LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando estudiamos *el problema del área* y el *problema de la distancia* analizamos que tanto el valor del área debajo de la gráfica de una función como la distancia recorrida por un objeto se puede calcular aproximadamente por medio de sumas o bien exactamente como el límite de una suma.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

(se utiliza el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo)

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(se utiliza el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo)

$$\lim_{n\to\infty}[f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

(se utiliza el valor de la función en cualquier punto de cada subintervalo)

Este tipo de límites aparece en una gran variedad de situaciones incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. Teniendo en cuenta lo expresado surge la necesidad de dar un nombre y una notación a este tipo de límites.

Definición 1: Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la ***integral definida de f* de *a* a *b***, que se indica $\int_a^b f(x)dx$ es el número:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x$$ o bien

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(la función se evalúa en el extremo izquierdo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i = 1, .., n)

Definición 2: Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la *integral definida de f* de *a* a *b*, que se indica $\int_a^b f(x)dx$ es el número:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(la función se evalúa en el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, .., n$)

Definición 3: Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la *integral definida de f* de *a* a *b*, que se indica $\int_a^b f(x)\,dx$ es el número:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} [f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)]\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(la función se evalúa en cualquier punto t_i de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, .., n$)

El número *a* es el límite inferior de integración y el número *b* es el límite superior de integración .

Notación y terminología:

$$\int_a^b f(x)\;dx$$

Cuando se calcula el valor de la integral definida se dice que se evalúa la integral.

La continuidad asegura que los límites en las tres definiciones existen y dan el mismo valor por eso podemos asegurar que el valor de $\int_a^b f(x)dx$ es el mismo independientemente de cómo elijamos los valores de x para evaluar la función (extremo derecho, extremo izquierdo o cualquier punto en cada subintervalo). Enunciamos entonces una definición más general.

Definición de integral definida: Sea f una función continua definida para $a \leq x \leq b$. Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$ y además $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los puntos extremos de cada subintervalo. Elegimos un punto t_i en estos subintervalos de modo tal que t_i se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, .., n$.

Entonces ***la integral definida de f de a a b*** es el número $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

La integral definida es un número que no depende de x. Se puede utilizar cualquier letra en lugar de x sin que cambie el valor de la integral.

Aunque esta definición básicamente tiene su motivación en el problema de cálculo de áreas, se aplica para muchas otras situaciones. La definición de la integral definida es válida aún cuando f(x) tome valores negativos (es decir cuando la gráfica se encuentre debajo del eje x). Sin embargo, en este caso el número resultante no es el área entre la gráfica y el eje x.

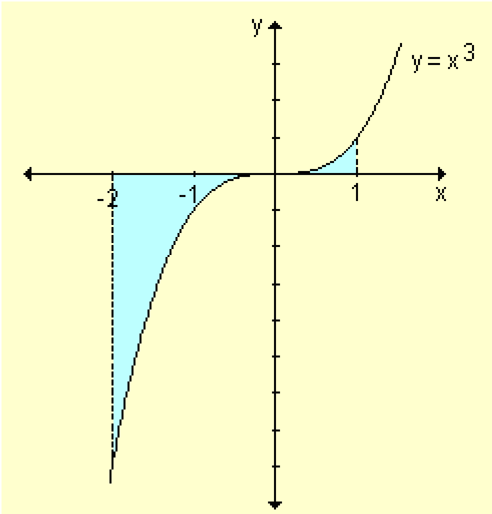
Observación: La suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ que aparece en la definición de integral definida se llama suma de Riemann en honor al matemático alemán Bernahrd Riemann. Su definición incluía además subintervalos de distinta longitud.

Definición de las sumas de Riemann: Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a, b] y sea una división (partición) arbitraria de dicho intervalo $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ donde Δx_i indica la amplitud o longitud del i-ésimo subintervalo. Si t_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo la suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ se *llama suma de Riemann de f* asociada a la partición.

Si bien la integral definida había sido definida y usada con mucha anterioridad a la época de Riemann él generalizó el concepto para poder incluir una clase de funciones más amplia. En la definición de una suma de Riemann, la única restricción sobre la función f es que esté definida en el intervalo [a, b]. (antes suponíamos que f era no negativa debido a que estábamos tratando con el área bajo una curva).

Una página interesante para ampliar sobre las sumas de Riemann y visualizar animaciones resulta http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/tutoriales/integracion/

Ejemplo: Halle $\int_{-2}^{1} x^3 dx$



Como f(x) = x^3 es continua en el intervalo [–2, 1] sabemos que es integrable.

Dividimos el intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$ y para el cálculo de la integral consideramos el extremo derecho de cada subintervalo $t_i = -2+\frac{3i}{n}$.

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-2+\frac{3i}{n})^3 \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(-8+\frac{36i}{n}-\frac{54i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3})$$

Para el desarrollo de la sumatoria tenemos en cuenta las propiedades siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[-8n+\frac{36}{n}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{27}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \left[-24+\frac{54}{n}(n+1)-\frac{27}{n^2}(2n^2+3n+1)+\frac{81}{4n^2}(n^2+2n+1)\right]$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\left[-24+54+\frac{54}{n}-54-\frac{81}{n}-\frac{27}{n^2}+\frac{81}{4}+\frac{81}{2n}+\frac{81}{4n^2}\right] = -24+\frac{81}{4} = -\frac{15}{4}$$

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$$

Observación: Esta integral definida es negativa, no representa el área graficada. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o nulas.

Surgimiento del símbolo $\int f(x)dx$

Leibniz creó el símbolo $\int f(x)dx$ en la última parte del siglo XVII. La $\int$ es una S alargada de summa (palabra latina para suma). En sus primeros escritos usó la notación "omn." (abreviatura de la palabra en latín "omnis") para denotar la integración. Después, el 29 de octubre de 1675, escribió, "será conveniente escribir $\int$ en vez de omn., así como $\int l$ en vez de omn.l ...". Dos o tres semanas después mejoró aún más la notación y escribió $\int [\quad] dx$ en vez de $\int$ solamente. Esta notación es tan útil y significativa que su desarrollo por Leibniz debe considerarse como una piedra angular en la historia de la matemática y la ciencia.

La notación de la integral definida ayuda a tener en cuenta el significado de la misma. El símbolo $\int_a^b f(x)dx$ hace referencia al hecho de que una integral es un límite de una suma de términos de la forma "f(x) por una pequeña diferencia de x". La expresión dx no se considera por separado sino que forma parte de la notación que significa "la integral de *una determinada función* con respecto a x". Esto asegura que dx no tiene significado por si mismo sino que forma parte de la expresión completa $\int_a^b f(x)dx$. De todos modos, desde un punto de vista totalmente informal e intuitivo algunos consideran que la expresión dx indica "una porción infinitesimalmente pequeña de x" que se multiplica por un valor de la función. Muchas veces esta interpretación ayuda a entender el significado de la integral definida. Por ejemplo, si v(t) (positiva) es la velocidad de un objeto en el instante t entonces v(t) dt se podría interpretar, según la consideración hecha, como velocidad . tiempo y esto sabemos que da por resultado la distancia recorrida por el objeto durante un instante, una porción de tiempo muy pequeña dt. La integral $\int_a^b v(t)dt$ se puede considerar como la suma de todas esas distancias pequeñas que como ya analizamos da como resultado el cambio neto en la posición del objeto o la distancia total recorrida desde $t = a$ hasta $t = b$.

Esta notación permite además determinar qué unidades se deben usar para su valor. Como sabemos los términos que se suman son productos de la forma "f(x) por un valor muy pequeño de x". De esta manera la unidad de medida de

$\int_a^b f(x)dx$ es el producto de las unidades de f(x) por las unidades de x. Por ejemplo:

***** si v(t) representa la velocidad medida en $\frac{km}{h}$ y t es el tiempo medido en horas, entonces la $\int_a^b v(t)dt$ tiene por unidades $\frac{km}{h}$. h = km. La unidad obtenida es kilómetros y es lo que corresponde porque es valor de la integral representa un cambio de posición.

***** si se grafica y = f(x) con las mismas unidades de medida de longitud a lo largo de los ejes coordenados, por ejemplo metros, entonces f(x) y x se miden en metros y $\int_a^b f(x)dx$

tiene por unidad m . m = m^2. Esta unidad es la esperada dado que, en este caso la integral representa un área.

Es importante tener en cuenta el teorema enunciado a continuación.

Teorema:

- Si una función f es continua en un intervalo [a, b] entonces f es integrable en ese intervalo .

- Si f tiene un número finito de discontinuidades en [a, b] pero se mantiene acotada para todo x del intervalo (presenta sólo discontinuidades evitables o de salto finito) entonces es integrable en el intervalo.

Aprendizaje por descubrimiento

Analice el problema planteado y reflexione...

¿No sería conveniente encontrar una forma más sencilla para evaluar las integrales definidas?

Sería interesante que en estos momentos analice algunas propiedades y teoremas sobre la integral definida

PROPIEDADES Y TEOREMAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Se enuncian algunas propiedades y teoremas básicos de las integrales definidas que ayudarán a evaluarlas con más facilidad.

1) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ donde c es una constante

2) Si f y g son integrables en [a, b] y c es una constante, entonces las siguientes propiedades son verdaderas:

$$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

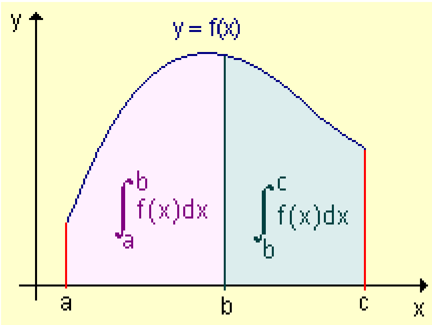
(se pueden generalizar para más de dos funciones)

3) Si x está definida para x = a entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Si f es integrable en [a, b] entonces $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5) Propiedad de aditividad del intervalo: si f es integrable en los dos intervalos cerrados definidos por a, b y c entonces

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



INTENTE DEMOSTRAR LAS PROPIEDADES ENUNCIADAS

CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

***** Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado [a, b] entonces

$$0 \le \int_a^b f(x)dx$$

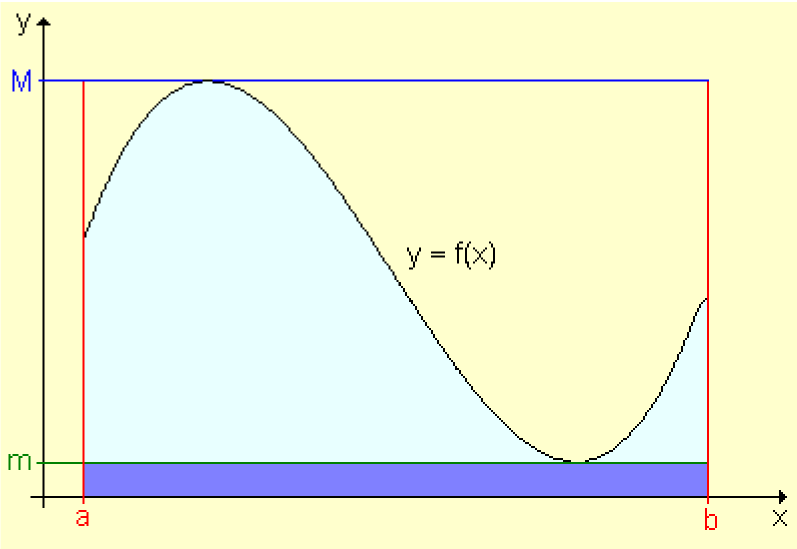
Demostración: Si $f(x) \ge 0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva de f de modo que la interpretación geométrica de esta propiedad es sencillamente el área. (También se deduce directamente de la definición porque todas las cantidades son positivas).

* Si f y g son integrables en el intervalo cerrado [a, b] con $f(x) \geq g(x)$ para todo x en [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Demostración: Si $f(x) \geq g(x)$ podemos asegurar que $f(x) - g(x) \geq 0$ y le podemos aplicar la propiedad anterior y por lo tanto $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$. De aquí $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$ y de esta manera $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Supongamos que m y M son constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$. Se dice que f está acotada arriba por M y acotada abajo por m, la gráfica queda entre la recta y = m y la recta y = M. Podemos enunciar el siguiente teorema:

* Si f es integrable y $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.



(La gráfica ilustra la propiedad cuando $f(x) \geq 0$)

Si y = f(x) es continua y m y M son los valores mínimos y máximos de la misma en el intervalo [a, b] gráficamente esta propiedad indica que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que la del rectángulo con altura M.

En general dado que $m \leq f(x) \leq M$ podemos asegurar, por la propiedad anterior que

$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$.

Si se evalúan las integrales de los extremos de la desigualdad resulta m (b – a) $\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq$ M (b – a).

SIMETRÍA

El siguiente teorema permite simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

Sea f una función continua sobre el intervalo [–a, a]

a) Si f es par $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

b) Si f es impar $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Demostración: tenemos en cuenta que a $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ la podemos descomponer en dos nuevas integrales

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

En la primera integral sustituimos u = –x ⇒ du = –dx, además si x = –a ⇒ u = a.

$-\int_0^{-a} f(x)dx = -\int_0^u f(-u)[-du] = \int_0^u f(-u)du$ con esto la ecuación original resulta:

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx$

En el caso **a)** si la función es par f(–u) = f(u) entonces

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(u)du + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Mientras que en el caso **b)** si la función es impar f(–u) = – f(u)

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(u)du + \int_0^a f(x)dx = 0$.

Ejemplo: Sabiendo que $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$, calcule las siguientes integrales.

a) $\int_{-2}^{0} x^2\,dx$ **b)** $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$ **c)** $\int_{0}^{2} 3x^2\,dx$ **d)** $\int_{0}^{2} -x^2\,dx$

Utilizando propiedades de las integrales resulta:

a) Como x^2 es una función par: $\int_{-2}^{0} x^2\,dx = \int_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}$

b) Como x^2 es una función par: $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$

c) $\int_{0}^{2} 3x^2\,dx = 3\int_{0}^{2} x^2\,dx = 8$

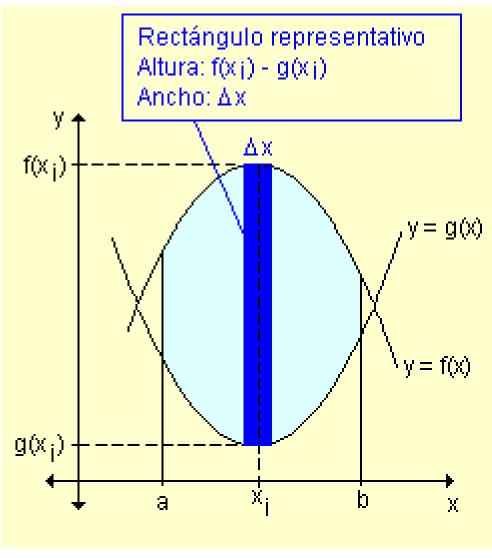
d) $\int_{0}^{2} -x^2\,dx = -\int_{0}^{2} x^2\,dx = -\frac{8}{3}$

ÁREA DE REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son dos funciones continuas en [a, b] y $g(x) \leq f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es $\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$

Demostración: Subdividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos cada uno de ancho Δx y dibujamos un rectángulo representativo de alto $f(x_i) - g(x_i)$ donde x está en el i-ésimo intervalo.

Área del rectángulo i $= [f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x$



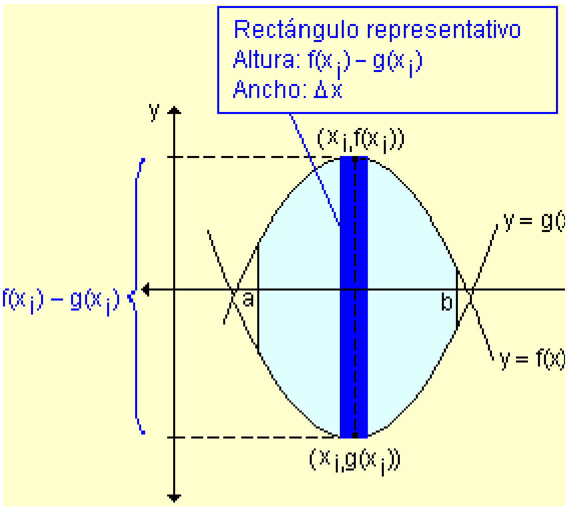
Sumando las áreas y considerando que el número de rectángulos tiende a infinito resulta que el área total es

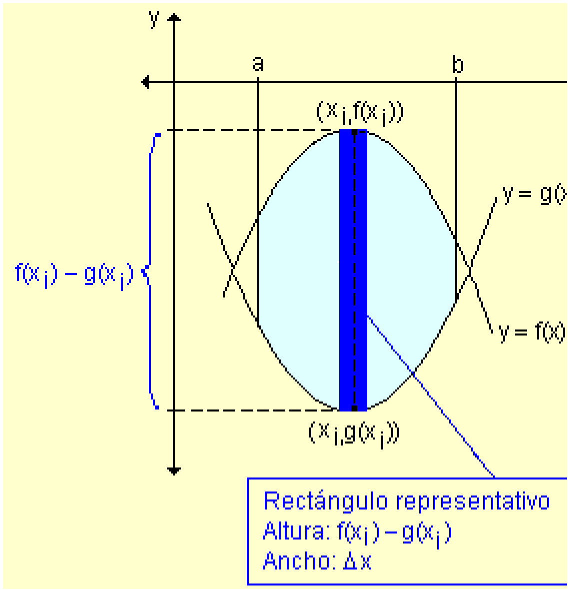
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-g(x_i)]\Delta x$$

Como f y g son continuas en el intervalo, la función diferencia f – g también los es y el límite existe.

Por lo tanto el área es área = $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x_i)-g(x_i)]\Delta x = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

E s importante darse cuenta que la validez de la fórmula del área depende sólo de que f y g sean continuas y de que g(x) ≤ f(x). Las gráficas de f y g pueden estar situadas de cualquier manera respecto del eje x.



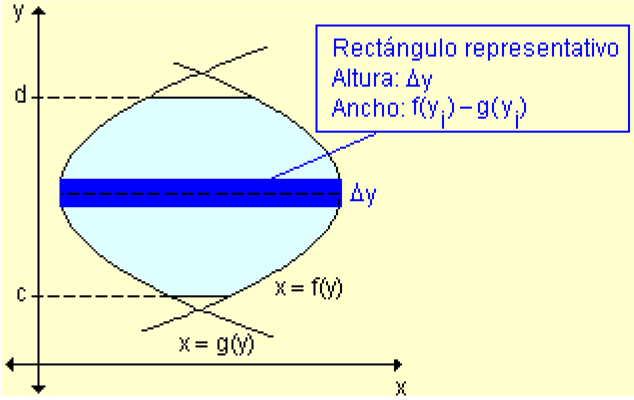


Integración respecto al eje y

Si algunas regiones están acotadas por curvas que son funciones de y o bien se pueden trabajar mejor considerando x como función de y los rectángulos representativos para la aproximación se consideran horizontales en lugar de verticales. De esta manera, si una región está limitada por las curvas de ecuaciones x = f(y), x = g(y), y = c y la recta horizontal y = d, donde f y g son continuas y f(y) ≥ g(y) para c ≤ y ≤ d, entonces su área resulta

$$A = \int_c^d [f(y)-g(y)]dy$$

.



A modo de resumen:

Área = A = $\int_a^b [(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]dx$ *(en la variable x, se consideran rectángulos verticales)*

donde a y b son las abscisas de dos puntos de intersección adyacentes de las dos curvas o puntos de las rectas fronteras que se especifiquen.

Área = A = $\int_c^d [(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]dy$ *(en la variable y, se consideran rectángulos horizontales)*

donde c y d son las ordenadas de dos puntos de intersección adyacentes de las dos curvas o puntos de las rectas fronteras que se especifiquen.

Ahora sería bueno que se interese por investigar el Teorema Fundamental del Cálculo

HACIA EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Vimos que cuando f(x) es la razón de cambio de la función F(x) y f(x) ≥ 0 en [a, b] entonces la integral definida tiene la siguiente interpretación:

$\int_a^b f(x)dx$ = cambio total en F(x) cuando x cambia de *a* a *b*.

Decir que f(x) es la razón de cambio de F(x) significa que f(x) es la derivada de F(x) o equivalentemente que F(x) es una primitiva de f(x). El cambio total en F(x) cuando x cambia de *a* a *b* es la diferencia entre el valor de F al final y el valor de F al principio, es decir, F(b) – F(a). Podemos definir $\int_a^b f(x)\,dx$ = F(b) – F(a).

Esta definición o principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias sociales y naturales. A modo de ejemplo podemos citar:

Si v(t) es el volumen de agua de un depósito, en el instante t, entonces su derivada v'(t) es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Así $\int_{t_1}^{t_2} v'(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

Si [c](t) es la concentración del producto de una reacción química en el instante t entonces la velocidad de reacción es la derivada [c]'(t). De esta manera $\int_{t_1}^{t_2} c'(t)\,dt = [c](t_2) - [c](t_1)$ es el cambio en la concentración [c] desde el instante t_1 hasta el t_2.

Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x, es m(x) entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. De esta manera $\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$ es la masa del segmento de la varilla entre x = a y x = b.

Si la tasa de crecimiento de una población es $\frac{dp}{dt}$ entonces $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt}\,dt = p(t_2) - p(t_1)$ es el aumento de población durante el período desde t_1 hasta t_2.

Si c(x) es el costo para producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada c'(t). Por consiguiente $\int_{x_1}^{x_2} c'(t)\,dt = c(x_2) - c(x_1)$ es el incremento en el costo cuando la producción aumenta desde x_1 hasta x_2 unidades.

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición s(t) , entonces su velocidad es v(t) = s'(t) de modo que $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de la posición, o desplazamiento, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2.

Dado que la aceleración de un objeto es a(t) = v'(t), podemos asegurar que la expresión

$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la velocidad en el instante t_1 hasta el t_2.

La potencia P(t) indica la razón de cambio de la energía E(t). Esto permite decir que P(t) = E'(t) y por lo tanto resulta $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = E(t_2) - E(t_1)$ indica la energía utilizada en el tiempo entre t_1 y t_2.

La definición que estudiamos de integral definida nos permite calcular o evaluar la integral de funciones sencillas pero en la mayoría de los casos el cálculo del límite de sumas resulta complicado.

LA INTEGRAL DEFINIDA COMO FUNCIÓN

Sea f una función continua en un intervalo [a, b]. Definimos una nueva función g dada por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ donde $a \le x \le b$. Se observa que g sólo depende de x, variable que aparece como límite superior en el cálculo de la integral.

Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si hacemos que x varíe, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función que depende de x.

La integral como función	**La integral como número**
$\int_a^x f(t)\,dt$	$\int_a^b f(x)\,dx$

Analicemos una función continua f(x) siendo $f(x) \ge 0$.

Podemos decir que $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se puede interpretar como el área debajo de la gráfica de f desde a hasta x, donde x puede variar desde a hasta b (se debe pensar en g como la función "el área hasta").

El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Primera Parte

Si f es una función continua en [a, b] entonces la función $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ donde $a \leq x \leq b$ es derivable y verifica $A'(x) = f(x)$ para todo x del intervalo.

APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO

Analice los problemas planteados y reflexione sobre sus resultados ...

Ahora estamos en mejores condiciones para comprender la demostración del teorema.

Demostración: Queremos calcular $A'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$

Pero según la definición de A(x) resulta: $A(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt \quad y \quad A(x) = \int_a^x f(t)dt$

De aquí el numerador: $A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ **(1)**

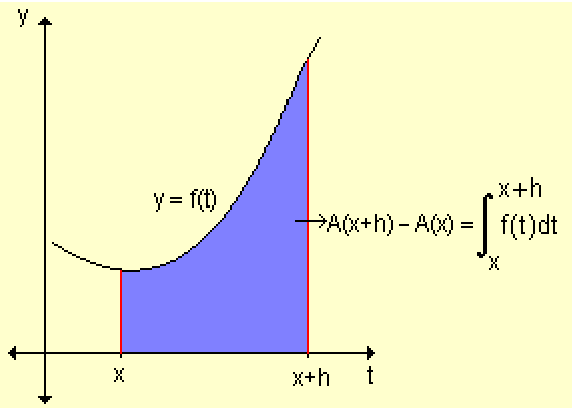
Por propiedades de la integral definida $\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$

Reemplazando en **(1)**, surge $A(x+h) - A(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$

Es decir $A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ y por lo tanto:

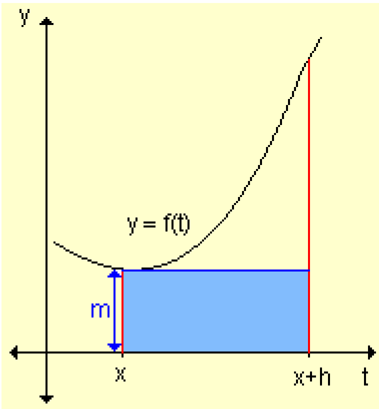
$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Si observamos el siguiente gráfico, vemos que:

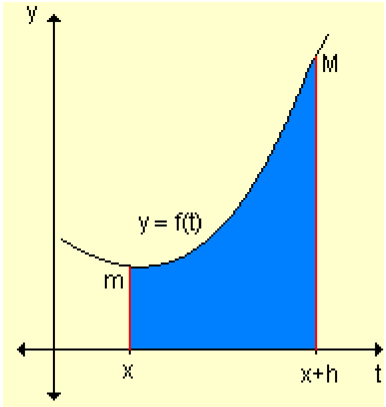


De aquí surge que si m es el mínimo valor y M es el máximo que toma la función en el intervalo [x, x+h], el área de la región sombreada estará comprendida entre el área del rectángulo de base h y altura m, y el área del rectángulo de base h y altura M.

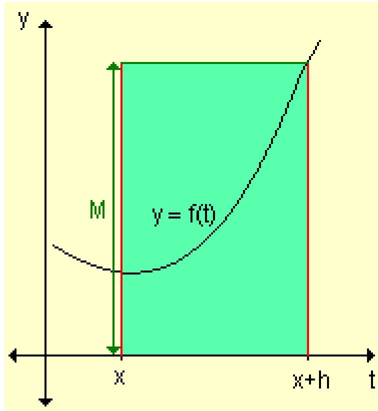
$$m.h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M.h$$



El área sombreada es m . h



El área sombreada es $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$



El área sombreada es M . h

Suponemos $h > 0$ (se demuestra de manera análoga para $h < 0$).

Dividiendo por h, resulta: $m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M$.

Pero cuando $h \to 0$, el intervalo [x, x+h] tiende a reducirse a un único punto x y por lo tanto los valores m y M tienden a f(x).

Por lo tanto: $A'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$

Luego $A'(x) = f(x)$

Segunda Parte

Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y F una primitiva cualquiera, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Demostración:

Según la primera parte del teorema $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Si F(x) es otra primitiva, se tiene que $A(x) = F(x) + k$

Si x toma el valor a, se verifica que A(a) = F(a) + k pero como $A(a)=\int_a^a f(t)dt=0$ entonces F(a) = –k y A(x) = F(x) – F(a).

Si además sustituimos x por b, resulta A(b) = F(b) – F(a) , es decir:
$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Si F es cualquier primitiva $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

A esta forma práctica de trabajo se la conoce como **REGLA DE BARROW.**

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Ejemplo: Determine el valor de $\int_2^4 (x+1)\,dx$

$$\int_2^4 (x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_2^4=(8+4)-(2+2)=8$$

Tomadas juntas las dos partes del teorema fundamental expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Se puede decir, en un lenguaje coloquial que cada una "deshace lo que hace la otra".

Observación: el teorema fundamental del cálculo no requiere que la función sea positiva. Sirve para evaluar las integrales definidas y muestra la estrecha relación existente entre la derivada y la integral.

La integral definida como función y la regla de Barrow a través de un ejemplo.

Halle la función F(x) = $\int_0^x \left(1-\frac{1}{4}t^2\right)dt$ en x = 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ y 2.

Podemos hallar el valor de cada una de las cinco integrales definidas cambiando por los límites superiores pedido, pero es mucho más sencillo fijar x (como una constante temporalmente) y aplicar el teorema fundamental del cálculo con lo que obtenemos.

Resulta la función F(x) = $\int_0^x \left(1-\frac{1}{4}t^2\right)dt$ = $t-\frac{t^3}{12}\Big|_0^x$ = $x-\frac{x^3}{12}$ que se debe evaluar en los distintos valores de x solicitados.

Si derivamos se obtiene F'(x) = $1-\frac{x^2}{4}$ = f(x) que coincide con el integrando.

Ejemplo: Encuentre el valor de a si se sabe que $\int_{-1}^{1}\left[ax^2+(a+1)x+4\right]dx=\frac{28}{3}$

Integrando y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\left(a\frac{x^3}{3}+(a+1)\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}(a+1)+4\right)-\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}(a+1)-4\right)=\frac{2}{3}a+8$$

Igualando y despejando a resulta: $\frac{2}{3}a+8=\frac{28}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}\Rightarrow a=2$

Ejemplo: Halle $\int_0^4 f(x)dx$ si $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad x\le 1\\ x & \text{si}\quad 1<x<2\\ 4-x & \text{si}\quad x\ge 2\end{cases}$.

La función f(x) es por tramos, en consecuencia:

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 xdx+\int_2^4(4-x)dx=x\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4$$

$$\int_0^4 f(x)dx=(1-0)+\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)+\left(4.4-\frac{4^2}{2}\right)-\left(4.2-\frac{2^2}{2}\right)=\frac{9}{2}.$$

Para verificar los cálculos en este caso, puede graficar la función y calcular el
área utilizando fórmulas para el cálculo de áreas de figuras geométricas.

Ahora puede verificar los resultados obtenidos al analizar el problema del área y el problema de la distancia (donde se calcularon integrales definidas como límites de suma) utilizando la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Usted qué opina:

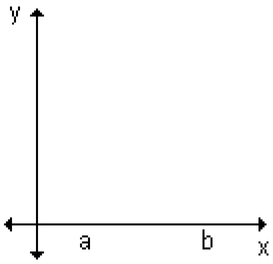
¿Es fundamental el teorema fundamental del cálculo?

Tal vez coincidamos en la respuesta ...

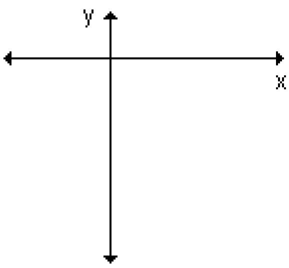
¿Qué le parece si analiza a partir de estos momentos cómo calcular áreas de regiones planas?

Analicemos las distintas situaciones que se pueden plantear en el cálculo de áreas de regiones planas

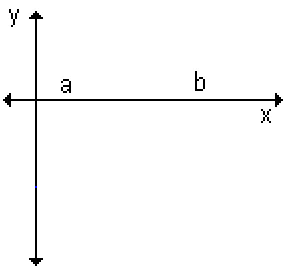
Situación 1. La función es positiva



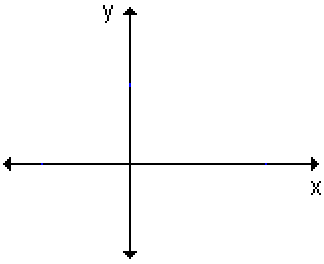
Situación 4. El área a calcular está limitada por las gráficas de dos funciones pero se encuentra en el semiplano negativo.



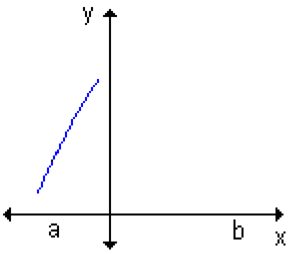
Situación 2. La función es negativa



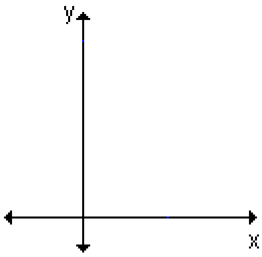
Situación 5. Cálculo de áreas subdividiéndola en sectores.



Situación 3.El área a calcular está comprendida entre la gráfica de dos funciones positivas.



Situación 6. Cálculo de áreas integrando respecto a la variable y.



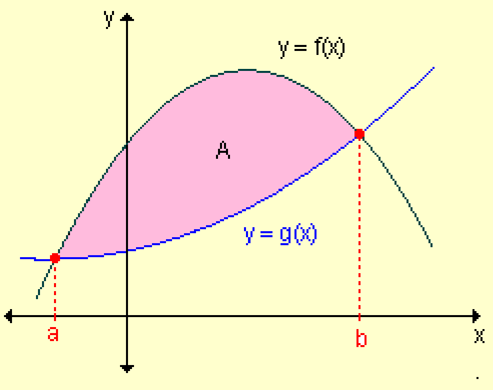
Cálculo de áreas

Para calcular el área que queda determinada entre dos curvas debemos:

1) Hallar las intersecciones de las funciones que delimitan el recinto del que se desea calcular el área.

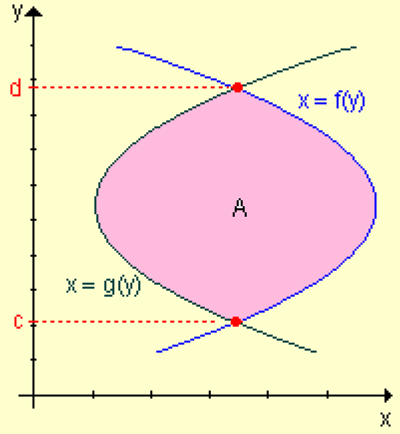
2) Dividir el intervalo total en subintervalos utilizando como extremos las abscisas u ordenadas de las intersecciones halladas según corresponda.

3) Integrar dentro de cada subintervalo para obtener cada subárea.



Área = A =

$$\int_a^b [(\text{curva de arriba}) - (\text{curva de abajo})]\,dx$$



Área = A =

$$\int_c^d [(\text{curva derecha}) - (\text{curva izquierda})]\,dy$$

Sería conveniente que en estos momentos intente resolver ejercicios de cálculo de áreas

EJERCICIOS

- Cálculo de integrales definidas
- Cálculo de áreas

CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Se incluyen aquí los ejercicios para calcular integrales definidas y sus respuestas

Ejercicio 1

Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3}\,dx$

c) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\,dx$

d) $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

e) $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1)\,dx$

f) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$

g) $\int_0^1 (2a+1)^4\,da$

h) $\int_1^e x.\ln x\,dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$

j) $\int_0^3 (-x^2+x-1)\,dx$

k) $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}t-2\right)^2 dt$

l) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{9+2x}$

m) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$

Respuestas: **a)** -2 **b)** $\frac{11}{8}$ **c)** $\frac{32}{3}$ **d)** $\frac{a^2}{6}$ **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{172}{3}$ **g)** $24{,}2$ **h)** $\frac{e^2+1}{4}$ **i)** 1 **j)** $-\frac{15}{2}$ **k)** $\frac{43}{3}$ **l)** $\frac{1}{2}\ln 3$ **m)** 0

Ejercicio 2

Sabiendo que: $\int_0^9 f(x)\,dx = 15{,}4;\ \int_4^7 f(x)\,dx = 7{,}3;\ \int_7^9 f(x)\,dx = 3{,}5$ halle:

a) $\int_0^4 f(x)\,dx$ **b)** $\int_4^9 f(x)\,dx$ **c)** $\int_4^7 3f(x)\,dx$

d) $\int_4^9 f(x)\,dx + \int_0^4 \frac{1}{4} f(x)\,dx$ **e)** $\int_0^4 \frac{3}{4} f(x)\,dx$ **f)** $\int_7^9 f(x)\,dx + \int_6^9 f(x)\,dx$

Respuestas: **a)** *4,6* **b)** *10,8* **c)** *21,9* **d)** *11,95* **e)** *3,45* **f)** *7*

Ejercicio 3

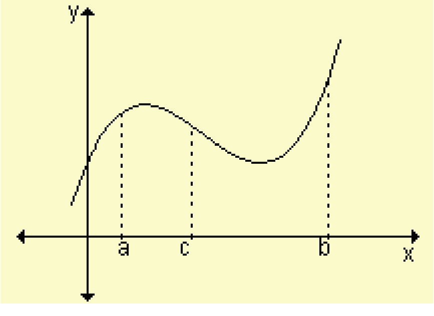
a) Calcule $\int_0^3 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

b) Encuentre el valor de b tal que $\int_0^b 6(x-1)(x+1)\,dx = 4$.

c) Calcule $\int_1^3 f(x)\,dx$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Respuestas: **a)** $\frac{2}{\ln 3} + 6$ **b)** $b = -1,\ b = 2$ **c)** $\frac{29}{6}$

Ejercicio 4: En la función definida gráficamente por:



se sabe que $\int_a^b f(x)dx = 8$ y $\int_c^b f(x)dx = 6$. Halle:

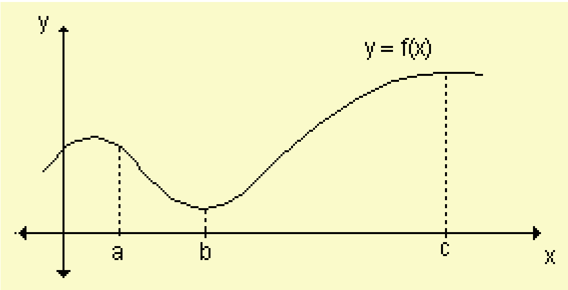
a) $\int_b^c f(x)dx$

b) $\int_a^c f(x)dx$ e indique qué representa.

Respuestas: **a)** *– 6* **b)** *2, representa el área de la región entre la gráfica de f, el eje x, las rectas x= a, x= c.*

Ejercicio 5

En la función definida gráficamente por:



se sabe que $\int_a^c f(x)dx = 6$ y $\int_b^c f(x)dx = 4$. Halle:

a) $\int_a^b f(x)dx$ e indique qué representa

b) $\int_c^b f(x)dx$

Respuestas: **a)** $\int_a^b f(x)dx = 2$ *e indica el área de la zona entre la gráfica de f, el eje x, las rectas x = a y x = b.*

b) $\int_c^b f(x)dx = -4$.

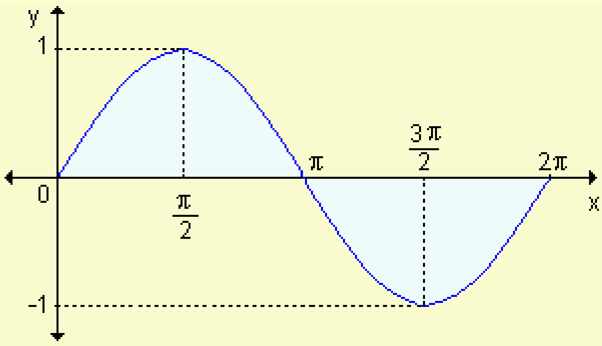
CÁLCULO DE ÁREAS

Se incluyen aquí los ejercicios para calcular áreas y sus respuestas

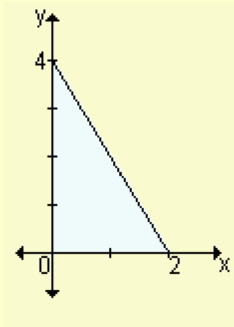
Ejercicio 6

Escriba, sin calcular, una integral definida que indique el área de la región sombreada.

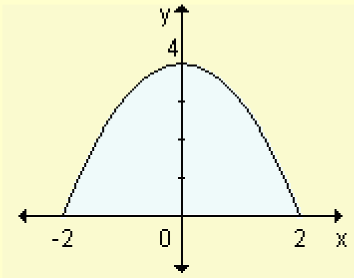
a)



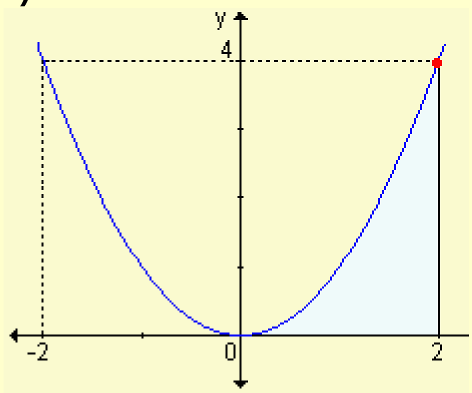
b)



c)



d)



Respuestas:

a) $2\int_0^{\pi} sen x\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen x\,dx$

b) $\int_0^{2}(4-2x)\,dx$

c) $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx = 2\int_0^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx$

d) $\int_0^{2} x^2\,dx$

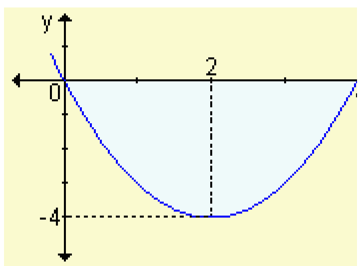
<u>Ejercicio 7</u>

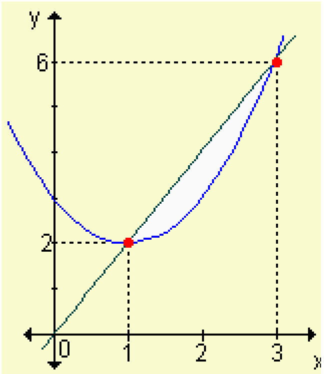
En los siguientes gráficos determine el valor del área sombreada:

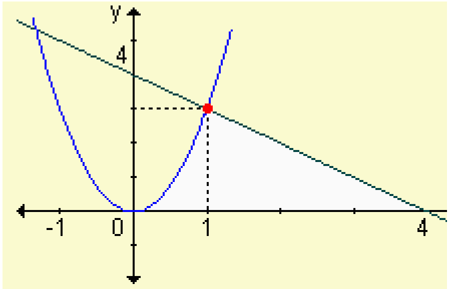
a)

b)

c)



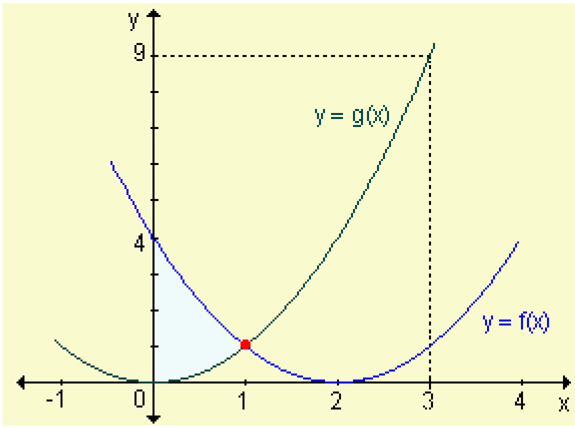




Respuestas: **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{11}{2}$ **c)** $\frac{32}{3}$

Ejercicio 8

Dada la siguiente gráfica



halle:

a) las ecuaciones de las curvas,

b) el área de la zona sombreada.

Respuestas: **a)** $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ **b)** *10*

Ejercicio 9

Grafique la región limitada por las curvas y calcule el área determinada por ambas.

a) $y = x^2$ con la recta $y = 2x + 3$

b) el eje de abscisas, la recta $y = x + 1$ y la recta $x = 4$

c) el eje de abscisas, la curva $y = x^2 - 1$ y la recta $x = 2$

d) $y = x^2 + 2x - 1$ con la recta $y = - x - 1$

e) $y^2 = 4x$ con la recta $y = 2x - 4$

f) $y = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 10$

g) $y = x^2$ con la recta $y = 3 - 2x$

h) $y = \sqrt{x}$ con $y = x^2$

i) $y = 4 - x^2$ con la recta $y = x + 2$

Respuestas: **a)** $\frac{32}{3}$ **b)** $\frac{25}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{9}{2}$ **e)** *9* **f)** *13,64* **g)** $\frac{32}{3}$ **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{9}{2}$

Ejercicio 10

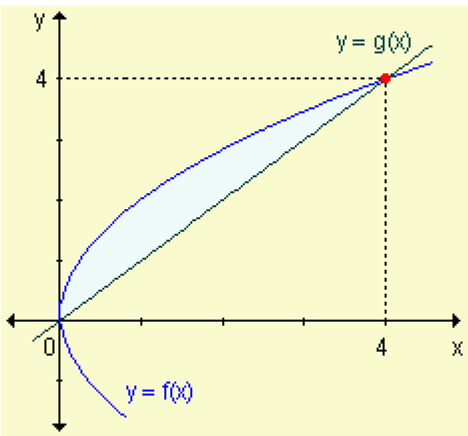
Halle el área limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y el segmento determinado por los puntos $A(- 2, - 6)$ y $B(4, 6)$.

Respuesta: *36*

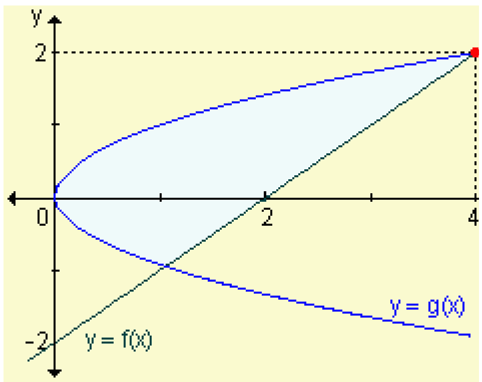
Ejercicio 11

Determine el área sombreada en las siguientes gráficas:

a)



b)



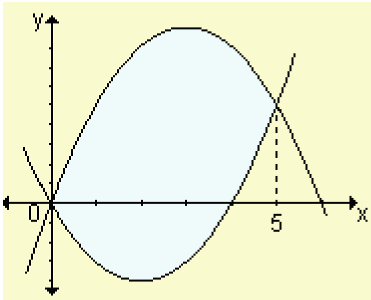
Respuestas: **a)** $\frac{8}{3}$ **b)** $\frac{9}{2}$

Ejercicio 12

Halle el área encerrada por las curvas $y = x^2 - 4x$ e $y = 6x - x^2$. Grafique.

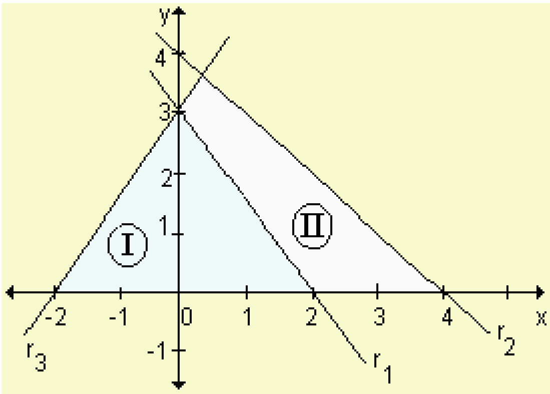
Respuesta:

el área vale $\frac{125}{3}$



Ejercicio 13

Dada la siguiente gráfica



halle:

a) las ecuaciones de las rectas

b) el área de las zonas I y II indicadas en el gráfico.

Respuesta: **a)** $r_1: y = 3 - \frac{3}{2}x;\ r_2: y = -x + 4;\ r_3: y = \frac{3}{2}x + 3$ **b)** $AI = 6\quad AII = \frac{24}{5}$

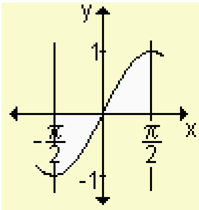
Ejercicio 14

a) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x\, dx$

b) Determine el área de la región comprendida entre la curva $y = \text{sen } x$, el eje x y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Grafique.

c) Analice por qué no se obtiene el mismo resultado en **a)** y **b)**.

Respuesta: **a)** *0* **b)** *el área vale 2*

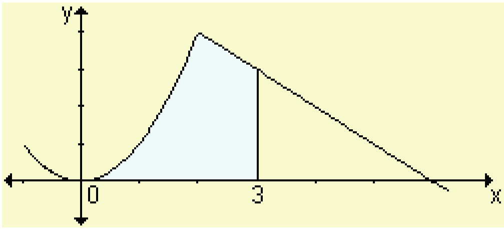


c) *No se puede calcular el área como la integral planteada en **(a)** ya que da 0 pues las dos tienen el mismo valor absoluto pero distinto signo,geométricamente la región consta de dos partes simétricas respecto del eje x.*

Ejercicio 15

Calcule el área bajo la curva $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 6-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ desde 0 hasta 3. Interprete gráficamente.

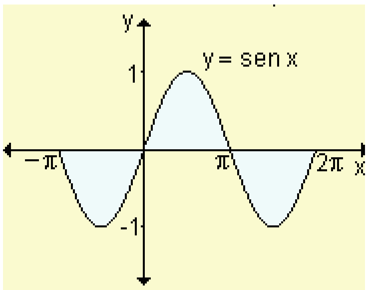
Respuesta:



el área vale $\frac{37}{6}$

Ejercicio 16

Escriba la integral definida que proporciona el área de la región (no calcule el valor del área)

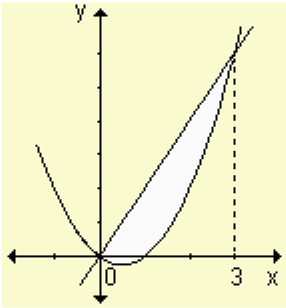


Respuesta: $A = 3\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

Ejercicio 17

Halle el área limitada por la parábola $y = x^2 - x$ y la recta que une los puntos P(1, 2) y Q(– 3, – 6). Grafique.

Respuesta: $\frac{9}{2}$



Ejercicio 18

Halle, utilizando integrales, el área del triángulo limitado por las rectas de ecuación $y - 3x = 0$; $x - 3y = 0$ y $x + y = 4$.

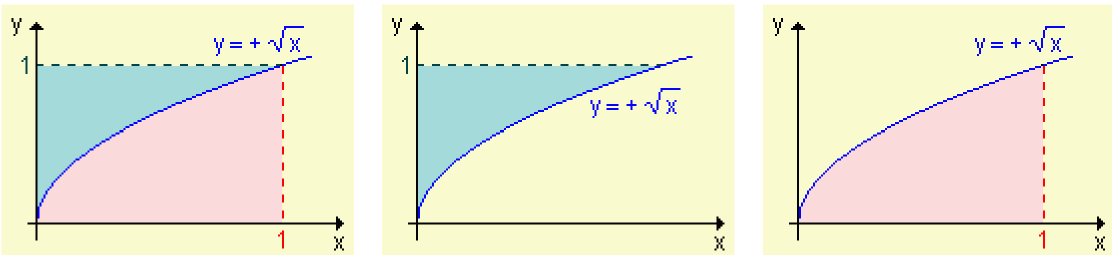
Respuesta: *el área vale 4*

Ejercicio 19

Calcule el área de la zona limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ y el eje de abscisas.

Respuesta: *el área vale 8*

Ejercicio 20



Halle el valor de las áreas sombreadas.

Obtenga conclusiones teniendo en cuenta que la suma de las áreas de las dos regiones coincide con el área del cuadrado de medida de lado una unidad.

Consulte la bibliografía a fin de ampliar sus conocimientos mediante la resolución de nuevos ejercicios.