Interés Simple y Compuesto

Las finanzas matemáticas son la rama de la matemática que se aplica al análisis financiero. El tema tiene una relación cercana con la disciplina de la economía financiera, que se refiere a

La Matemática financiero nos ayudará a determinar los distintos cursos de acción posible frente a varias alternativas de funcionamiento.

La matemática financiera es una herramienta fundamental en a evaluación y formulación de todo tipo de proyectos.

El concepto básico que se encierra en este análisis es que es el valor de un peso hoy es distinto al valor de ese mismo peso en el futuro. Pesemos cuantos bienes, por ejemplo cobrábamos con $100 hace un año y cuantos bienes compramos con $100 hoy.

Hay tres causas que explican la diferencia en la valoración del dinero:

1. ***Riesgo***→vivimos en un mundo de incertidumbre, tener un peso en el bolsillo hoy nos permite comprar cosas hoy , pero la promesa de un pago en el futuro es nada más que eso, una promesas, hasta el momento en que se concreta. Dicha promesa de pago futuro puede haber sido hecha con la mejor buena voluntad, pero una gran cantidad de imprevistos puede ocurrir, entre hoy y la fecha de pago, que impidan el cumplimiento de la misma.

2. ***Inmediatez en la satisfacción***→ la naturaleza humana hace que valoremos mucho más la satisfacción de una necesidad hoy que en el futuro, por lo cual generalmente es preferible obtener una suma de ingreso lo más pronto posible, salvo que ciertas consideraciones (impuestos, por ejemplo) nos dicten lo contrario.

3. ***Oportunidades de inversión***→un peso recibido hoy es más valioso que uno recibido en un futuro, debido a las alternativas de inversión que disponibles para ese peso en la actualidad. Prestando o invirtiendo hoy, puedo obtener una suma considerablemente mayor en un determinado lapso de tiempo.

CAPITALIZACIÓN

Es la operación que consiste en invertir o prestar un capital, produciéndonos intereses durante el tiempo que dura la inversión o el préstamo

Por el contrario, cuando la operación consiste en devolver un capital que nos han prestado con los correspondientes intereses se llama Amortización.

Estudiaremos las leyes matemáticas que regulan las dos operaciones.

El capital que se invierte se llama capital inicial C el beneficio que nos produce se llama interés I y la cantidad que se recoge al final, sumando el capital y el interés, es el capital final, VF.

El rédito r, o tanto por ciento es la cantidad que producen cien unidades monetarias del capital en cada periodo de tiempo. El tanto por uno i es la cantidad que produce una unidad en cada periodo. Se cumple: $r = 100 . i.$

La capitalización puede ser:

- *Simple* → según que el interés no se acumule

$$VF = C_0 \cdot [1 + (i \cdot n)]$$

- *Compuesta* → se acumule al capital al finalizar cada periodo de tiempo

$$VF = C_0 \cdot (1+i)^n$$

En la capitalización simple el interés no es productivo y podemos disponer de él al final de cada periodo. En la compuesta, el interés es productivo -se une al capital para **producir intereses en el siguiente periodo- pero no podemos disponer de él hasta el final de la inversión.**

INTERÉS

La palabra interés significa la renta que se paga por el uso de dinero ajeno, o la renta que se gana por invertir dinero propio. Para concretar esto, es necesario realizar ciertas precisiones sobre la forma de cálculo del interés.

Interés Simple

Una persona tiene la posibilidad de gastar o invertir el dinero que proveniente de sus ingresos no destine a cubrir necesidades básicas. Si optan por ahorrarlo, es porque esperan satisfacer necesidades en el futuro.

Una manera de ahorrar es invertir un capital en una Institución que actúa como intermediario financiero (Banco)

Recordemos que cuando la gente deposita su dinero en el banco y recibe a cambio un cierto interés(tasa de interés pasiva), y a su vez esa entidad utiliza los capitales depositados para efectuar préstamos a una tasa de interés mayor (tasa de interés activa)

En una operación financiera intervienen tres elementos:

- Capital inicial invertido (C)
- Cantidad de momentos en el tiempo (vigencia de la operación) se representa con la letra n
- Tasa de interés (porcentaje del capital invertido), se representa con la letra i

Estas tres variables son las variables de las que depende el interés.

Decimos entonces que si se coloca un capital inicial (C) a una tasa de interés (i) durante n momentos, para calcular las ganancias en conceptos de interés obtenidos después de n momentos, se utiliza la siguiente fórmula:

$$I = C \cdot i \cdot n$$

$$donde:\ i = \frac{r}{100}$$

De esta formula se desprenden tres identidades:

1. *Si* conocemos el interés simple obtenido después de n períodos de tiempo a una tasa de interés (i = r/100), podemos obtener el capita inicial que generó ese valor final

$$C = \frac{I}{i \cdot n}$$

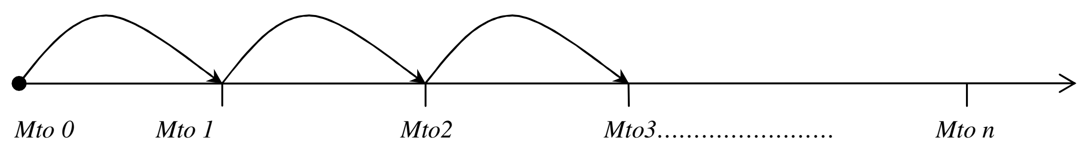
2. Si lo que se desconoce es la cantidad de períodos de tiempo

$$n = \frac{I}{C \cdot i}$$

3. Para calcular el porcentaje del capital invertido:

$$i = \frac{I}{C \cdot n}$$

El interés simple se calcula siempre sobre el capital inicial.



C_0 $\quad C_1=C_0+I \quad C_2=C_0+I \quad C_3=C_0+I$ …………………….. $C_n=C_0+I$

C_0 $\quad C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \quad C_2 = C_0 + C_0 \cdot i \quad C_3 = C_0 + C_0 \cdot i$ .... $C_n = C_0 + C_0 \cdot i$

C_0 $\quad C_1 = C_0(1+i) \quad C_2 = C_0(1+i) \quad C_3 = C_0(1+i)$ .... $C_n = C_0(1+i)$

Ejemplo: Si disponemos de $ 1.000.000 que invertimos al 5% anual simple durante tres años

$\Rightarrow$ *C = 1.000.000, i = 0,05 anual., n=3*

$$I = C \cdot i \cdot n$$
$$I = 1.000.000 \cdot 0{,}05 \cdot 3$$
$$I = 150.000$$

En términos de Capitalización Simple:

Fin del 1º año: I= C_0.i=50.000

Fin del 2º año: $I= C_0.i=50.000$

Fin del 3º año: $I= C_0.i=50.000$

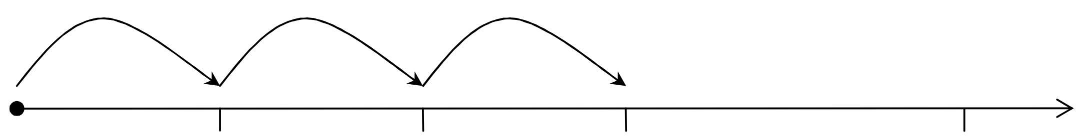
Utilizando la fórmula de Capitalización Simple es más rápido:

$$VF = C_0 \cdot [1 + (i \cdot n)]$$
$$VF = 1.000.000 \cdot [1 + (0.05x3)]$$
$$VF = 1.000.000 \cdot (1 + 0,15)$$
$$VF = 1.000.000 \cdot 1,15 = 1.150.000$$

Interés Compuesto

El interés compuesto se calcula sobre el monto acumulado al finalizar cada uno de los períodos de tiempo. Cuando se invierte a interés compuesto, lo intereses que se obtienen son reinvertidos para obtener más intereses en los próximos periodos. De esta forma obtenemos intereses sobre intereses y esto es la capitalización del dinero, un concepto fundamental para entender la Matemática Financiera.

El capital cambia en cada periodo, pues hay que sumar al capital anterior el interés producido en ese periodo. Designamos con C_0 al capital inicial. El segundo capital C_1 se obtiene sumando los intereses al primer capital: $C_2 = C_1 + I$. En el segundo periodo los intereses producidos son mayores por ser mayor el capital C_2 . Para el tercer periodo el capital es $C_3 = C_2 + I$. Y así sucesivamente. Designamos con C_n al capital en el periodo n. Se tiene $C_n = C_{n-1}+I$ Pero como $I_n = C_n.i$, entonces $C_n =C_{n-1}.(1+i)$.



Mto 0 *Mto 1* *Mto2* *Mto3*…………………… *Mto n*

C_0 $C_1=C_0+I$ $C_2 =C_1+I$ $C_3=C_2+I$ …………………….. $C_n=C_{n-1}+I$

C_0 $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i$ $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i$ $C_3 = C_2 + C_2 \cdot i$ ……………… $C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i$

C_0 $C_1 = C_0 (1 + i)$ $C_2 = C_1 (1 + i)$ $C_3 = C_2 (1 + i)$ ………………… $C_n = C_{n-1} (1+i)$

C_0 $C_1=C_0 (1+i)$ $C_2 = C_0 (1+i)(1+i)$ $C_3= C_0 (1+i)(1+i))(1+i)$…………………..$C_n= C_0 (1+i)(1+i)…(1+i)$

C_0 $C_1=C_0 (1+i)$ $C_2 = C_0 (1+i)^2$ $C_3= C_0 (1+i)^3$………………………..$C_n= C_0 (1+i)^n$

Si la inversión dura n momentos, los sucesivos capitales se obtienen multiplicando siempre por el mismo número $(1+i)$ y forman una progresión geométrica cuyo primer término es el capital inicial C_0, utilizando la fórmula para calcular los términos de una progresión geométrica obtenemos:

$$VF=C_0.(1+i)^n$$

Ejemplo 2: si disponemos de $ 1.000.000 que invertimos al 5% anual compuesto durante tres años.

$\Rightarrow$ *Capital inicial* = C_0 = 1.000.000, i = 0,05 *anual.*

Fin 1º año: $C_1=C_0+I= C_0+ C_0.i =C_0+(1+i)=$ 1.000.000 x 1,05 = 1.050.000

Fin 2º año $C2 = C1+1 = C_1+ C_1.i =C_1+(1+i)=1.050.000x1.05=1.102.500$

Fin 3º año: $C_3 =C2+I= C_2+ C_2.i =C_2+(1+i)= 1.102.500x1.05=1.157.625$

Utilizando la fórmula es más rápido:

$$VF = C_0 \cdot (1+i)^n$$
$$VF = 1.000.000 \cdot (1,.05)^3 = \$1.157.625$$

Los intereses ganados se calculan como la diferencia entre el capital final y el capital invertido:

$I=VF-C_0$

$I=1.157.625-1.000.000=1.157.625$

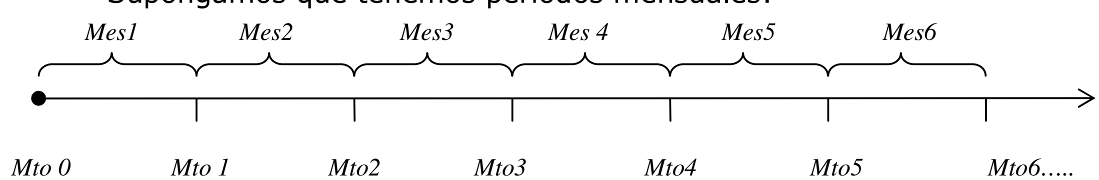
Diferencia entre interes simple e interes compuesto

Existe una importante diferencia entre el interés simple y el compuesto. Cuando se invierte a interés compuesto, lo intereses devengados son reinvertidos para obtener más intereses en los próximos periodos. Al contrario, en una inversión que produce interés simple solo se reciben intereses sobre el capital inicial (principal) invertido o prestado.

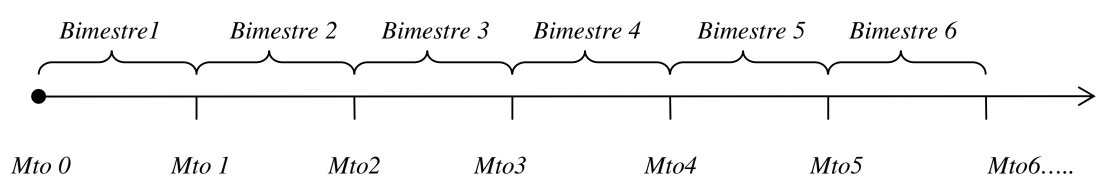
Nota:

Debemos tener en cuenta que periodo $\neq$ momento. El tiempo se divide en periodos $\Rightarrow$ podemos tener momentos con distintos periodos de tiempo:

- Supongamos que tenemos periodos mensuales:



- Supongamos que tenemos periodos bimestrales:



Tasa Nominal y Tasa Efectiva

La Tasa de Interés Nominal y su relación con la Tasa de Interés Efectiva

Las tasas efectivas son aquellas que forman parte de los procesos de capitalización y de actualización. En cambio, una tasa nominal, solamente es una definición o una forma de expresar una tasa efectiva. Las tasas nominales no se utilizan directamente en las fórmulas de la matemática financiera. En tal sentido, las tasas de interés nominales siempre deberán contar con la información de cómo se capitalizan.

Ejemplo: si tenemos una Tasa Nominal Anual (TNA) que se capitaliza mensualmente, lo que significa que la tasa efectiva a ser usada es mensual. Otro caso sería contar con una TNA que se capitaliza trimestralmente, lo que significa que la tasa efectiva será trimestral.

¿Cómo se halla el valor de la tasa de interés efectiva? Las tasas nominales pueden ser divididas o multiplicadas de tal manera de convertirla en una tasa efectiva o también en una tasa proporcional:

- Si queremos pasar de una tasa nominal a una efectiva→ , si se recibe la información de una tasa nominal con su capitalización respectiva, entonces esta tasa se divide o se multiplica, según sea el caso por un coeficiente, al que se le denomina normalmente con la letra "m".
- Si queremos pasar de una tasa nominal a una proporcional→ cuando la tasa nominal se divide o multiplica, se halla su respectiva tasa proporcional.

Ejemplo: si se tiene una TNA del 24% que se capitaliza mensualmente:

$$TNA = 24\% = 0{,}24 \Rightarrow TN\ \ mensual = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 \Rightarrow 2\%$$

Esta TNA del 24% también puede convertirse a una $TNsemestral$ dividiéndola entre dos, la misma que sería del 12%.

$\Rightarrow$"dada una tasa nominal y su forma de capitalización, ésta no varía si la tasa nominal se convirtiera a otra tasa nominal proporcional".

Por ejemplo, si tenemos nuevamente la TNA del 24% y se capitaliza mensualmente, podemos hallar la tasa nominal proporcional mensual que sería 2%. Como la TNA se capitaliza mensualmente, la tasa proporcional hallada del 2% también deberá capitalizarse mensualmente, pero como esta tasa nominal también es mensual, entonces la TEM simplemente es igual que la *Tasa Nominal Mensual (TNmensual)*

Conclusión: las tasas nominales siempre deberán ir acompañadas de su forma de capitalización. La tasa nominal puede ser convertida a una tasa proporcional, sin afectar la forma de capitalización. Lo que variaría sería el coeficiente "m", que es aquel que convierte a la tasa nominal en una efectiva.

Ejemplo: si la TNA es del 24%, y la capitalización es mensual, el coeficiente "m" será 12; si esta tasa nominal la convertimos en una $TNsemestral$, ésta será del 12%; sin embargo, para convertirla en efectiva ($TEmensual$), deberá dividirse entre 6 y ya no entre 12. En este último caso, como la tasa nominal se ha transformado a una tasa semestral, el coeficiente "m" tendrá un valor de seis. Lo importante de las tasas nominales es que es una especie de "representación" de la tasa efectiva.

La Tasa de Interés Efectiva

Las tasas efectivas son las que capitalizan o actualizan un monto de dinero. Son las que utilizan las fórmulas de la matemática financiera.

Ahora bien, las tasas de interés efectivas pueden convertirse de un periodo a otro, es decir, se pueden hallar sus tasas de interés efectivas equivalentes. En otras palabras, toda tasa de interés efectiva de un periodo determinado de capitalización tiene su tasa de interés efectiva equivalente en otro periodo de capitalización.

Una diferencia notoria con la tasa de inters nominal es que la efectiva no se divide ni se multiplica. Las tasas nominales pueden ser transformadas a otras proporcionalmente pero el periodo de capitalización sigue siendo el mismo.

Un capital puede ser capitalizado con diferentes tasas efectivas las mismas que se relacionan con diferentes periodos de capitalización, pero el horizonte de capitalización puede ser el mismo.

Entonces, si tenemos *$1.000.000* y se desea capitalizar durante un año, entonces se puede efectuar la operación con una *Tasa Efectiva Anual (TEA)*, o también con su equivalente mensual, que vendría a ser una *TEmensual* pero que capitaliza doce veces en un año.

También sería igual utilizar una *TEsemestral* como tasa equivalente de una *TEA*, teniendo en consideración que la *TEsemestral* capitaliza dos veces en un año.

La diferencia con las tasas nominales, es que estas se pueden transformar independientemente de la capitalización. En tal sentido, la tasa nominal se podría definir como "una presentación de cómo se va a capitalizar o actualizar un monto de dinero en un horizonte de tiempo".

Para la conversión de una tasa efectiva a otra tasa efectiva deberá tenerse en cuenta que el horizonte de tiempo de la operación financiera deberá ser el mismo mas no así el periodo capitalizable (**Recordar la diferencia entre periodo y momento).** Por lo tanto en términos de tasa efectiva se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$(1+TEA)=(1+TEmesual)^{12} \Rightarrow TEmesual=\sqrt[12]{1+TEA)}-1$$

$$(1+TEA)=(1+ie_m)^{12} \Rightarrow ie_m=\sqrt[12]{1+TEA)}-1$$

donde: ie_m *=tasa equivalente mensual*

La *TEmensual* (ie_m) hará las veces de tasa equivalente de una *TEA*. La *TEA* capitaliza una vez en un año, y la ie_m capitaliza doce veces al año. Sin embargo el horizonte de tiempo de ambos miembros de la ecuación es un año. La diferencia está en que la TEA abarca todo el horizonte en una capitalización y la TEM solamente abarca un mes, consecuentemente capitaliza doce veces.

En términos generales:

$$(1+TEA)=(1+ie)^{\frac{H}{f}}$$

donde el coeficiente H será *12* si está en meses, y *360* si está en días; el coeficiente f será *1* si está en meses y *30* si está en días. Lo importante es que "*H*" y "*f*" estén en la misma unidad de tiempo al igual que la tasa equivalente. Esta es una ecuación que relaciona una *TEA* con una tasa equivalente de cualquier periodo, pudiendo ser una *TEmensual, TEbimestral, TEtrimestral, TEsemestral* o una *TEA*. Inclusive la tasa equivalente puede estar en días como por ejemplo, 12 días, 35 días, etc.

Ejemplo: Supongamos que tenemos un capital de $1.000 y se deposita en una Caja de ahorros que paga una tasa efectiva mensual del 2%. Para hallar el valor futuro de este capital dentro de un año:

$$VF = C_0 \cdot (1+im)^{12}$$
$$VF = 1.000 \cdot (1+0{,}02)^{12} = 1268{,}24$$

Si queremos ver cual el la TEA equivalente a esta mensual:

$$im = 0{,}02 \Rightarrow Utilizando\ \ la\ \ formula\ \ general:$$

$$(1+TEA)=(1+ie)^{\frac{H}{f}}$$
$$\Rightarrow si\ \ H=12\ \ y\ \ f=1$$
$$\Rightarrow (1+TEA)=(1+0{,}02)\frac{12}{1}$$
$$\Rightarrow TEA=(1{,}02)^{12}-1$$
$$\Rightarrow TEA=1{,}26824-1=0{,}26824$$
$$\Rightarrow la\ TEA\ correspondiente\ a\ una\ im\ del\ 2\%\ es\ del\ 26{,}82\%$$