CONJUNTOS Y SISTEMAS NUMÉRICOS

1. CONJUNTOS.

1.1 Conceptos básicos

Medir y ***contar*** fueron las primeras actividades ***matemáticas*** del hombre y ambas nos conducen a los ***números***. Haciendo marcas, medían el tiempo y el conteo de bienes que poseían, así surgió la ***aritmética*** y fue hacía fines del siglo **XIX** cuando **George Cantor** creó la teoría de los ***conjuntos***, pero fue cerca de los años veinte del siglo **XX** que **Gottob frege** hizo el desarrollo del enfoque ***moderno de la matemática*** y después **Bertrand Russell** completó y desarrolló las aplicaciones de esta teoría.

La idea de ***conjunto***, es en sí intuitiva y muy antigua. Desde sus orígenes la sociedad humana ha tenido la idea de ***agrupaciones*** o ***conjuntos***: la ***familia***, los ***clanes***, las ***tribus*** fueron los primeros ***conjuntos***.

Todos estamos acostumbrados a tratar con ***conjuntos***; escribimos usando ***conjuntos*** de ***letras***, efectuamos operaciones de ***conteo*** y usando un ***conjunto*** de ***números***, etc.

> **Podemos considerar un *conjunto* como la *colección de objetos* o cosas que tienen una o mas *propiedades* en *común*. Los *objetos* que forman un *conjunto* se les llama *elementos del conjunto*.**

Generalmente los ***conjuntos*** se representan por ***letras mayúsculas*** y las ***minúsculas*** para sus ***elementos***.

Un factor importante para la comprensión de cualquier texto es la correcta interpretación de los ***símbolos***; por tal razón se ofrece la lista de estos enseguida y su significado.

1.2 Simbología.

Símbolo	**Significado**
A, **B**, **C**,	Indican ***conjuntos***.
a, **b**, **c**	Indican ***elementos***.
Î	***Pertenece a***....; **es elemento de** ....; ***está en***....
Ï	***No pertenece a***....; **no es elemento de** ....; ***no está en*** ...
{…}	***Conjunto***.
=	***Es igual a***; **igual que**.
½	**Tal que**, ***dado que***.
¼	***Así sucesivamente***.
U W	**Conjunto universal**.
Æ = { }	***Conjunto vacío***.
¹	**Diferente de**; ***es distinto a***; **no es igual a**.
Ì	**Subconjunto propio de**; ***es subconjunto de..***
Ë	***No es subconjunto propio de..***
Í	**Subconjunto impropio**, ***subconjunto*** de.
Ë	***No es subconjunto de***...
>	**Mayor que**.
<	***Es menor que***.

Ý	No es mayor que.
Û	*No es menor que.*
³	**Es mayor que o igual que.**
£	*Es menor o igual que.*
∪	**Unión** con.
∩	***Intersección*** con.
´	**Complemento** de.
®	***Implifica que***.....; **entonces**...
«	**Si y solo si**....; ***doble implicación***, **equivalente a**.
º	*Identico*.
\	**Por lo tanto**.
}	***Condicional***.
$	**Existe**.
ò	***No existe***.
"	**Para todo**.
h (A)	***Cardinalidad del conjunto*** **A**.

Un ***conjunto*** se puede expresar de **dos** formas:

a) Por ***extensión*** o forma ***implícita***.

b) Por ***comprensión*** o forma ***explícita***.

Ejemplos:

a) Por ***extensión***: **A : {a, e, i, o, u}**

Los ***elementos*** que contiene el ***conjunto*** **A** están ***explícitamente*** escritos, es decir, que todos los ***elementos*** aparecen entre el signo de agrupación **{ }**.

b) Por ***comprensión***: **B = {x * x + 3 = 5 }**

Como se puede ver, se da una ***condición*** para que podamos encontrar los ***elementos*** que pertenecen al ***conjunto***.

Ejercicios:

1) Por ***extensión***. **A = {MERCURIO, VENUS, TIERRA, MARTE}**

2) Por ***extensión***. **b = {z - c = 3000, z = 10}; c = - 2990**

3) Dado el ***conjunto*** de ***números pares positivos menores*** que ***11*** expresados en:

a) ***Extensión***: **A = {2, 4, 6, 8, 10}**

b) ***Comprensión***: **b = {x* x** es un ***número par*** **< 11}**

1.3 Concepto de pertenencia.

El concepto principal de la ***teoría de conjuntos*** es la ***pertenencia***, supongamos que **A** es un ***conjunto*** y que **x** es ***elemento*** de **A**, podemos expresarlo como:

x Î A

Si escribimos, **y Î A**, significa que ***y no pertenece*** o ***no es elemento*** de **A**.

Ejemplos:

1) **a Î V**; donde **V** es el ***conjunto*** de las ***vocales***.

2) **4 Î N**; donde **N** es el ***conjunto*** de los ***números reales***.

3) **9 Î P**; donde **P** es el ***conjunto*** de los ***números primos***.

1.4 Cardinalidad.

El ***número de elementos*** contenidos en un ***conjunto*** determina la ***cardinalidad*** del ***conjunto***.

En: **V = {a, e, i, o, u}**. Su ***cardinalidad*** será **5**, y la expresión **h(V) = 5**, se lee ***cardinalidad*** de **V** igual a ***5***.

En: **P = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**. La ***cardinalidad*** será **6** y se expresa como: **h(P) = 6**

1.5 Conjuntos equivalentes.

Si dos ***conjuntos*** poseen la misma ***cardinalidad***, se dice que son ***conjuntos equivalentes***, ya que tienen el mismo ***número*** de ***elementos*** y se puede establecer entre ambos una ***correspondencia*** de ***uno a uno***, así los ***conjuntos***:

A = {verde, azul, rojo} y **B = {5, 4, 3 }**

Son ***equivalentes***, ya que se puede establecer la ***correspondencia biunivoca***, es decir:

{verde, azul, rojo}
{ 5 , 4 , 3 }

1.6 Igualdad de los conjuntos.

Dos ***conjuntos*** son ***iguales*** **si y solo si** tienen los ***mismos elementos***, no importando el ***orden***, ni el número de ***elementos***.

1) Sean: **A = {a, b, c, d}** y **B = {d, c, b, a}**

ˆ **A = B**; por tener los ***mismos elementos***.

2) Sean: **C = {a, b, c, d}** y **D = {a, a, b, c, d, d, c, b}**
ˆ **C = D**; por tener los ***mismos elementos***, no importando que se repitan.

Tenemos las siguientes ***clases de conjuntos***:

a) *Conjunto unitario*. Es aquel que está formado por un solo ***elemento***.

A = {PERRO} **C = {a}** **B = {1}** **D = {x* x + 2 = 3}**

b) *Conjunto finito*. Es cuando los ***elementos*** de un ***conjunto*** pueden ***enlistarse*** del primero al ultimo.

A = {a, e, i, o, u} **B = {x* x** sea un **animal}**
C = {REPTILES} **D = {x* x^2 = 81}**

c) *Conjunto infinito*. Cuando ***no pueden enlistarse*** todos y cada uno de los ***elementos***.

A = {x * x es un número **natural}** **C = {1, 2, 3, 4, 5, ...100, 101, ...}**

B = {x* x 1 < x < 2} **D = {x* x** es una **estrella del universo}**

d) *Conjunto vacío*. Es aquel que ***carece*** de ***elementos***.

Æ = {x* x ¹ x}

Podemos decir que todo ***conjunto*** contiene al ***conjunto vacío***, es decir, que el ***conjunto vacío*** es el ***subconjunto*** de todos los ***conjuntos***.

A = {x* x + 1 = 0, x = - 1} **B = {Los hombres de cuatro ojos}**

x Ì Æ « x = Æ

e) *Subconjunto*. El ***conjunto*** **A** es un ***subconjunto*** de **B** si y sólo si, cada ***elemento*** de **A** es también ***elemento*** de **B**.

Si, **A = {a, b, c}** y **B = { a, b, c, d, e }** entonces **A Ì B**

Si, **C = {1, 2, 3}** y **D = {2, 4, 6, 8}** entonces **C Ë D**

f) *Conjunto universal*. Es aquel que contiene **todos** los ***elementos*** del tema de estudio, es decir todo ***conjunto*** es ***subconjunto*** del ***conjunto universal***.

Ejemplo: Tratándose de las ***letras***: **1 = {todas las letras del alfabeto}**

1.7 *Operaciones entre conjuntos.*

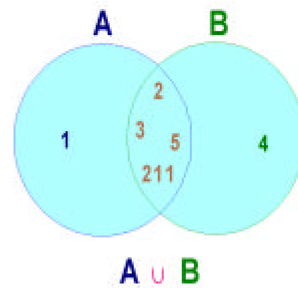
Los ***conjuntos*** se pueden combinar entre sí para obtener nuevas operaciones dentro de esas combinaciones, merecen destacarse, la ***unión*** y la ***intersección*** de ***conjuntos***.

Las ***operaciones*** con ***conjuntos*** se comportan de una manera muy semejante a las operaciones con ***números*** corrientes, a continuación se definen las principales ***operaciones***.

UNIÓN Si reunimos los ***elementos*** de un ***conjunto*** **A** con los ***elementos*** de otro ***conjunto*** **B**, obtendremos un tercer ***conjunto*** y la operación la llamaremos ***unión***. La ***unión*** de dos ***conjuntos*** **A** y **B** se define cono el ***conjunto*** ***compuesto por todos los elementos que están en A o B o en ambos***.

Se denota por **A È B.** Donde: **A È B = {x* x Î A o x Î B}**

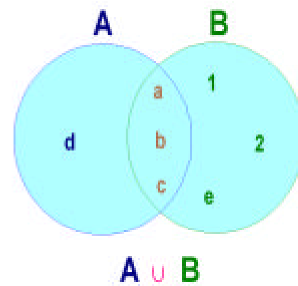
Ejemplos:



1) Sean: **A = {a, b, c, d}** y **B = {1, 2, a, c, b, e}**

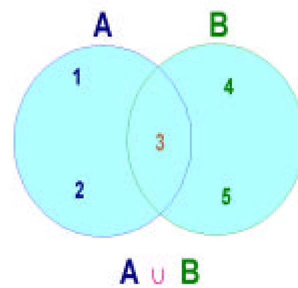
A È B = {a, b, c, d, e, 1, 2}

Lo que representado en el ***diagrama*** de **Vemnevler**, queda como:



2) Si **A = {1, 2, 3}** y **B = {3, 4, 5}**. Tenemos:

A È B = {1, 2, 3, 4, 5}



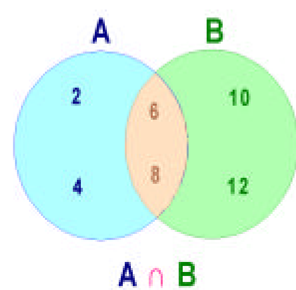
3) Si **A = {1, 2, 3, 211, 5}** y **B = {2, 3, 4, 211, 5}**

A È B = {1, 2, 3, 4, 5, 211}

INTERSECCIÓN Si en lugar de reunir los conjuntos **A** y **B** buscamos los ***elementos comunes a ambos***, estaremos efectuando la ***intersección*** de los ***conjuntos***. La ***intersección*** de dos ***conjuntos*** **A** y **B** se define como el ***conjunto*** que contiene a todos los ***elementos*** que ***pertenecen*** a **A** y también ***pertenecen*** a **B** y se denota por:

A Ç B = {x* x Î A y x Î B}

Ejemplos:



1) Si **A = {2, 4, 6, 8}** y **B = {6, 8, 10, 12}**

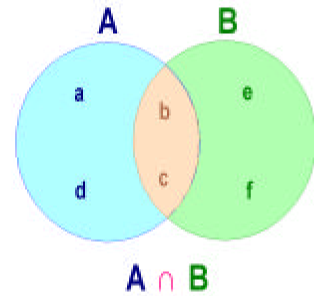
A Ç B = {6, 8}

Se adjunta el ***diagrama*** de **Venevler**.

2) **A = {a, b, c, d}** y **B = {c, b, e, f}**

A Ç B = {b, c}

Se adjunta el ***diagrama*** de **Venevler**.



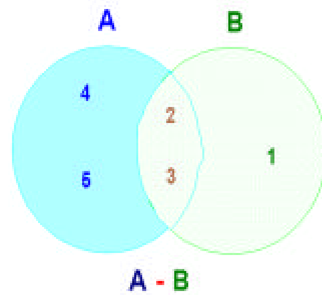
RESTA.

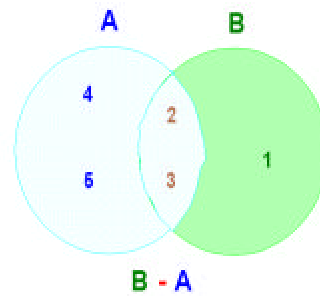
1) Sean, **A = {4, 5, 2, 3}** y **B = {1, 2, 3}**

A - B = {4, 5}

B - A = {1}

Se adjunta el diagrama de **Venevler**.



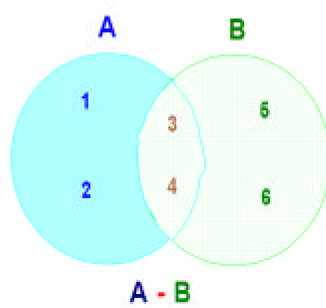


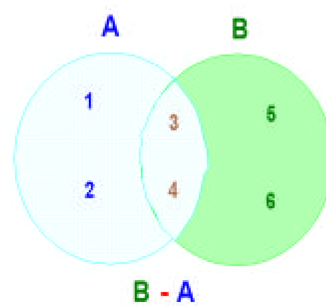
2) Sean, **A = {1, 2, 3, 4}** y **B = {3, 4, 5, 6}**

A - B = {1, 2}

B - A = {5, 6}

El ***diagrama*** de **Venevler** queda:





Cuando ***dos*** ***conjuntos*** no tienen ***elementos comunes***, se denomina ***conjuntos disjuntos***. Su ***intersección*** es el ***conjunto vacío***.

COMPLEMENTO DE CONJUNTO. Dado un ***conjunto*** **A** se define un nuevo ***conjunto*** llamado ***complemento de*** **A**, formado por todos los ***elementos*** del ***conjunto universal*** que no pertenecen al ***conjunto*** **A**. El ***complemento de*** **A**, se representa como : $A' = \overline{A}$.
En forma general tenemos:

A´ = {x* x Î U y x Ï A} = {x* x Ï A}

Ejemplo:

Si, **U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}** y **A = {1, 3, 5, 7, 8, 9, 0}**, se tiene:

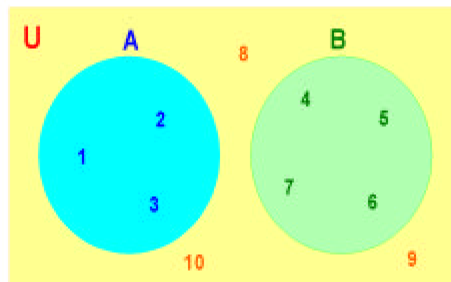
A´ = { 2, 4, 6 }

Como podemos observar, el ***complemento*** de un ***conjunto*** **A**, de hecho es la (**U - A**) ***diferencia***.

GRÁFICA DE UN CONJUNTO Y DE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS.

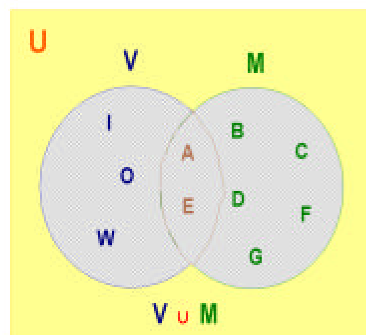
Es muy útil ilustrar las relaciones entre ***conjuntos*** mediante ***diagramas*** o figuras cerradas que indican que los ***elementos*** comprendidos dentro de esas áreas ***pertenecen*** al ***conjunto***.

A estos ***diagramas*** se les conoce como ***diagramas*** de **Venn**, en honor al matemático y lógico ingles **John Venn** quien perfecciono la idea del matemático suizo **Leonardo Euler**.



Según la figura: el rectángulo nos indica el ***conjunto*** **universal**, los círculos **A** y **B** son ***conjuntos disjuntos***. Los ***elementos*** **1**, **2**, **3**, son ***elementos*** de **A**; **4**, **5**, **6**, **7**, son elementos de **B** y **8**, **9**, **10**, son ***elementos*** del **universo**, que no pertenecen ni a **A** ni a **B**.

Unión de conjuntos.



Dados los ***conjuntos***:

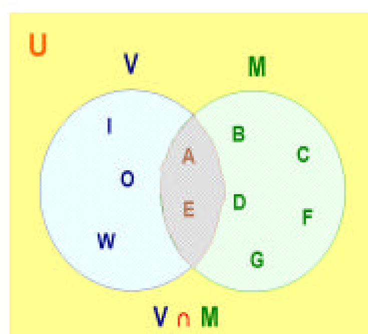
V = {I, O, W, A, E } y M = { A, E, B, D, G, C, F}

V È M = {I, O, W, A, E, B, D, G, C, F}

En el ***diagrama*** se presenta **V È M** ***sombreando*** el área correspondiente.

Intersección de conjuntos.

Considerando los mismos ***conjuntos*** **V** y **M**, su ***intersección*** es la zona superpuesta que encierra a los ***elementos*** que ***pertenecen*** a ambos ***simultaneamente*** y que aparece ***sombreada*** en el siguiente ***diagrama***.



V Ç M = {A, E}

2. NÚMEROS REALES.

2. 1. Sistema de números.

En la ***matemática*** elemental se encuentran ***conjuntos*** importantes que son ***conjuntos*** de ***números***. le daremos especial interés al ***conjunto*** de los ***números reales*** (R).

En el presente curso tenemos que el ***conjunto universal*** de los ***números***, es el ***conjunto*** de los ***números complejos***.

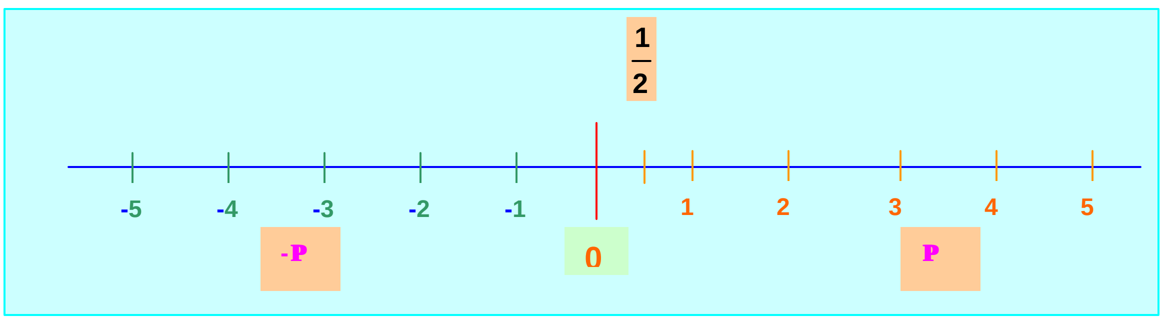
Revisaremos algunas ***propiedades*** elementales de los ***números reales***.

Al ***conjunto*** de los ***números reales*** con sus ***propiedades*** se le llama ***sistema de los números reales***.

Diagrama de los números.

a) *Números reales.*

Una de las ***propiedades*** mas importantes es el de poderlos representar por ***puntos*** en una ***linea recta***, como se puede ver en la figura siguiente:



Los ***números*** a la ***derecha*** del ***cero*** son los llamados ***números positivos*** (+) y los de la ***izquierda*** del ***cero*** son ***números negativos*** (-). El ***cero*** **no** es ***positivo*** **ni** ***negativo***.
Resulta asi de manera natural una correspondencia entre los ***puntos de la recta*** y los ***números reales***, cada ***punto*** representa un ***número real*** **único** y cada ***número*** está representado por un ***punto*** único. Esto indica que la ***recta numérica*** está saturada y que no existe un solo espacio que no esté ocupado por un ***número real***.

b) *Números enteros.*

Los *números* ***enteros*** son *números* ***reales***.

..... - 3, - 2, - 1, 0 , 1, 2, 3, ... y son representados por:

Z = {..... - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, ...}

Una ***propiedad*** de los números ***enteros*** es que son **cerrados** respecto a las operaciones de ***adicción***, ***sustracción*** y ***multiplicación***, es decir que la ***suma***, la ***diferencia*** y el ***producto*** de dos ***enteros*** nos da como resultado un ***entero***.

c) *Números racionales.*

Son los números ***reales*** que se pueden expresar como la ***razón*** de dos números ***enteros*** y de ahi el nombre de ***racional*** y que pueden escribirse en la forma:

$$\frac{a}{b} \quad ; \quad b \neq 0$$

d) Números naturales.

Históricamente el sistema de los números ***naturales***, o ***enteros positivos***, fue el primero que se formó, pues se les usaba en el proceso de ***contar***, por lo que, se definen como:

Conjunto de los números **naturales**: Es aquel que se usa para ***contar***, se denotan por la letra **N**

De modo que:

N = {1, 2, 3, 4, ...}

En este ***conjunto de números***, dado cualquier ***elemento***, se sabe cual es el ***siguiente***.

Ejemplo: El siguiente de **2** es **3**, el de **5** es **6**, etc. El **1 no** sigue a ningún número ***natural***, es el ***primer*** número ***natural***.

Operaciones.

Existen fundamentalmente dos ***operaciones*** de los números ***naturales***, la ***adición*** (**+**) y la ***multiplicación*** [**x**, **∧**, **( )**].

Si **a** y **b** sin números ***naturales***, la ***suma*** se expresa como; **a + b** y la ***multiplicación***: **a x b** o **a b** o bien **(a) (b)**. Los resultados de la ***suma*** y ***multiplicación*** son ***únicos***.

Los números ***naturales*** son **cerrados** respecto de las operaciones de ***adición*** y ***multiplicación***.

Se dice que un ***conjunto*** es ***cerrado*** bajo una ***operación***, si el resultado ***pertenece*** al mismo ***conjunto***

Estos números determinan un ***conjunto*** de ***números racionales*** y lo representamos con la letra **Q**.

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \;\; ; \;\; a, b \subset N \;\; ; \;\; b \neq 0 \right\}$$

Todo número ***entero*** puede expresarse de la forma ***racional***.

Por **ejemplo**:

$$8 = \frac{8}{1} \quad ; \quad \frac{-35}{1} = -35 \quad ; \quad m = \frac{m}{1}$$

Los números ***racionales*** son ***cerrados*** con respecto a las operaciones de ***adición***, ***sustracción***, ***multiplicación*** y a la ***división***, excepto por **cero**, esto es, que al hacer estas operaciones con números ***racionales***, el resultado será un número ***racional***.

Números Primos. Un número ***natural*** diferente de ***uno*** es ***primo***, cuando es ***divisible*** por ***si***

mismo y la ***unidad***.

Si se analiza la siguiente ***tabla***:

N1	Divisores
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
.	.
.	.

Observamos que existen números que tienen **1** ***divisor***, **2** ***divisores*** y mas de **2** ***divisores***:

Al número que tiene **1** ***divisor*** se le denomina ***unidad***.

A los números que tienen **2** ***divisores*** (la unidad y ellos mismos), se les denomina ***primos***.

A los números que tienen mas de **2** ***divisores*** se les conoce como ***compuestos***.

Todo número ***compuesto*** puede expresarse como un ***producto*** de ***números primos***, de forma unica.

Ejemplo: **Descomponer** en ***factores primos*** el número **60**.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Al proceso de ***descomponer*** un número en ***factores***, se le llama ***factorización***.

Máximo Común Divisor (M. C. D). Para la resolución de algunos problemas, se requiere considerar las ***divisiones comunes***, o ***múltiples comunes***.

Ejemplo: Para los números **30** y **45** sus ***divisores*** son:

$(30) = \{1,2,3,4,6,10,15,30\}$ y $(45) = \{1,3,5,9,15,45\}$

Los **divisores comunes**, según se pueden ver son: $\{1,3,5,15\}$

De lo anterior se tiene que el ***M. C. D***. **=** **15**

Para **encontrar** el ***M. C. D.*** de dos o mas números, se procede como se expresa enseguida:

1. **Aplicar** la ***factorización*** a cada uno de ellos.

2. **Determinar** los ***factores comunes*** de ***menor exponente***.

3. **Efectuar** el ***producto*** de los ***factores comunes***.

Ejemplo: **Encontrar** el ***M. C. D.*** de los números **36**, **72**, y **144**

36 | 2	72 | 2	144 | 2
18 | 2	36 | 2	72 | 2
9 | 3	18 | 2	36 | 2
3 | 3	9 | 3	18 | 2
1 |	3 | 3	9 | 3
	1 |	3 | 3
		1 |
$36 = 2^2 \times 3^2$	$72 = 2^3 \times 3^2$	$144 = 2^4 \times 3^2$

El $\textbf{M.C.D.}\ (36,72,144) = 2^2 x 3^2 = 4x9 = \mathbf{36}$

Mínimo Común Múltiplo (m. c. m.). Los ***múltiplos*** de los números **12** y **20** serán:

$m(12) = \{12,24,36,48,60,72,96,108,120,132,\ldots\}$

$m(20) = \{20,40,60,80,100,120,140,\ldots\}$

Podemos ver que los ***múltiplos comunes*** son: $\{60,120,180,\ldots\}$

De los cuales el ***mínimo común múltiplo*** será el número **60**

Para **encontrar** el ***m. c. m.*** de dos o mas números se procede como se describe enseguida:

1. **Aplicar** la ***factorización*** total a cada uno de ellos.

2. **Determinar** los ***factores comunes*** y ***no comunes***, de los ***comunes*** considerar el de ***mayor exponente***.

3. **Efectuar** el ***producto*** de todos los ***factores***, para encontrar el ***m. c. m.***

Ejemplo: **Determinar** el ***m. c. m.*** de los números **42**, **50** y **60**.

42 | 2	50 | 2	60 | 2
21 | 3	25 | 5	30 | 2
7 | 7	5 | 5	15 | 3
1 |	1 |	5 | 5
		1 |
$42 = 2 \times 3 \times 7$	$50 = 2 \times 5^2$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$\textbf{m.c.m.}(42,50,60) = 2^2 x 3 x 5^2 x 7 = 4x3x25x7 = \mathbf{2100}$

e) Números irracionales.

A los números que no pueden ser representados en la forma:

$\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$

Se les llama números ***irracionales*** por lo que podemos decir que son el ***complemento*** del ***conjunto*** de los números ***racionales*** en los números ***reales***. Algunos ejemplos de estos números son:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, **ð** , **e**

Para **efectuar** operaciones con números ***irracionales*** basta considerar aproximaciones de ellas; en realidad la ***importancia de estos números es de tipo teórico***.