ésta es igual a la que se obtiene con la alternativa de inversión (con igual riesgo).

¿Qué te parece si ahora evaluamos el proyecto del ejemplo, según el VAN?

$$VAN = -1.000.000 + \frac{300.000}{1,1} + \frac{300.000}{1,1^{2}} + \frac{300.000}{1,1^{3}} + \frac{300.000}{1,1^{4}} + \frac{500.000}{1,1^{5}}$$

Como los ingresos netos son iguales (sin considerar el valor de desecho), y los periodos también, podemos usar la fórmula de anualidad vencida.

$$VAN = -1.000.000 + 300.000 \left(\frac{1 - 1,1^{-5}}{0,1} \right) + \frac{200.000}{1,1^{5}}$$

$$VAN = \$\ 261.420$$

Según el resultado del VAN, se debe hacer el proyecto, dado que éste permite generar mayores retornos ($ 261.420) que la mejor alternativa de inversión.

Hasta el momento no hemos determinado la rentabilidad que genera el proyecto. Para ello, debemos calcular la Tasa Interna de Retorno (TIR).

5.2.2 TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

La TIR implica determinar la rentabilidad que genera el proyecto, en forma periódica. Se supone que los flujos de fondos intermedios se reinvierten a las tasa TIR.

Para determinar la TIR de un proyecto, se debe buscar una tasa de descuento que permita que el VAN sea igual a cero.

$$VAN = 0$$

$$-II + \sum_{i=1}^{n} \frac{YNi}{(1+j)^{i}} = 0$$

donde

J = Tasa de descuento, llamada TIR

Una vez determinada la TIR, es necesario comparar esta tasa, con la tasa de costo de capital, pudiendo producirse 3 situaciones:

1.- TIR $>$ K

2.- TIR $<$ K

3.- TIR $=$ K

1.- **TIR > K**

Si la TIR del proyecto es mayor a rendimiento mínimo exigido por los inversionistas, el proyecto se debe realizar.

2.- **TIR < K**

Si el rendimiento del proyecto es menor a la rentabilidad exigida por los inversionistas, el proyecto no se debe realizar.

3.- **TIR = K**

Se habla de indiferencia debido a que la rentabilidad del proyecto coincide con K.

!Ahora evaluemos el proyecto, según método TIR!

$$-1.000.000 + 300.000 \left(\frac{1 + (1 + J)^{-5}}{J} \right) + \frac{200.000}{(1 + J)^{5}} = 0$$

Tanteando e interpolando la TIR del proyecto = 19,05 %

La TIR del 19,05 % es mayor a la K del 10 %, por lo tanto, el proyecto debe ser realizado, según este método.

PRUEBA N° 12

Una persona desea evaluar un proyecto de inversión , para lo cual se dispone de la siguiente información:

Inversión Inicial	: $ 5.000.000
Flujos netos de fondos mensuales	: $ 300.000
Vida Útil	: dos años
Tasa costo de capital	: 1% mensual
Valor residual	: 0

Pauta de Corrección:

Según criterio del VAN:

$$VAN = -5.000.000 + 300.000 \left(\frac{1 - (1 + 0{,}01)^{-24}}{0{,}01} \right)$$

$$VAN = \$\ 1.373.016$$

Como el VAN es positivo, el proyecto se debe realizar, dado que su realización generará mayores beneficios que los exigidos al proyecto.

Según criterio TIR:

Tanteando e interpolando: $tir = 3{,}15\%$

La rentabilidad del proyecto es de un 3, 15 %, la cual es superior al 1 % exigida por los inversionistas, por lo tanto, se debe realizar el proyecto.

! HEMOS TERMINANDO !

!TE FELICITO!