Integral definida. Función integrable

Suma de Reimann

Sea el intervalo [a, b]. En conjunto de puntos:

$P_n = \{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n\}$
Donde
$x_0 = a$; $x_n = b$; $x_{i-1} < x$; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$
Se llama partición o red de intervalo [a, b]

Se puede observar que una partición de un intervalo lo divide en "n" subintervalos, y a cada uno de ellos se les llama también celda.

A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le llama amplitud de celda, es decir:

$\Delta_1 x = x_1 - x_0$ (amplitud de la celda uno)

$\Delta_2 x = x_2 - x_1$ (amplitud de la celda dos)

en general la amplitud de la celda i – ésima es:

$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$

Un mismo intervalo [a, b] puede tener infinidad de particiones ya que el tamaño de las celdas es arbitrario.

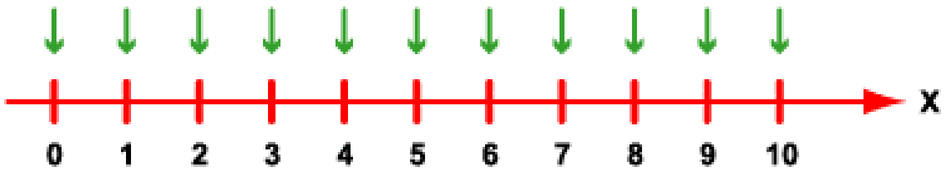
A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le llama norma de la partición y se representa por medio del símbolo:

$||\Delta||$ o a veces con V(R)

Ejemplo:
Dado el intervalo [0, 10] efectuar dos particiones diferentes de 10 celdas y en cada caso decir cual es la norma.

Solución:

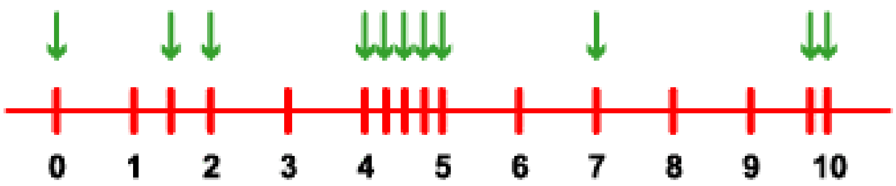
a) La primera partición se hará de diez celdas de igual amplitud como se indica en la figura



Las diez celdas tienen la misma amplitud que vale la unidad.

$\Delta_1 x = 1 - 0 = 1$
$\Delta_2 x = 2 - 0 = 1$
$\Delta_3 x = 3 - 2 = 1$
$\Delta_4 x = 4 - 3 = 1$
$\Delta_5 x = 5 - 4 = 1$
$\Delta_6 x = 6 - 5 = 1$
$\Delta_7 x = 7 - 6 = 1$
$\Delta_8 x = 8 - 7 = 1$
$\Delta_9 x = 9 - 8 = 1$
$\Delta_{10} x = 10 - 9 = 1$

b) La segunda partición se efectuará de la siguiente manera.



$\Delta_1 x = 1.5 - 0 = 1.5$
$\Delta_2 x = 2 - 1.5 = 0.5$
$\Delta_3 x = 4 - 2 = 2$
$\Delta_4 x = 4.25 - 4 = 0.25$
$\Delta_5 x = 4.5 - 4.25 = 0.25$
$\Delta_6 x = 4.75 - 4.5 = 0.25$
$\Delta_7 x = 5 - 4.75 = 0.25$

$\Delta_8 x = 7 - 5 = 2$
$\Delta_9 x = 9.9 - 7 = 2.9$
$\Delta_{10} x = 10 - 9.9 = 0.1$

La norma de esta partición es

$||\Delta|| = 2.9$

Supóngase que la función y=f(x) esta definida y limitada en el conjunto D y considérese una partición de dicho conjunto que contenga n intervalos.

Si se escoge un punto ε en cada subintervalo de la partición de tal forma que:

$\varepsilon_1 \in [x_0, x_1]$ donde $x_0 \leq \varepsilon_1 \leq x_1$
$\varepsilon_2 \in [x_1, x_2]$ donde $x_1 \leq \varepsilon_2 \leq x_2$
. .
. .
. .
$\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ donde $x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$

y se forma la suma de productos del valor de f en cada punto ε por la amplitud de la celda respectiva, se tendrá:

$f(\varepsilon_1)\Delta_1 x + f_2(\varepsilon_2)\Delta_2 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(\varepsilon_i)\Delta_i x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(\varepsilon_n)\Delta_n x$

En forma condensada se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$

A esta suma de llama suma de Reimann.

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots n^2=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1=n$$

Ejemplo:

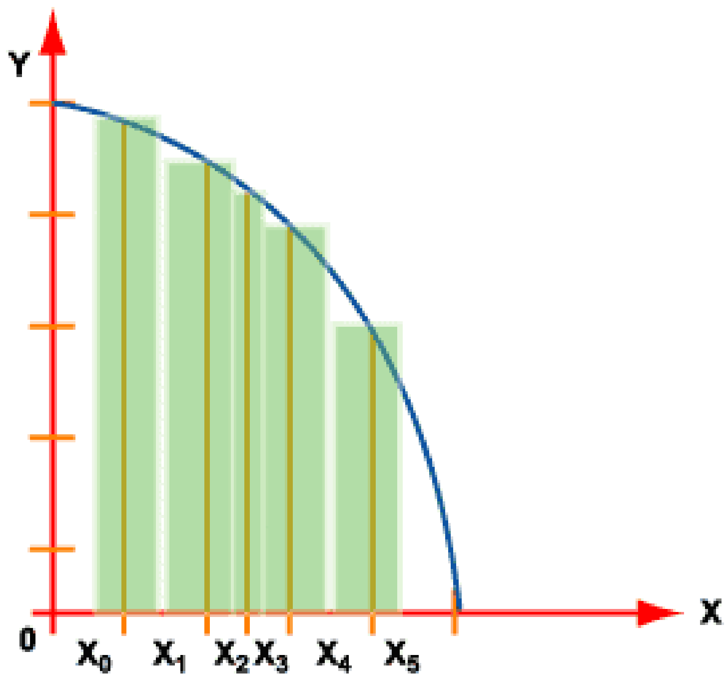
Dada $f(x) = 5 - \frac{x^2}{4}$, con $\frac{1}{4} \leq x \leq 3$, encuentre la suma de Reimann para la función f dada la partición

$x_0 = \frac{1}{4}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$, $x_4 = 2.25$, $x_5 = 3$

los puntos elegidos en cada celda son:

$\varepsilon_1 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 1.25$, $\varepsilon_3 = 1.75$, $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_5 = 2.75$

La figura muestra la gráfica y los cinco rectángulos.



La suma de Reimann es:

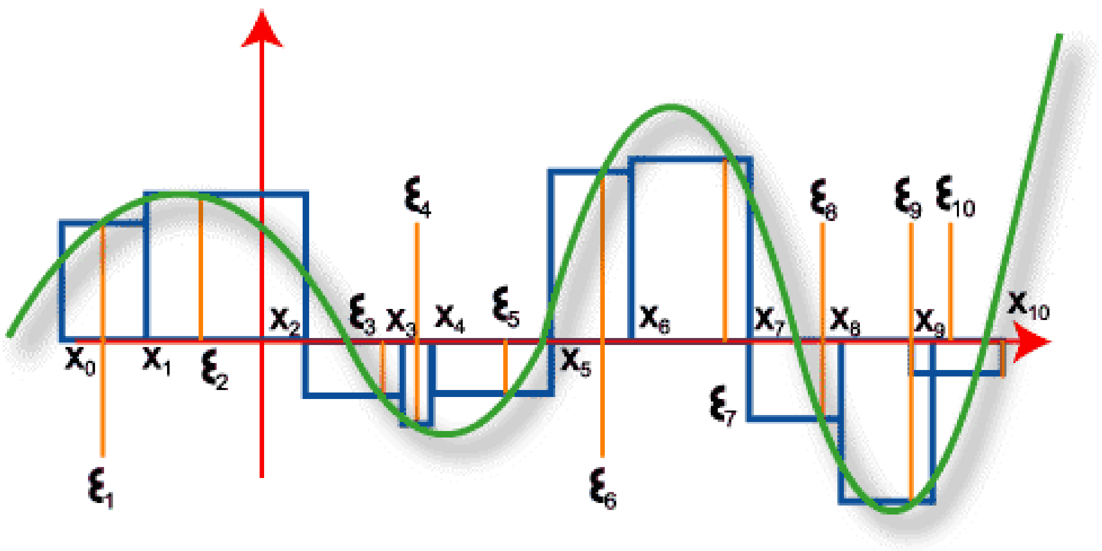
$$\sum_{i=1}^{5} f(\mathcal{E}_i)\Delta_i x = f(\mathcal{E}_1)\Delta_1 x + f_2(\mathcal{E}_2)\Delta_2 x + f(\mathcal{E}_3)\Delta_3 x + f(\mathcal{E}_4)\Delta_4 x + f(\mathcal{E}_5)\Delta_5 x$$

$=f(0.5)(1-0.25) + f(1.25)(1.5-1) + f(1.75)(1.75-1.5) + f(2)(2.25-1.75) + f(2.75)(3-2.25)$
$= (4.94)(0.75) + (4.61)(0.5) + (4.23)(0.25) + (4)(0.25) + (3.11)(0.75)$
$=11.40$

La norma $||\Delta||$ es la longitud de la celda mas larga. Por lo tanto: $||\Delta||= 0.75$

Como los valores de la función f(x) no se restringen a valores no negativos, algunos de los $f(\mathcal{E}_i)$ podrían ser negativos. En tal caso, la interpretación geométrica de la suma de Reimann sería:

"La suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje X, mas los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que están bajo el eje X"



La suma de Reimann es

$$\sum_{i=1}^{10} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = A_1+A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6+A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

ya que = f(ε_3), f(ε_4), f(ε_5), f(ε_8), f(ε_9), f(ε_{10}) son números negativos.

Integral definida

Si f es una función definida en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integral definida de f de "a" a "b" denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

esta dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$

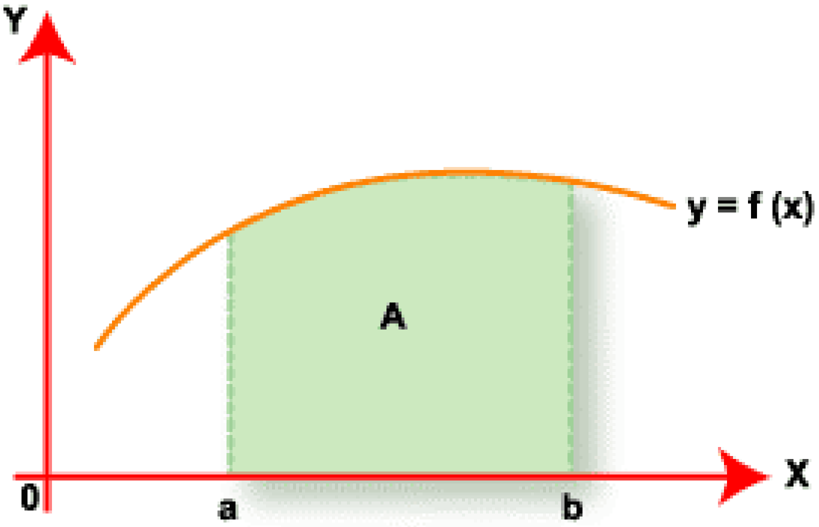
Si existe el límite.

En la notación anterior, f(x) se llama el integrando a y b son las extremas de integración; el valor a es el extremo inferior y el valor b es el extremo superior.

El símbolo $\int dx$ es el llamado signo de integración.

De esto se desprende que si el límite existe, representa el valor de área comprendida entre la curva, el eje de las abscisas, y las rectas x=a y x=b. Obviamente, como en el caso de la suma de Reimann, se debe considerar el signo de los valores f(ε_i) ya que en algunos casos se puede tener áreas negativas, cuando la gráfica se encuentra bajo del eje X.

A = $\int_a^b f(x)dx$



Ejemplo:

Encontrar el valor de la integral definida $\int_1^3 x^2 dx$

Solución:

La partición elegida será una partición regular de intervalo cerrado [1, 3]. Se subdividirá en "n" celdas iguales, por lo tanto Δx = $\frac{2}{n}$.

Si se elige ε_1 como el punto extremo derecho de cada celda se tiene:

$\varepsilon_1 = 1 + \frac{2}{n}$, $\varepsilon_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$, $\varepsilon_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right)$, ... $\varepsilon_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)$, ... , $\varepsilon_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$

Como f(x) = x^2

$$f(\varepsilon_i) = \left[1 + \frac{2_i}{n}\right]^2 = \left[\frac{n+2_i}{n}\right]^2$$

la norma de la partición vale
$|| \Delta || = \Delta x = \frac{2}{n}$

Si $|| \Delta || \to 0$ equivale a $n \to +\alpha$

por lo tanto, la integral definida buscada será:

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \to +\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2_i}{n} \right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\alpha} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4n_i + 4_i^{\ 2})$$

$$= \lim_{n \to +\alpha} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right]$$

$$= \lim_{n \to +\alpha} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\alpha} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\alpha} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} \right]$$

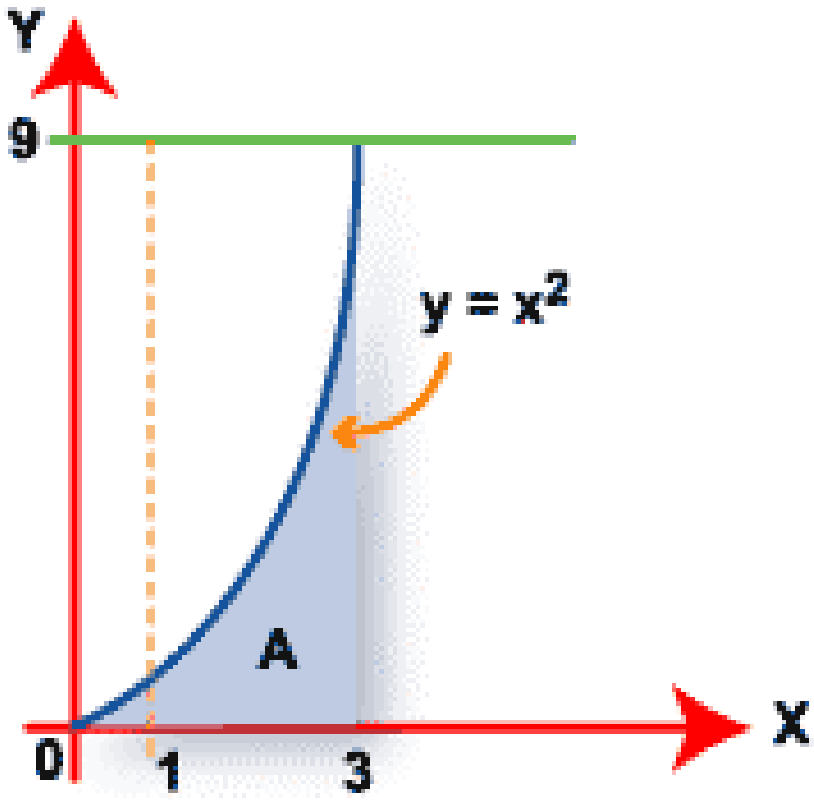
$$= \lim_{n \to +\alpha} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right]$$

$= 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0$

$= \frac{26}{3}$

Como $x^2 \geq 0$ para $x \in [1, 3]$, la interpretación geométrica del resultado anterior será igual a la siguiente:

"La región acotada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 1$, $x = 3$, tienen un área de $\frac{26}{3}$ unidades de longitud al cuadrado.



En todo el razonamiento anterior se ha supuesto que a < b

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

para cualquier partición, Δ_i x vale cero si a = b.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx$$ (contracción del intervalo)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$ (traslación del intervalo)

Interpretación geométrica de la integral.

Se puede partir de la siguiente suma de Reimann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$$

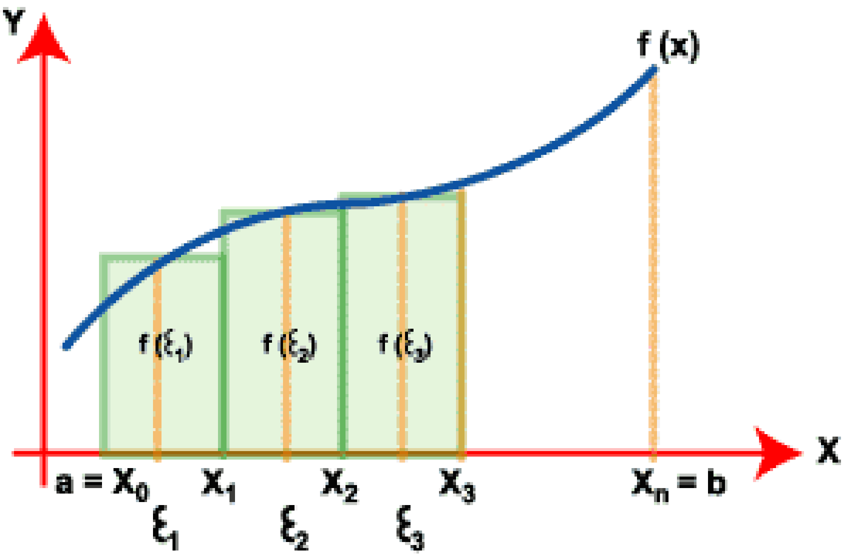
en donde se ha escogido ε_i tal que:

$x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$ i = 1, 2, ... ,n

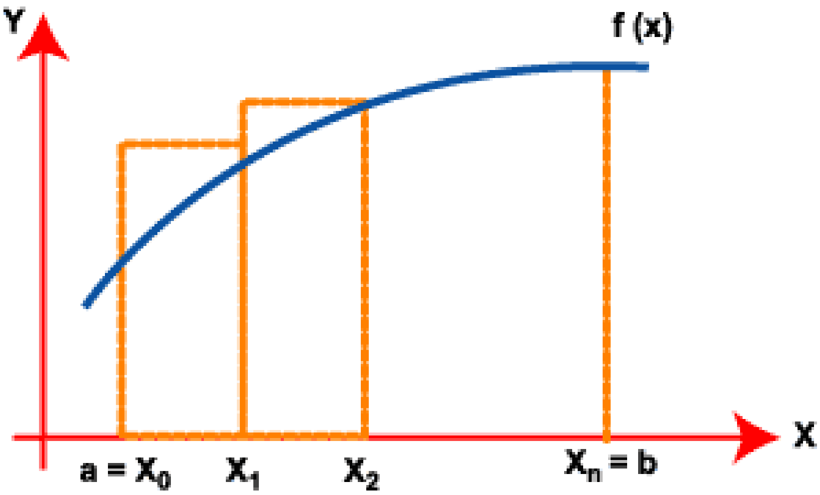
En la figura se nota claramente que el límite cuando $||\Delta x|| \to 0$ en la sumatoria da como resultado el área bajo la curva, sobre el eje X y entre las rectas x = a, x = b.

Es decir:

$$\lim_{||\Delta x|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)dx$$



Por otro se puede manejar la suma superior y la suma inferior expresada por las siguientes sumas de Reimann e ilustradas en las siguientes figuras:



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_1)(x_1-x_0) + f(x_2)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n-x_{n-1})$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_1) = f(x_0)(x_1-x_0) - f(x_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

Se observa que ambas sumatorias, al tender a cero la norma de la partición, tiene un límite común que es el área bajo la curva. Por lo que:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades de la integral definida

Hipótesis

Y = f(x) es integrable en el intervalo [a, b] y k es una constante cualquiera.

Tesis

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Hipótesis.
Las funciones f y g son integrables en [a, b]

Tesis:
La función f + g es integrable en [a, b] y:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Hipótesis.
y = f(x) es integrable en los intervalos [a, b], [a, c] y [c, b]

Tesis.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{(a < c < b)}$$

Hipótesis
y = f(x) es integrable en el intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c.

Tesis.

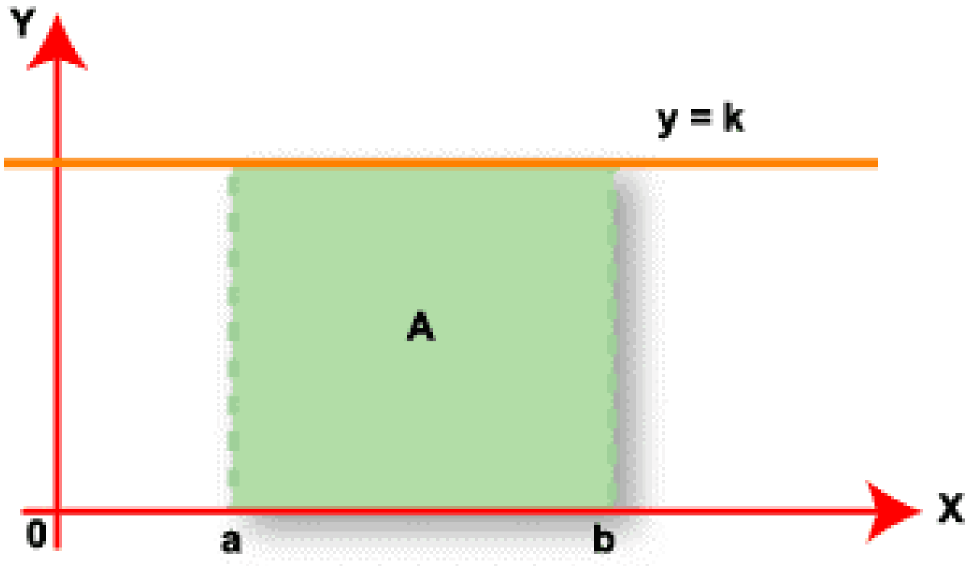
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

sin importar el orden de a, b y c.

Hipótesis
y = f(x) es una función tal que f(x) = k en donde k es una constante cualquiera.

0

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = k(b-a)$$



Hipótesis.

1) y=f(x) , y=g(x) son dos funciones integrables en [a, b]
2) $f(x) \geq g(x) \ \forall \ x \in [a, b]$

Tesis.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

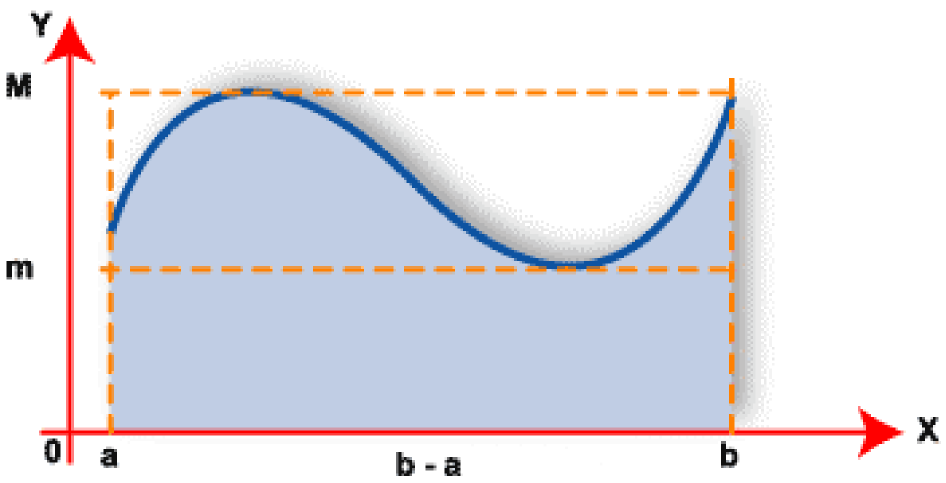
Teorema:

y=f(x) es continua en [a,b], M y m son el máximo y el mínimo absoluto respectivamente, de la función f en [a, b]; o sea:

$m \leq f(x) \leq M \ \forall \ x \in [a, b]$

Tesis.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



Hipótesis

y=f(x) es continua en [a, b], m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m, M es el máximo absoluto que ocurre en x_M.

Es decir

$f(x_m) = m \quad a \leq x_m \leq b$

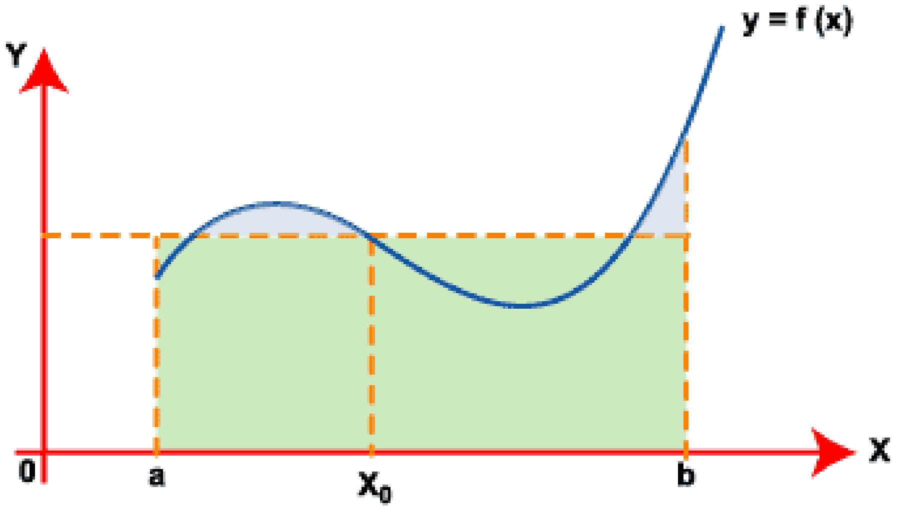
$f(x_M) = M \quad a \leq x_M \leq b$

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall \ x \in [a, b]$

Tesis
Existe un número $x_m \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a);$$

$a \leq x_0 \leq b$
$m \leq f(x_0) \leq M$



La antiderivada

Definición.
Una función F será antiderivada de otra función f en el mismo intervalo [a, b], si F′(x) = f(x) para todo valor x en un intervalo.

Ejemplo:
Sea $F(x) = x^2 + 2$; entonces $F'(x) = 2x$.
Por la definición anterior, si f(x) = F′(x) se tiene que f(x) = 2x. Se observa que f(x) es la derivada de F(x) y por lo tanto F(x) será la antiderivada de f(x).

Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son antiderivadas de f(x), sólo difieren en una constante aditiva.

Hipótesis.
y=f(x) es una función tal que f′(x) = 0, para todo valor de x de un intervalo [a, b].

Tesis.
y= f(x) es una función constante para todo valor de x en [a, b].

Hipótesis.
f y g son dos funciones para las cuales $f'(x) = g'(x) \ \forall \ x \in [a, b]$

Tesis.
Existe una constante C tal que

$f(x) = g(x) + C \ \forall \ x \in [a, b]$

Hipótesis
La función f(x) tiene una antiderivada particular en [a, b] que es F(x).

Tesis.
La antiderivada general de f(x) es: F(x) + C

Donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de f(x) se obtienen dándole un valor particular a C.

A continuación se presentan las fórmulas de integración más elementales, ya que existen una gran cantidad de ellas; basta mencionar que hay libros que contienen solamente formulas de integración.

Formulas básicas

$$\int du = u + c$$

$$\int a\,du = au + c$$

$$\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Formas que contienen funciones trigonométricas

$\int$ sen u d u = -cos u+c

$\int$ cos u d u = sen u+c

$\int$ tan u d u = |n| sec u | + c

$\int$ cot u d u = |n| sen u | + c

$\int$ sec u d u = |n| sec u + tan u | + c

= $|\,n\,|\tan\left(\frac{1}{4}\Pi+\frac{1}{2}u\right)+c$

$\int$ csc u d u = |n| csc u - cot u | + c

= |n| tan $\frac{1}{2}$ u | + c

$\int$ $\sec^2$ u d u = tan u+c

$\int$ $\csc^2$ u d u = -cot u+c

$\int$ sec u tan u d u = sec u+c

$\int$ csc u cot u d u = - csc u+c

Formas que contienen funciones trigonométricas inversas.

$\int$ sen^{-1} u d u = u sen^{-1} u + $\sqrt{1-u^2}$ + c

$\int$ cos^{-1} u d u = u cos^{-1} u - $\sqrt{1-u^2}$ + c

$\int$ tan^{-1} u d u = u tan^{-1} u + |n $\sqrt{1+u^2}$ + c

$\int$ cot^{-1} u d u = u cot^{-1} u + |n- $\sqrt{1-u^2}$ + c

$\int$ sec^{-1} u d u = u sec^{-1} u - |n|u + $\sqrt{1-u^2}$ + c
= u sec^{-1} u - cosh^{-1} u + c

$\int$ csc^{-1} u d u = u csc $^{-1}$ u - |n|u + $\sqrt{1-u^2}$ + c
= u csc $^{-1}$ u - cosh^{-1} u + c

Formas que contiene funciones logarítmicas y exponenciales.

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$\int u\, e^u \, du = e^u (u - 1) + c$$

$$\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du$$

$$\int u^n a^u \, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + c$$

$$\int \frac{e^u du}{u^n} = \frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u du}{u^{n-1}}$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + c$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n + 1) \ln u - 1] + c$$

Formas que contienen funciones hiperbólicas

$$\int \text{sen h u d u} = \text{cos h u} + c$$

$$\int \text{cos h u d u} = \text{sen h u} + c$$

$$\int \text{tan h u d u} = \ln [\text{cos h u}] + c$$

$$\int \text{cot h u d u} = \ln [\text{sen h u}] + c$$

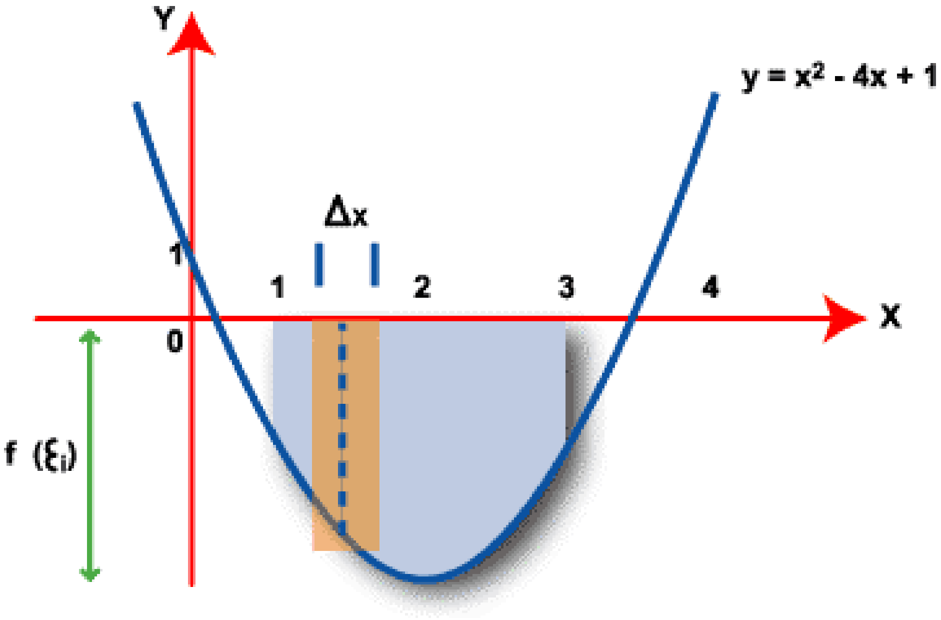
$$\int \text{sec h u d u} = \tan^{-1} (\text{sen h u}) + c$$

$$\int \text{csc h u d u} = \ln [\text{tan h } \frac{1}{2} \text{ u}] + c$$

Aplicaciones de la integral definida

Cálculo de áreas

Ejemplo: Obtener el área de la región comprendida entre la curva $y= x^2 – 4x + 1$ el eje x y las rectas x = 1 y x = 3



Si en el intervalo [1, 3] se considera una partición con celdas de igual amplitud $\Delta_i x$ = $||\Delta||$, y como $f(x) = x^2 – 4x + 1 < 0$ en [1, 3], cada rectángulo de la interpretación geométrica tiene de base $\Delta_i x$ y de altura $–f(\varepsilon_i) = -(\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_i +1) = -\varepsilon_i + 4\varepsilon_i -1$, luego la suma de las medidas de las áreas de los "n" rectángulos correspondientes a la partición que se tome es:

$$\sum_{i=1}^{n} (-\varepsilon_i^2 + 4\varepsilon_i -1)\ \Delta_i x$$

Por lo tanto, el área de A deseada esta dada por:

$$A = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (-\varepsilon_i^2 - 4\varepsilon_i -1) = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 1)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - x \Big]_1^3 = \frac{16}{3}$$

Por tanto:

$A = \frac{16}{3}u^2$; (u^2 = unidades cuadradas)

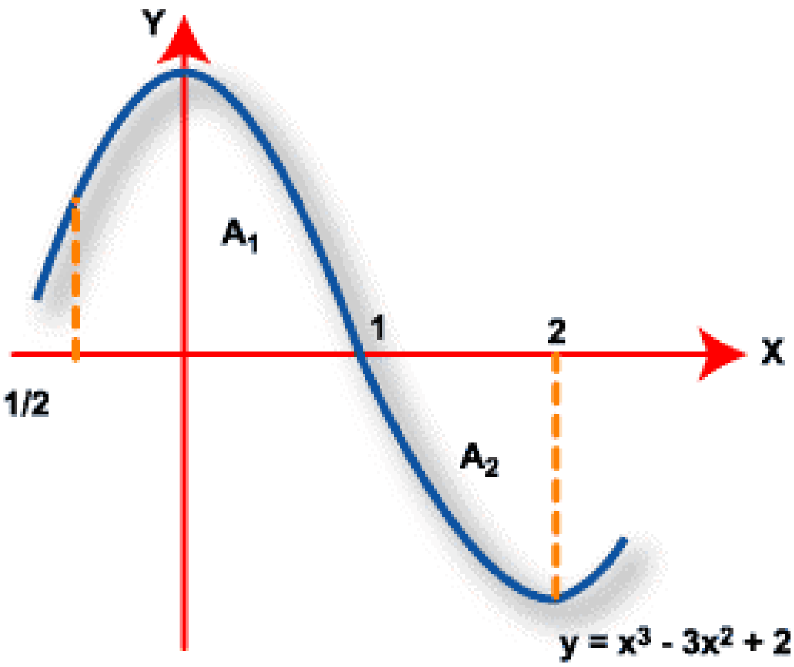
Ejemplo:

Encontrar el área de la región comprendida entre la curva de la ecuación y= $x^3 - 3x^2 + 2$ el eje x y las rectas x = $-\frac{1}{2}$ y x = 2

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f(x) \geq 0$ en $[-\frac{1}{2}, 1]$

$f(x) \leq 0$ en $[1, 2]$



A_1 Número de unidades cuadradas en el intervalo $[-\frac{1}{2}, 1]$.

A_2 Número de unidades cuadradas en el intervalo [1, 2]

$A_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)dx$

$A_2 = -\int_{1}^{2} f(x)dx = -\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2)dx$

$A_1 + A_2$ Números de unidades cuadradas del área de la región total.

$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)dx = -\int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2)dx$

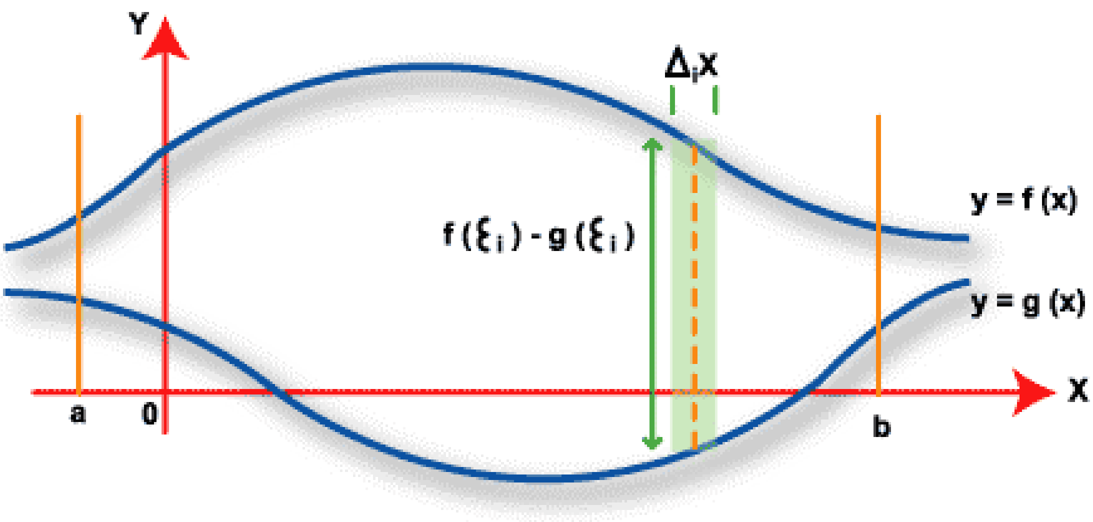
$A = \left. \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_{-\frac{1}{2}}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_{1}^{2}$

$A = \frac{135}{64} + \frac{5}{64} = \frac{215}{64}$

$A = \frac{215}{64} u^2$

Área de la región comprendida entre dos curvas

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado [a, b] tales que f(x) ≥ g(x) para toda x en [a, b]. Se trara de obtener el área de la región comprendida entre las curvas y = f(x) y g = g(x) y las rectas x=a y x=b.



Si se toma una partición de n celdas con norma $||\Delta|| = \Delta_i x$ en el intervalo [a, b] y en cada celda se escoge un punto $\mathcal{E}_i$. Se puede considerar en cada celda un rectángulo de base $\Delta_i x$ y altura $f(\mathcal{E}_i) - g(\mathcal{E}_i)$

La suma de Reimann será:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\mathcal{E}_i) - g(\mathcal{E}_i)]\, \Delta_i x$$

Como f y g son continuas en [a, b], [f, g] también es una función continua en el mismo intervalo. El límite anterior es igual a la integral definida

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Ejemplo:

Encontrar el área de la región comprendida entre la curva $y= 6x - x^2$ y la recta $y=x$

Es necesario determinar los puntos de intersección de la curva y la recta para conocer el intervalo en el que se encuentra la región.

$y= 6x - x^2$ . . . . . (por igualación)
$x=6x - x^2$
$(6x- x^2)-x=0$
$x^2 - 5x = 0$
$x (x-5) = 0$

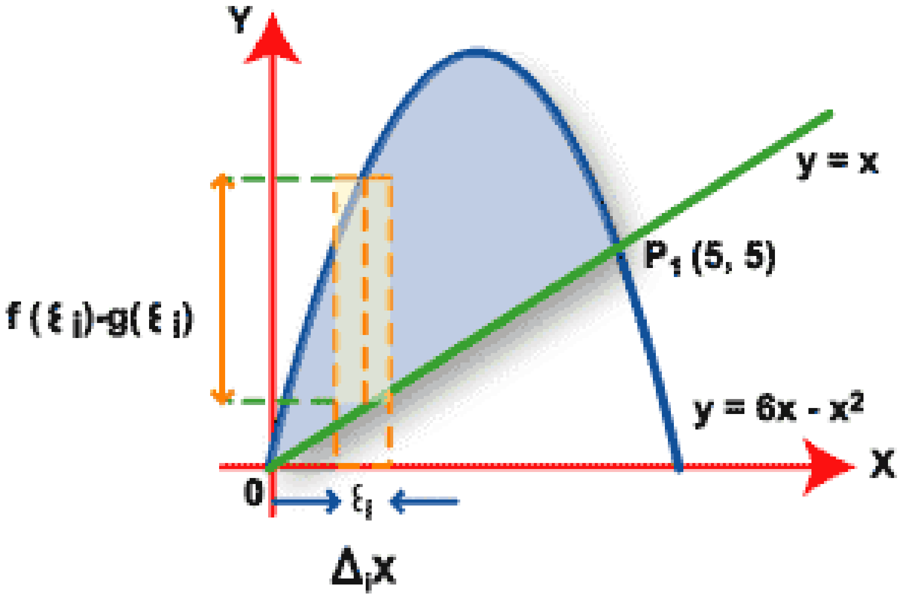
por tanto

$x_1 = 0$; $x_2 = 5$

para los cuales

$y_1 = 0; \quad y_2 = 5$

los puntos de intersección son O(0,0) y $P_1 = (5,5)$



$f(x) = 6x - x^2$ $\quad a = 0$
$g(x) = x$ $\quad b = 5$

$[a, b] = [0, 5]$

El área buscada esta dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^5 (6x - x^2 - x)dx$$

$$= \int_0^5 (5x - x^2)dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^5$$

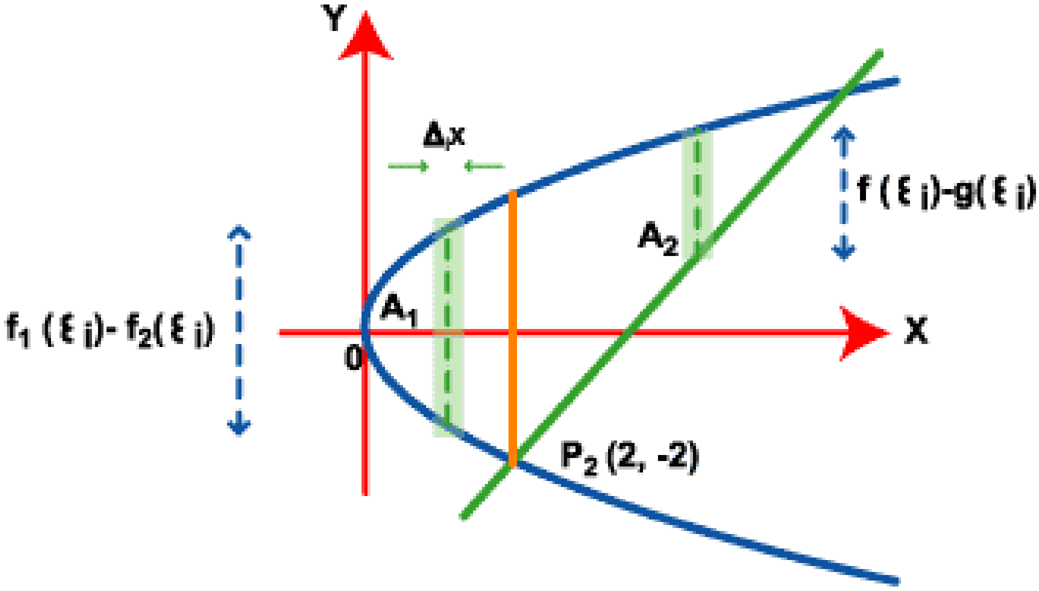
$$= \frac{125}{2} - \frac{125}{3}$$

$$= \frac{125}{6}$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x - y = 4$

Resolviendo como simultaneas se tiene P_1 (2, -2) y P_2 (8,4)



Es necesario descomponer la región en dos partes: la comprendida en [0, 2] y la que se ubica en [2, 8], ya que la curva que limita a la región inferior no es la misma en este intervalo.

A_1 Área de la región en [0, 2]
A_2 Área de la región en [2, 8]

$A = A_1 + A_2$

Calculo de A_i

$y^2 = 2x$
$y = \sqrt{2x}$ Parte de la parábola arriba de x
$y = - \sqrt{2x}$ Parte de la parábola debajo de x
se hace
$f_1(x) = \sqrt{2x}$
$f_2(x) = - \sqrt{2x}$

$$A_1 = \int_0^2 [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

$$= \int_0^2 (\sqrt{2x} + \sqrt{2x})dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{2x} + 2dx$$

$$= \frac{2}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$A_1 = \frac{16}{3}u^2$

Calculo de A_2

$y(x) = x - 4$

$A_2 = \int_2^8 [f_1(x) - g(x)]dx$

$$= \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - (x-4)\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-4)^2\Big]_2^8$$

$$= \frac{64}{3} - 8 - \left(\frac{8}{3} - 2\right)$$

$$= \frac{38}{3}$$

$$= \frac{38}{3}u^2$$

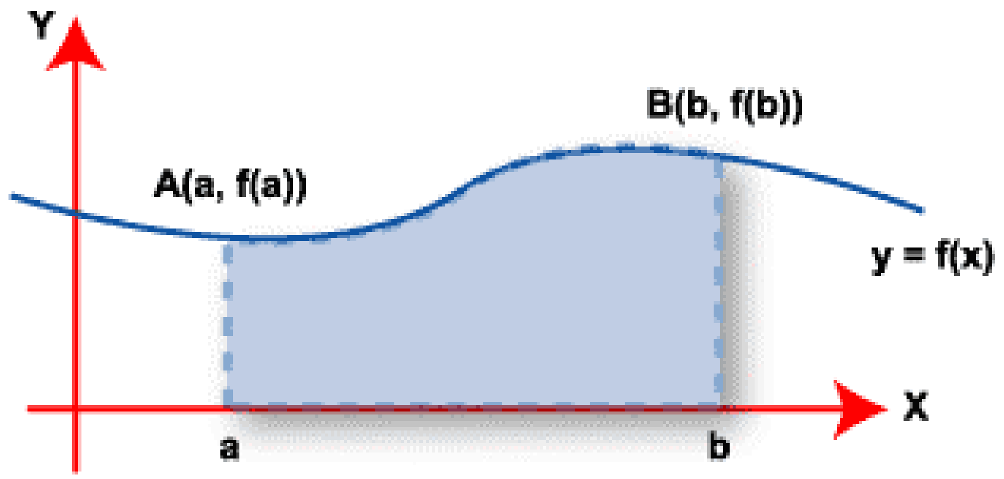
tal que:

$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = \frac{54}{3} = 18$

$A = 18u^2$

Longitud de arco de una curva plana.

Sea f una función continua en el intervalo [a, b]



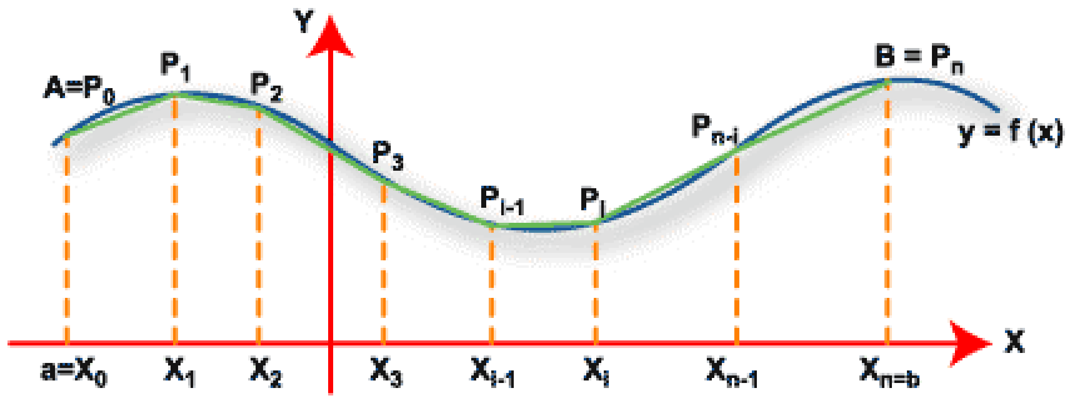
La porción de la curva de A(a, f(a)) y el punto B=(b, f(b)) se llama arco.

Tómese en [a, b] una partición de n celdas por medio de los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, = b$, siendo $|| \Delta ||$ la norma de la red.

$\Delta_i x = x_i - = x_{i-1} \leq ||\Delta||$ (amplitud de la i – esima celda

Al trazar sobre la curva los puntos de abcisas $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, se obtienen:

$A = P_0 (x_0, y_{0)} , P_1 (x_1, y_{1)}. \ldots\ldots B = P_n (x_n, y_n)$



Se traza la poligonal definida por los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots P_{i-1}, P_i \ldots\ldots, P_{n-1}, P_n$. La longitud de esta poligonal es la suma de las longitudes de sus componentes:

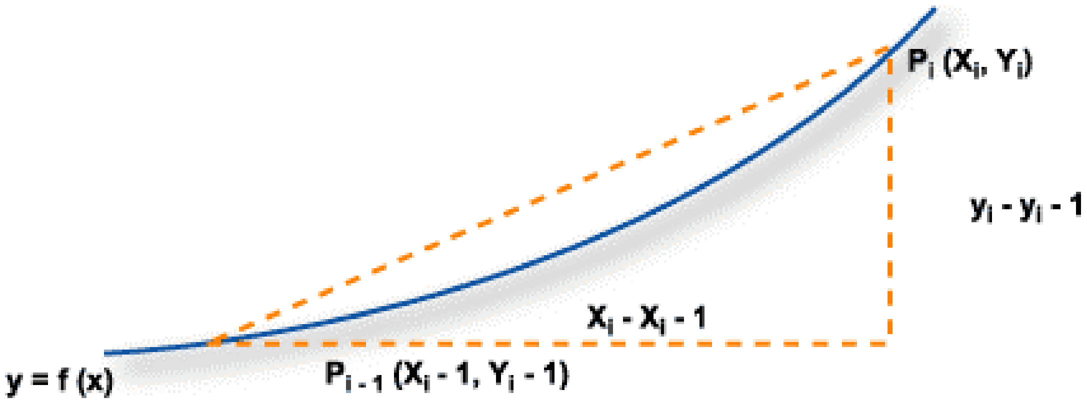
$$| \overline{P_0 P_1} | + | \overline{P_1 P_2} | + \ldots + | \overline{P_{i-1} P_i} | + \ldots + | \overline{P_{n-i} P_n} |$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{|P_{i-1}P_i|}$$

El valor $\sum_{i=1}^{n} \overline{|P_{i-1}P_i|}$ será tanto más aproximado al valor de L mientras mayor sea n, es decir mientras menor sea $||\Delta||$.

Considérese una parte de la poligonal que incluye al componente.

$\overline{|P_{i-1}P_i|}$



$$\overline{|P_{i-1}P_1|} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i + y_{i-1})^2}$$

Si $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$

$y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$

$$\overline{|P_{i-1}P_i|} = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

$$\overline{|P_{i-1}P_i|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} \Delta_i x$$

Como f es continua en [a, b] entonces se cumple que para f en [x_{i-1} ,x_i] existe ε_i tal que

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$

como:

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta_i y$ y $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$

$\Delta_i y = f'(\varepsilon_i)\Delta_i x$

donde:

$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(\varepsilon_i)$ i $x_{i-1} < \varepsilon_i < x_i$

por tanto:

$$\overline{|P_{i-1}P_i|} = \sqrt{1+\left[f'(\varepsilon_i)\right]^2}\,\Delta_i x$$

para cada i de 1 hasta n existe un valor dado por la ecuación anterior, así que al sumar todos los valores puede escribirse:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{|P_{i-1}P_i|} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(\varepsilon_i)\right]^2}\,\Delta_i x$$

cuando $||\Delta||$ tiende a cero

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{|P_{i-1}P_i|} = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(\varepsilon_i)\right]^2}\,\Delta_i x$$

como $f'(x)$ es continua en [a, b] se puede escribir

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{|P_{i-1}P_i|} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Ejemplo:

Calcular la longitud de la circunferencia de radio r.

$x^2 + y^2 = r^2$ . . . . . . Ec. De la circunferencia con centro en el origen

$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . . . . Ec. Del arco de circunferencia en los cuadrantes uno y dos.

$f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ . . . . Ec. Del arco de circunferencia en los cuadrantes tres y cuatro.

Por la simetría de la circunferencia se puede calcular la cuarta parte de su longitud.

$$\tfrac{1}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \left[f_i(x)\right]^2\, dx}$$

$f_i(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

por lo tanto

$$\tfrac{1}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \left[f'_i(x)\right]^2\, dx}$$

$$= \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\, dx}$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}\, dx}$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \text{r arc sen } \left.\frac{x}{r}\right]_0^r$$

= r (arc sen 1 - arc sen 0)

$= \text{r } \frac{\Pi}{2}$

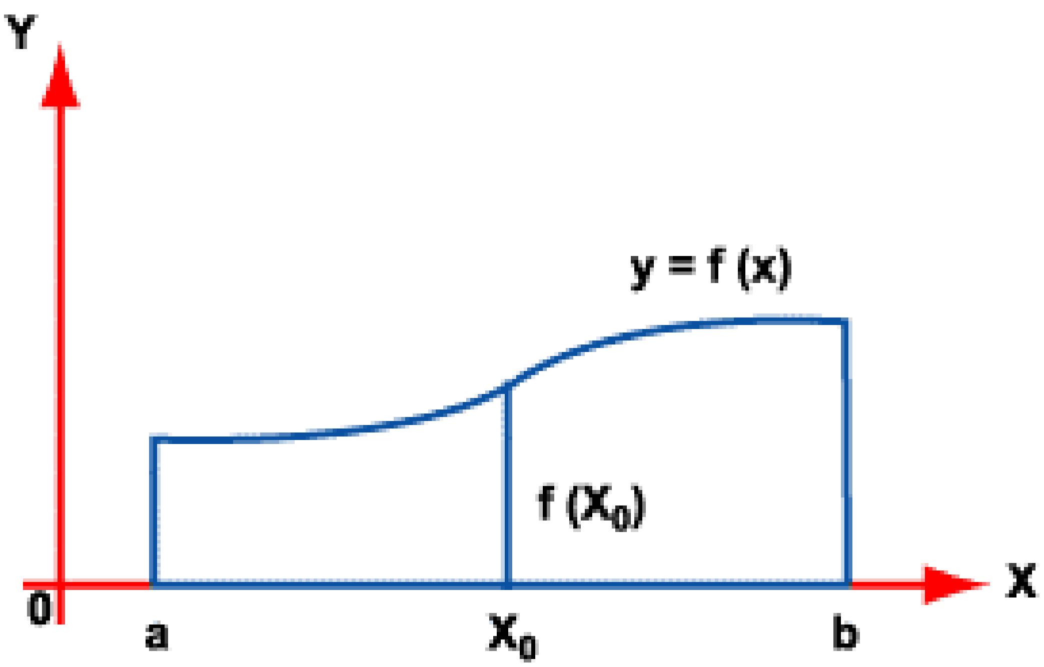
entonces

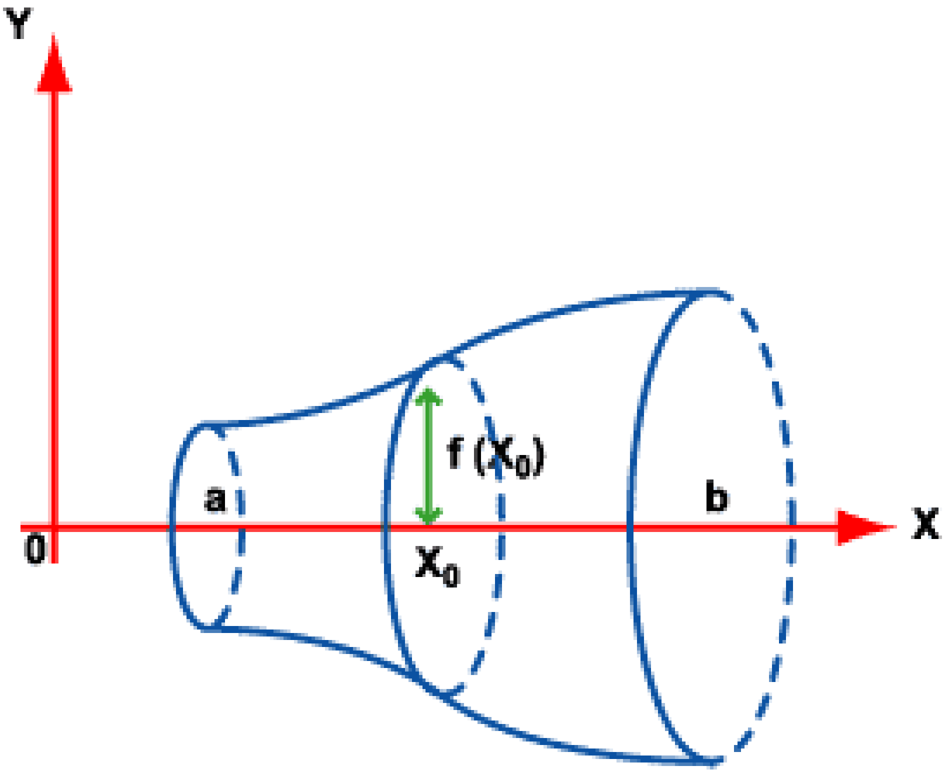
$\text{L}= 4(\text{r } \frac{\Pi}{2})$

$\text{L}= 2\Pi\text{r}$

Volúmenes de sólidos de revolución.

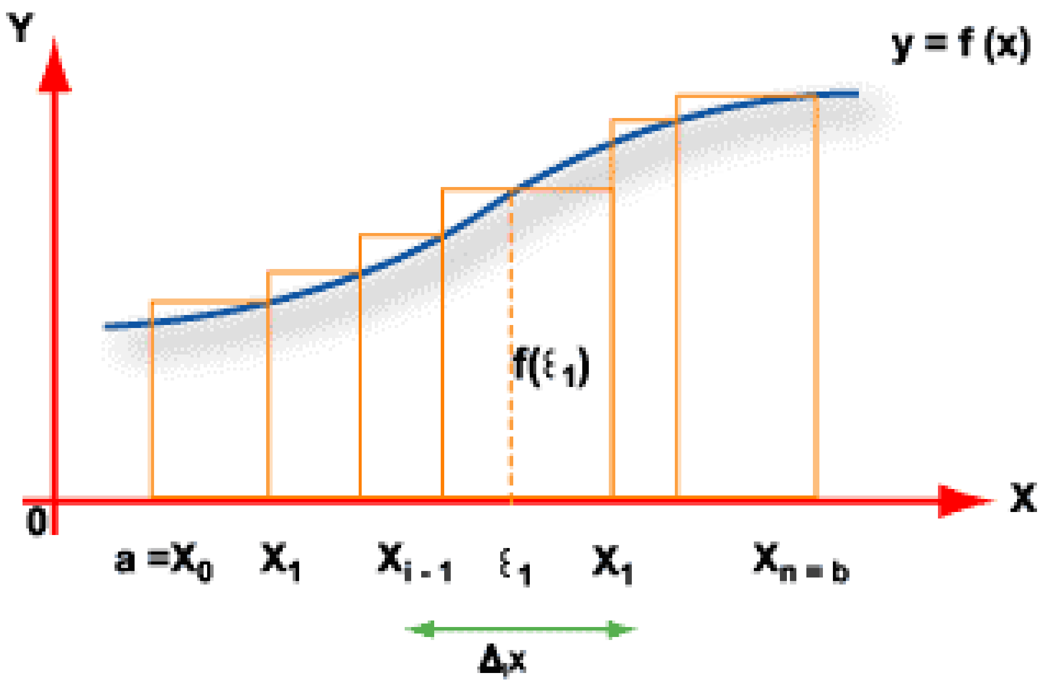
Si se tiene la región limitada por la gráfica de una función positiva f, el eje de las abcisas y las rectas x=a y x=b y se gira en la región alrededor de x se genera un "sólido de revolución".



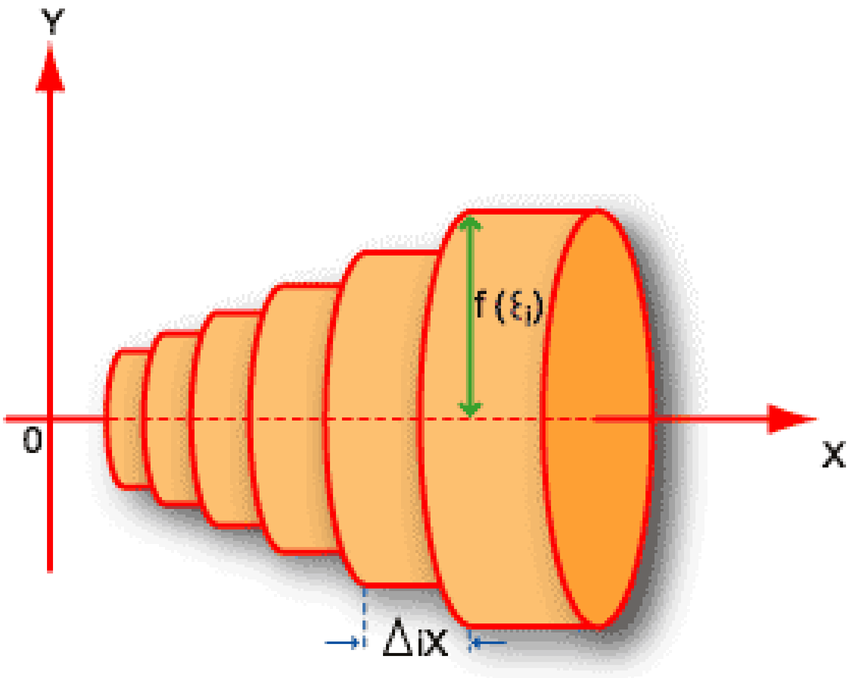


Supóngase que se tiene una función f. Si se considera una partición en el intervalo [a, b], la suma de Reimann da una aproximación del área bajo la curva y será:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\Delta_i x_i \quad ; \quad \varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$$



El sólido por estos rectángulos al girar alrededor del eje x esta formado por cilindros cuya altura es $\Delta_i x$ y cuyos radios son iguales a f(ε_i).



El volumen de cada cilindro estará dado por:

$$v_i = \Pi[f(\varepsilon_i)]^2 \Delta_i x$$

si $||\Delta||$ tiende a cero, entonces n tiende a infinito.

Definición.

Sea una función f continua en el intervalo [a, b], entonces el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica f, las rectas x=a , x=b y el eje x está dado por:

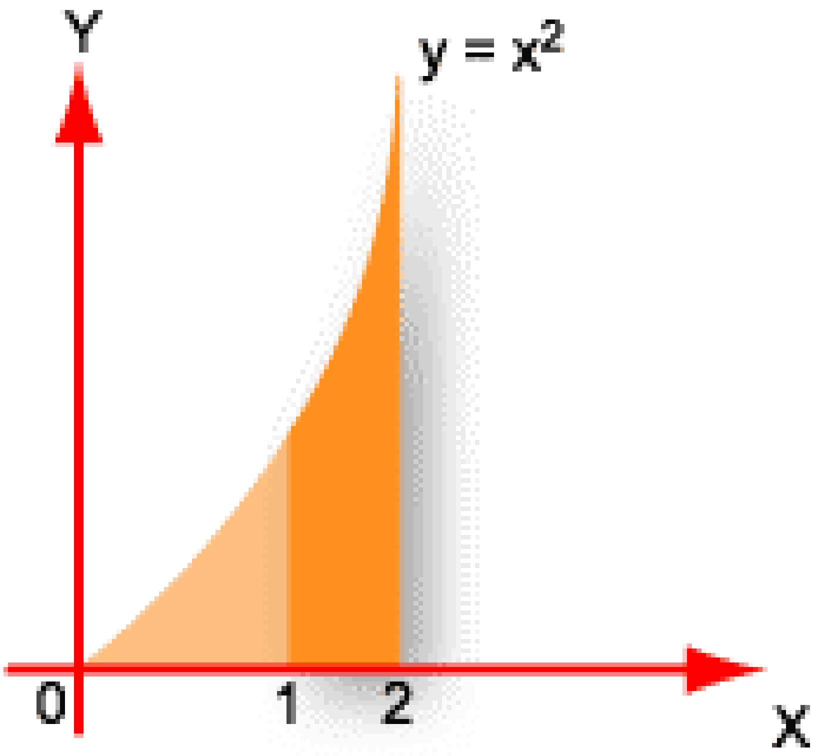
$$v = \lim_{n \to \alpha} \sum_{i=1}^{n} \Pi[f(\varepsilon_i)]^2 \Delta_i x$$

$$= \int_a^b \Pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

n = número de subintevalos de la partición

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por $y = x^2$, x = 1, x = 2 y el eje x



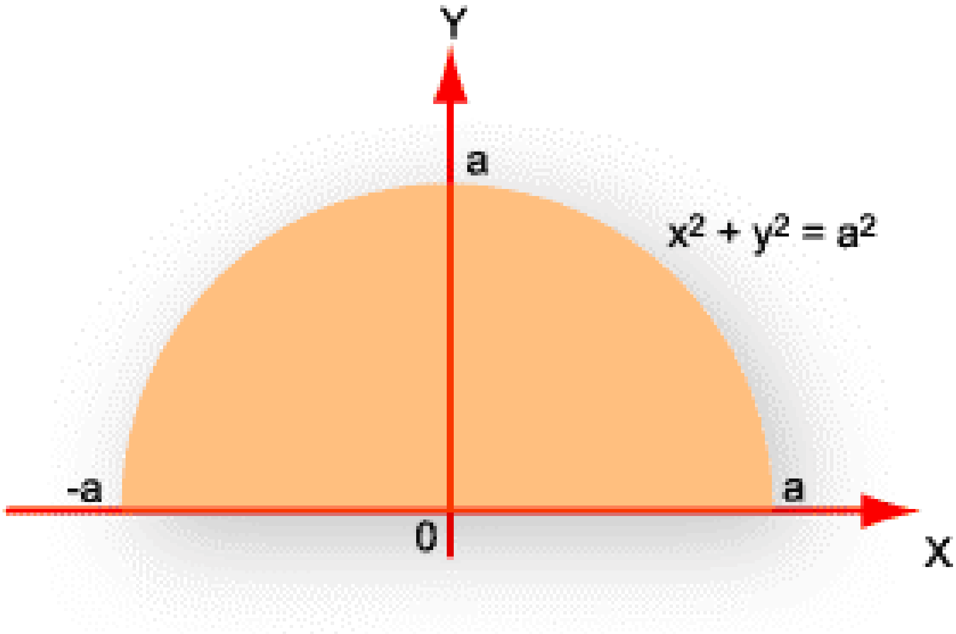
$$v = \Pi \int_1^2 y^2 \, dx = \Pi \int_1^2 x^4 \, dx$$

$$v = \left. \frac{\Pi x^5}{5} \right]_1^2$$

$$v = \frac{31\Pi}{5} u^3$$

Ejemplo:

Encontrar el volumen de una esfera con centro en el origen y radio "a".



$y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$v = \Pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx$

$v = \Pi \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big]_{-a}^{a}$

$v = \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 + a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) \Pi$

$v = \frac{4\Pi}{3} a^3$