UADY
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÓDULO 2

Geometría plana y Trigonometría

Contenido

8. Identidades trigonométricas
- 8.1 Identidad y Ecuación
- 8.2 Identidades cociente
- 8.3 Identidades pitagóricas
- 8.4 Identidades recíprocas
- 8.5 Demostración de Identidades trigonométricas compuestas

Bibliografía

1. Barnett, R. (1990). Geometría. Serie Schaum. Ed. Mc Graw Hill.
2. Colonia, N.; Burgos, J.; Pérez, L. (2004). Geometría. Ed. Mc. Graw Hill.
3. May, A.; Pech, J.; Reyna, L. (2000). Matemáticas 3. Trigonometría y Geometría analítica básicas. Ed. Progreso.
4. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. Geometría Euclideana. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, 1987.
5. Steward, K.; Redlin, L.; Watson, S. (2000). Precálculo. Ed. Thompson, 3ra. Ed.
6. Wentworth, J.; Smith, D. (1997). Geometría plana y del espacio. Ed. Porrúa. 24ª. Ed.

CURSO DE NIVELACION ACADÉMICA
CALENDARIO DE ACTIVIDADES

ALGEBRA	Del 12 al 16 de julio	8:00 A 12:30 HORAS
GEOMETRÍA PLANA Y TRIGONOMETRÍA	Del 19 al 23 de julio	8:00 A 12:30 HORAS
GEOMETRÍA ANALÍTICA	Del 26 al 30 de julio	8:00 A 12:30 HORAS
PRECÁLCULO	Del 2 al 6 de agosto	8:00 A 13:30 HORAS

1. ELEMENTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DEDUCTIVO (DEMOSTRACIÓN)

- **Proposición**. Enunciado de un hecho, ley, principio o de una cuestión por resolver.
- **Axioma**. Proposición, que siendo evidente, no requiere demostración.
- **Postulado**. Proposición cuya verdad, aunque no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración.
- **Teorema**. Proposición cuya verdad necesita demostración.
- **Corolario**. Proposición que es consecuencia inmediata de otra y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo.
- **Hipótesis**. En un teorema, es lo que se supone dado o cierto. Es la información con la que se cuenta para demostrar el teorema.
- **Tesis**. En un teorema, es lo que se quiere demostrar, la expresión o propiedad geométrica o matemática que se deducirá a partir de la hipótesis.

Ejemplos de axiomas
1. Si a cantidades iguales se suman o sustraen cantidades iguales, los resultados son iguales.
2. Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales (este axioma no se aplica cuando el divisor es cero).
3. Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
4. Toda cantidad puede reemplazarse por su igual.
5. Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.

Ejemplos de postulados
1. Por dos puntos dados cualesquiera puede hacerse pasar una recta y sólo una.
2. El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.
3. Es siempre posible describir una circunferencia de centro y radio dados.
4. Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.
5. Todos los ángulos de lados colineales son iguales.

Ejemplos de corolarios
1. Dos puntos determinan una recta.
2. Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.
3. Todos los ángulos rectos son iguales.
4. En un punto cualquiera de una recta puede levantarse un perpendicular a esa recta y sólo una.
5. Ángulos iguales tienen complementos iguales, suplementos iguales y conjugados iguales.

Ejemplos de teoremas
1. Si un segmento es dado, entonces este tiene exactamente un punto medio.
2. Si dos ángulos son congruentes y suplementarios, entonces cada ángulo es un ángulo recto.
3. Si dos ángulos son complementarios con dos ángulos congruentes, entonces los dos ángulos son congruentes entre sí.
4. Si un triangulo es equiangular, entonces el triangulo es equilátero.
5. Si dos secantes intersecan en el interior de un círculo, entonces la medida del ángulo formado es un medio de la suma de las medidas de los arcos interceptados por el ángulo y su ángulo vertical.

2. ÁNGULOS

2.1 Definición y clasificación de ángulos

Definición: Un ángulo es la figura formada por dos semirrectas que se interceptan en un punto. Las semirrectas son los lados del ángulo y el punto de intersección es su vértice.

Los ángulos se clasifican de la siguiente manera:
1. Según su medida:

Ángulo	Definición	Ejemplos
Ángulo agudo θ	$0º < \theta < 90º$	12º, 45º, 89º
Ángulo recto θ	$\theta = 90º$	
Ángulo obtuso θ	$90º < \theta < 180º$	91º, 157º, 179º
Ángulo llano o rectilíneo	$\theta = 180º$	
Ángulo reflejo o entrante	$180º < \theta < 360º$	190º, 240º, 350º

2. Por pares de ángulos:

Pares de ángulos	Definición	Ejemplos
Ángulos complementarios α y β	$\alpha + \beta = 90º$	21º,79º; 0º, 90º ; 45º, 45º
Ángulos suplementarios α y β	$\alpha + \beta = 180º$	115º, 65º ; 2º, 178º ; 50º, 130º
Ángulos conjugados α y β	$\alpha + \beta = 360º$	36º, 324º ; 103º, 257º ; 180º, 180º

2.2 Ángulos en grados y radianes

Existen dos sistemas generalmente usados para medir los ángulos. En matemáticas elementales el sistema más empleado es el de la *medida en grados*, en éste la unidad es el grado, el cual es igual al ángulo central que subtiende un arco cuya longitud es igual a $\frac{1}{360}$ de la longitud de la circunferencia. El grado se subdivide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

Otro sistema es el de *medida circular*, en éste la unidad es el **radián** entendido como la medida del ángulo central de una circunferencia subtendido por un arco igual en longitud al radio de la circunferencia.

Para calcular la medida en radianes correspondientes a 360º, se debe encontrar el número de veces que se puede trazar un arco circular de longitud r a lo largo de la circunferencia, resultando un número irracional. Como el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π radianes corresponden a 360º.

Relaciones entre grados y radianes

1) $180º = \pi$ radianes	2) $1º = \frac{\pi}{180}$ radián $\approx$ .0175 radián	3) 1 radián $= \frac{180º}{\pi} \approx 57.29º$

Cuando se usa la medida angular en radianes, no debe indicarse unidades; en consecuencia, si un ángulo mide 5 radianes, se escribe $\theta = 5$, en lugar de $\theta = 5$ radianes.

Ejercicios. Los ángulos siguientes están dados en medida circular (radianes), expresarlos en grados.

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{7\pi}{5}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$ 4) $\frac{\pi}{2}$ 5) $\frac{\pi}{4}$ 6) $\frac{4\pi}{3}$

7) 1.6 8) $\frac{1}{2}$ 9) 3 10) $\frac{3\pi+2}{5}$ 11) $\frac{\pi+1}{6}$ 12) $\frac{4\pi-1}{3}$

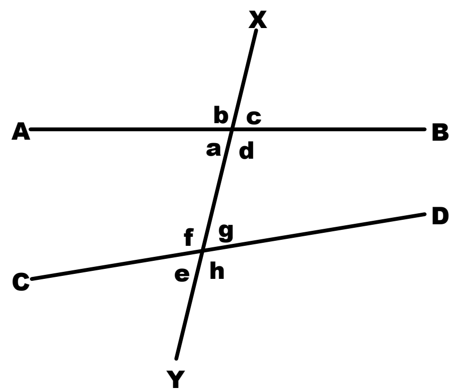
Expresar los ángulos siguientes en radianes.

13) 22.5º	14) 142º 43’ 2’’	15) 45.6º	16) 135º
17) 125º 23’ 19’’	18) 243.87º	19) 100.28º	20) 60º
21) 120º	22) 990º	23) 720º	24) 205º 35’ 4’’

2.3 Ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal

Definición. Llámese *transversal* o *secante* de dos o más rectas, a toda recta que las corta.

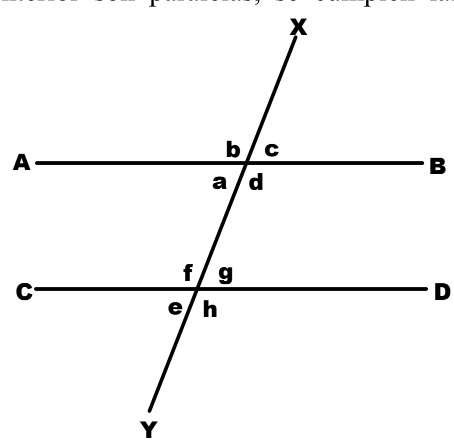
Sea XY la transversal que corta a las rectas *AB* y *CD*, se determinan 8 ángulos que se muestran en la siguiente figura:



Los ángulos *a*, *d*, *g, f* se llaman ángulos *internos*.
Los ángulos *b*, *c*, *h*, *e*, son ángulos *externos*.

Tomados en pares:
d y *f*, *a* y *g*, se llaman ángulos *alternos internos*
b y *h*, *c* y *e*, *alternos externos*;
b y *f*, *c* y *g*, *e* y *a*, *h* y *d*, *correspondientes*.

En particular, cuando las rectas *AB* y *CD* de la figura anterior son paralelas, se cumplen las siguientes propiedades:

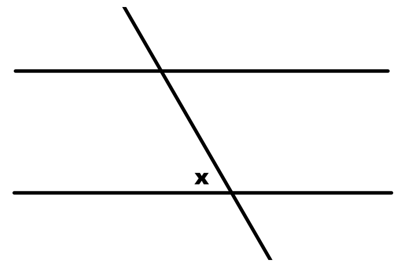


- Los ángulos alternos internos son iguales.
- Los ángulos alternos externos son iguales.
- Los ángulos correspondientes son iguales.
- Los ángulos externos situados de un mismo lado de la transversal, así como los internos, son suplementarios (en la figura, los pares *e* y *b*, *h* y *c*, *f* y *a*, *d* y *g*, son suplementarios), llamados *conjugados externos e internos*, respectivamente.

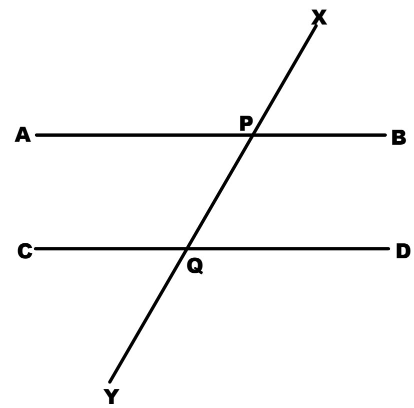
E inversamente, dadas dos rectas cortadas por una transversal, si alguna de las propiedades anteriores se cumple, esas dos rectas son paralelas.

Ejercicios

1. Considere dos rectas paralelas cortadas por una transversal tal y como se muestra en la siguiente figura:
Si $\angle x = 60º$, ¿cuál es el valor de cada uno de los otros siete ángulos?



2. Consideremos la figura siguiente en donde *AB* es paralela a *CD*, *XY* es la transversal que las corta en los puntos *P* y *Q* respectivamente:



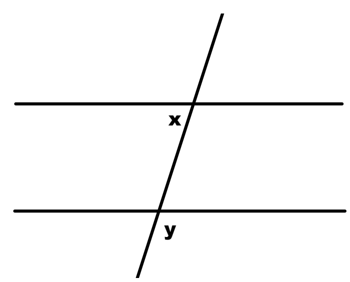
a) Si $\angle APQ = \frac{1}{2}\angle QPB$, ¿cuál es el valor en grados de cada uno de los 8 ángulos?

b) Si $\angle DQY = 135º$, ¿cuál es el valor de los otros ángulos?

c) Supóngase que $\angle DQP = x$ y $\angle DQY = y$. ¿Cuáles son los valores de *x* e *y*, si $y - x = 100º$?

d) Dados $\angle CQY = x, \angle APX = y, x = \frac{1}{5}y$, calcular *x* e *y*.

3. En la figura siguiente:

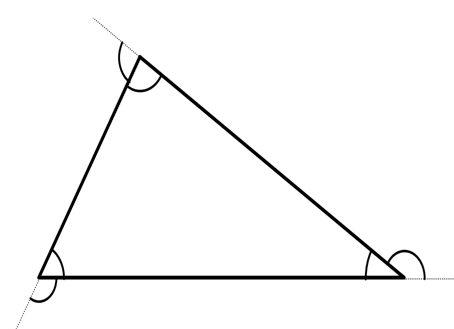


a) Si $x = 72º$, $y = \frac{3}{2}x$. Determinar si las rectas son paralelas.

b) Si $x = 73º$, $y - x = 32º$. Determinar si las rectas son paralelas.

3. TRIÁNGULOS

3.1 Conceptos básicos y clasificación de triángulos



Un triángulo es un área plana delimitada por tres segmentos de recta. Los elementos del triángulo son: tres vértices, tres lados y tres ángulos. La suma de la medida de los tres ángulos internos es 180°.
A cada ángulo interno del triángulo le corresponde un ángulo exterior. La medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de la medida de los dos ángulos interiores no adyacentes. La suma de la medida de los tres ángulos exteriores es 360°.

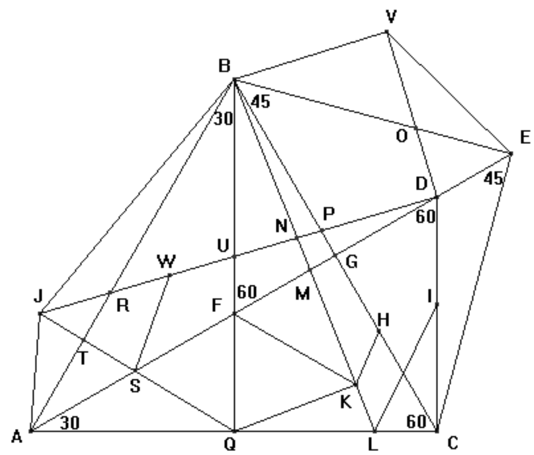
<u>Clasificación de los triángulos según sus lados</u>

- *Triángulo escaleno*: Tiene sus tres lados diferentes.
- *Triángulo isósceles:* Tiene al menos dos de sus lados iguales.
- *Triángulo equilátero*: Tiene sus tres lados iguales.

Clasificación de los triángulos según sus ángulos

- *Triángulo rectángulo*: Tiene un ángulo recto.
- *Triángulo obtusángulo*: Tiene un ángulo obtuso.
- *Triángulo acutángulo*: Tiene sus tres ángulos agudos.
- *Triángulo equiángulo*: Tiene sus tres ángulos iguales.

Ejercicio. Analiza la siguiente figura y clasifica a los triángulos ABC, ACD, BCE, BFE, AGC y ACE según sus lados y sus ángulos (los números que aparecen representan las medidas de los ángulos en grados).



3.2 Perímetro y área de un triángulo

Ejercicios

1. Determinar las áreas de los triángulos cuyas bases y alturas son las siguientes respectivamente:
a) 45mm y 2cm (en cm^2)
b) 48Dm y 275m (en Dm^2)

2. Calcular las alturas de los triángulos cuyas áreas y bases son respectivamente:
a) $0.06dm^2$ y 4cm (en cm.)
b) $150000cm^2$ y 0.5Dm (en Dm)

3. Calcular los perímetros de los triángulos según los casos siguientes:
a) La mitad de la longitud de la base del triángulo isósceles es 3.5cm y su área es de $6300mm^2$ (en cm.)
b) Un triángulo rectángulo con base 3m, y área $12m^2$ (la base no es la hipotenusa).
c) Suponiendo que los triángulos del ejercicio 1 son isósceles, calcular los perímetros de dichos triángulos con unidades de medida según sus bases.

4. En un triángulo ABC, el ángulo BAC es congruente con el ángulo BCA, si $AB = 5x$, $BC = 2x + 18$ y $AC = x + 4$, calcular las longitudes de los lados, el perímetro y el área de dicho triángulo.

Formula de Herón
Una forma alternativa de calcular el área de un triángulo en función de sus lados, es por medio de la fórmula siguiente:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

En donde s es el semiperímetro y a, b, c, son los lados del triángulo.

Ejercicios

1. Determinar el área de los triángulos cuyos lados son:
a) 4, 5, 6.
b) 5, 6, 7.

2. Sabiendo que el área de un triángulo es $\frac{\sqrt{15}}{4}$ y que la medida sus lados es 1 y 2, calcular la longitud del tercer lado (dos soluciones). Para cada solución, ¿Qué tipo de triángulo se obtiene?

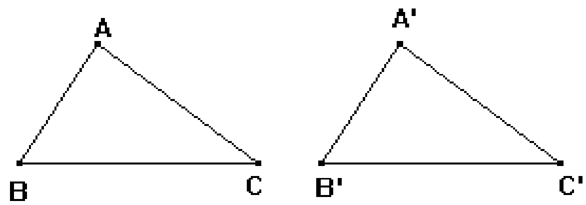
3. Sabiendo que el área de un triángulo con lados 3 y 4 es 6, hallar la longitud del tercer lado. ¿Qué tipo de triángulo es según sus ángulos?

3.3 Rectas y puntos notables en un triángulo

- **Mediana**. Es el segmento trazado desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las tres medianas de un triángulo se llama *baricentro*.
- **Altura**. Es la perpendicular trazada desde un vértice, hasta el lado opuesto o a su prolongación. El punto donde concurren las tres alturas de un triángulo se llama *ortocentro*.
- **Bisectriz**. Es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales. El punto donde concurren las tres bisectrices se llama *incentro*.
- **Mediatriz**. Es la perpendicular en el punto medio de cada lado del triángulo. El punto donde concurren las tres mediatrices se le conoce como *circuncentro*.

3.4 Triángulos congruentes

Dos triángulos se dicen que son **congruentes** si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Si dos triángulos son congruentes sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. El símbolo de congruencia es $\cong$.



Si el $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ entonces:

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C';\ \angle A = \angle A'\ \angle B = \angle B'\ \angle C = \angle C'$$

Para establecer que dos triángulos son congruentes se utilizan los criterios siguientes:

- **Criterio LAL.** Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales entonces los triángulos son congruentes.
- **Criterio ALA.** Si dos triángulos tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a él, entonces los dos triángulos son congruentes.
- **Criterio LLL.** Si tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- **Criterio Hipotenusa-Cateto.** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son respectivamente iguales con la hipotenusa y el cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos rectángulos son congruentes.

Demuestra los teoremas siguientes:

1. Si dos segmentos AD y BE se cortan en C, de modo que C es punto medio de AD y BE, entonces los triángulos ABC y DEC son congruentes.

2. La altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana, bisectriz y mediatriz.

3. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes los dos catetos.

4. En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.

5. En un triángulo, a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.

6. Todo triángulo equilátero es equiángulo.

7. Todo triángulo equiángulo es equilátero.

8. Los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero forman otro triángulo equilátero.

9. Si en los lados opuestos de una misma base se construyen dos triángulos isósceles, demuéstrese que la recta que une los vértices de los ángulos opuestos a la base es la bisectriz de dichos ángulos.

10. Demuéstrese que si las perpendiculares *PN* y *PM* a los lados del ángulo *AOB* son iguales, el punto *P* está en la bisectriz del ángulo.

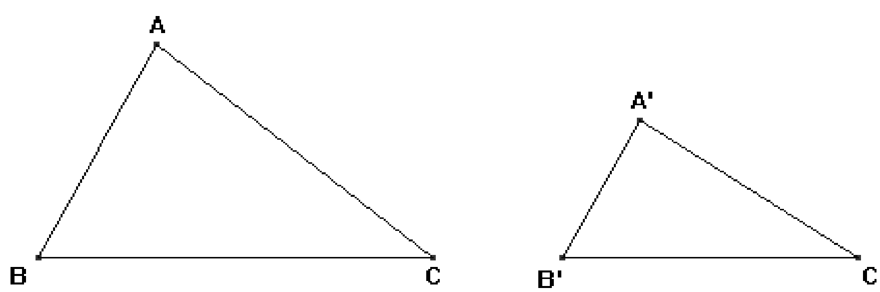
3.5 Semejanza de triángulos

Se llama *proporción* a la igualdad entre dos razones, por ejemplo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, donde las cantidades a y c se les conoce como *antecedentes*, y las cantidades b y d, *consecuentes*. Respecto a su posición, las cantidades a y d reciben el nombre de *extremos*, y las cantidades b y c, reciben el nombre de *medios*.

Una *proporción continua* es aquella en donde los medios son iguales y al medio común de esta proporción se le conoce como *media proporcional*.

Si a los segmentos a y b les corresponden los segmentos a' y b' de manera que formen la proporción $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ se dice que los cuatro segmentos son proporcionales.

Dos triángulos se dicen que son **semejantes** si sus ángulos son iguales y sus lados respectivos son proporcionales.



El símbolo de semejanza es $\sim$.

Si el $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ entonces:

$$\angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B' \quad \angle C = \angle C' \quad \text{y} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Para establecer que dos triángulos son semejantes se emplean los criterios siguientes:

- **Criterio AAA.** Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivos iguales, entonces son semejantes.
- **Criterio LAL.** Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.
- **Criterio LLL.** Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demuestra los teoremas siguientes:

T. 1. Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, entonces los otros dos lados quedan divididos en segmentos proporcionales.

T. 2. Si una recta divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.

T. 3. La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

T. 4. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes.

T. 5. Dos triángulos rectángulos que tienen sus catetos proporcionales, son semejantes.

T. 6. Dos triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo de uno, congruente con un ángulo agudo del otro, son semejantes.

T. 7. Dos triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa y un cateto de uno, proporcionales con la hipotenusa y un cateto del otro, son semejantes.

T. 8. Sea *ABC* un triángulo, en *BA* tómese un punto *D* y trace una paralela a *BC* por *D*, de manera que corte a *AC* en *E*, por *C* trace una paralela a *AB* y sea *F* el punto de corte de ésta con *DE* (su prolongación). Demuestre que los triángulos *ADE* y *FCE* son semejantes.

T. 9. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, que corta a los otros dos lados en puntos diferentes, determina un triángulo semejante al primero.

T. 10. En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa, divide al triángulo dado en dos triángulos semejantes a éste y semejantes entre sí.

T. 11. En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es la media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa (los determinados por esa misma altura).

T. 12. Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados homólogos (las bases).

T. 13. Las alturas correspondientes entre dos triángulos semejantes son proporcionales entre sí.

4. PARALELOGRAMOS

4.1 Definición y clasificación de cuadriláteros

- **Cuadrilátero.-** Es cualquier polígono de cuatro lados. Los cuadriláteros se clasifican en:
- **Paralelogramo.-** Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.
- **Trapecio.- C**uadrilátero que tiene dos, y solamente dos, lados opuestos paralelos. En particular un trapecio cuyos lados NO paralelos son iguales recibe el nombre de *trapecio isósceles.*
- **Trapezoide.-** Cuadrilátero que no tiene lados opuestos paralelos.

4.2 Propiedades de los paralelogramos

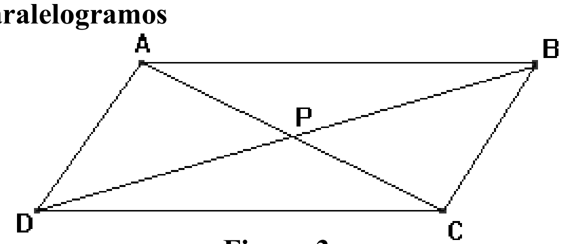


Figura 3

Propiedad 1.- Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.

En la figura 3, $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$.

Propiedad 2.- Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.

En la figura 3, $\Delta ADC \cong \Delta ACB$ y $\Delta ADB \cong \Delta BDC$.

Propiedad 3.- Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

En la figura 3,. $AB = DC$ y $AD = BC$.

Propiedad 4.- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

En la figura 3, $\angle A = \angle C$ y $\angle B = \angle D$.

Propiedad 5.- Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

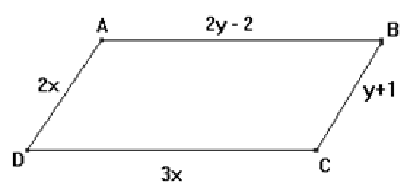
Entonces en la figura 3, se cumple que____

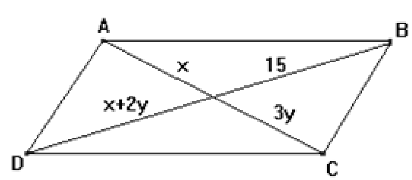
Propiedad 6.- Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

En la figura 3, se tiene que: $AP = PC$ y $DP = PB$.

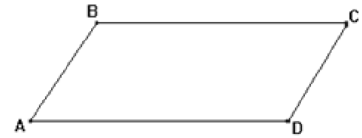
Ejercicios.

1.- En los casos siguientes, el cuadrilátero *ABCD* dado es un paralelogramo. Aplicando las propiedades mencionadas, calcular los valores de *x* e *y*.



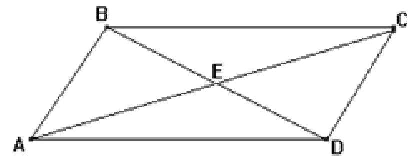


2.- Si *ABCD* es un paralelogramo, calcular los valores de x e y en los siguientes casos.



a) $AD = 5x$, $AB = 2x$, $CD = y$, perímetro = 84
b) $\angle A = 4y - 60$, $\angle C = 2y$, $\angle D = x$
c) $\angle A = 3x$, $\angle B = 10x - 15$, $\angle C = y$

3.- Si ABCD es un paralelogramo, calcular los valores de x e y en los siguientes casos**.**



a) $AE = x$, $EC = 4y$, $BE = x - 2y$, $ED = 9$
b) $AE = 3x - 4$, $EC = x + 12$, $BE = 2y - 7$
$ED = x - y$
c) $AE = 2x + y$, $AC = 30$, $BE = 5x + y$
$BD = 24$.

4.3 Rectángulo, Rombo y cuadrado: características especiales

Los rectángulos, rombos y cuadrados pertenecen al conjunto de los paralelogramos, cada uno puede definirse como un paralelogramo de la manera siguiente:

Rectángulo.- Es un paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos, de aquí que todos sean iguales.

Rombo.- Es un paralelogramo que tiene todos sus lados iguales.

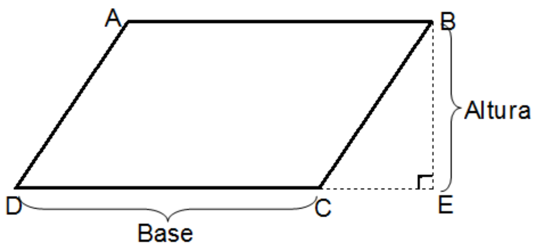
Cuadrado.- Es un paralelogramo que es equilátero y equiángulo. Por lo tanto el cuadrado es, al mismo tiempo, rectángulo y rombo.

Las principales características del rectángulo, cuadrado y rombo se presentan a continuación.

	PARALELOGRAMO	RECTÁNGULO	ROMBO	CUADRADO
Las diagonales se bisecan entre sí	✓	✓	✓	✓
Las diagonales son congruentes	✓	✓		✓
Las diagonales son perpendiculares			✓	✓
Las diagonales bisecan los ángulos del vértice			✓	✓
Las diagonales forman 2 pares de triángulos congruentes	✓	✓	✓	✓

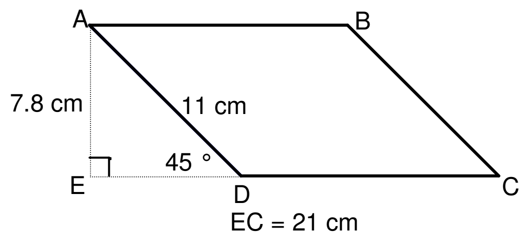
4.4 Perímetro y área de paralelogramos

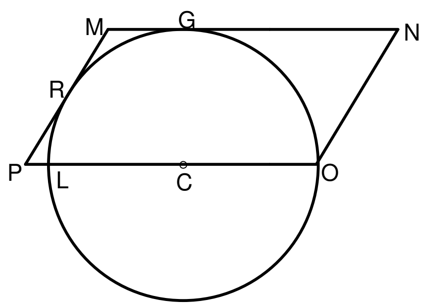
El perímetro en los paralelogramos se define de la misma forma que en cualquier otra figura plana: es la suma de las longitudes de cada uno de sus lados. Para facilitar su cálculo siempre será bueno que recuerdes sus propiedades.
El área se define como el producto de la base por la altura. La base puede ser cualquiera de sus lados y la altura será el segmento trazado en forma perpendicular desde el lado opuesto a la base.



Ejercicios

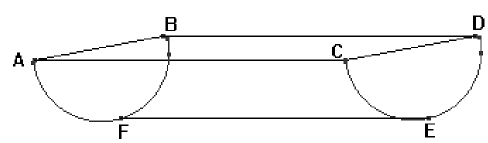
1. Calcula el área de los paralelogramos siguientes:



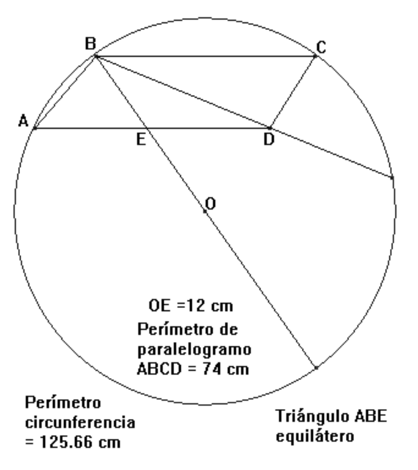


Perímetro *MNOP* = 24.5 cm
CO = 3.7 cm
ON = 4.3 cm
Arco *LR*= 32º

2. En un rancho el agua se le coloca a los animales en un pieza tal y como se muestra en la figura de abajo. Calcula el área del paralelogramo *ABDC* sabiendo que el área de la semicircunferencia que delimita la pieza es de 789.25 cm^2, el largo *FE* es de 42 cm. y que $AB \perp AC$.



3. Con los datos que se proporcionan calcula el área del paralelogramo *ABCD*.



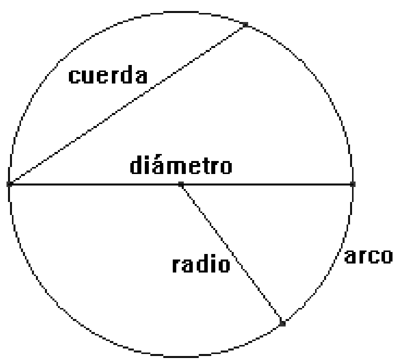
5. LA CIRCUNFERENCIA

5.1 Definiciones

Circunferencia. Lugar geométrico de todos los puntos en un mismo plano cuya distancia a un punto fijo se mantiene constante. El punto fijo recibe el nombre de *centro* y la distancia fija recibe el nombre de *radio*.
Círculo. Conjunto de puntos encerrados por la circunferencia.

5.2 Elementos de la circunferencia

Los principales segmentos notables en la circunferencia son:



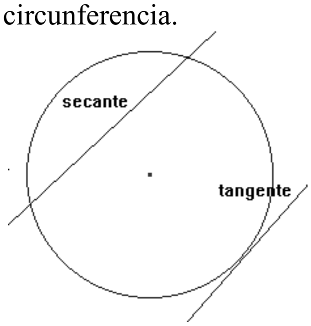
- **Cuerda**. Segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro**. Roda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Es la mayor cuerda.
- **Radio**. Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos.
- **Arco**. Porción de la circunferencia.
- **Longitud de arco**. Está determinado por:

$$\frac{2\pi r\alpha}{360°}$$

donde α es la medida del ángulo central.

5.3. Tangentes y secantes en una circunferencia

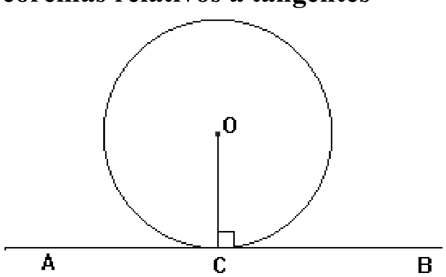
Existen dos rectas especiales de la circunferencia: Las rectas tangente y secante a una circunferencia.



- La **secante a una circunferencia** es cualquier recta que la corta en dos puntos.

- La **tangente a una circunferencia** es cualquier recta que la toca en un punto y sólo uno.

Teoremas relativos a tangentes



$AB \perp OC$

Teorema 1. Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

Teorema 2. Una recta es tangente a una circunferencia si es perpendicular a un radio en su extremo externo.

En la figura*, si AB es perpendicular al radio OC en C, entonces AB es tangente a la circunferencia.*

Teorema 3. Si una recta es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, entonces pasa por el centro de la circunferencia.

En la figura anterior, *si AB es tangente a la circunferencia en C y OC es perpendicular a AB en C, entonces OC pasa por el centro de la circunferencia.*

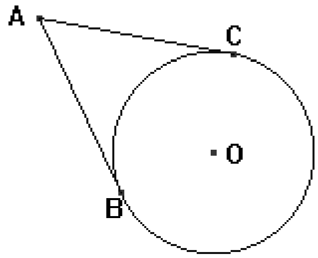


Figura 2

Teorema 4. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales.
En la figura 2, *AC y AB son tangentes a la circunferencia, entonces AC = AB.*

Teorema 5. La recta que une el centro de una circunferencia con un punto exterior, es bisectriz del ángulo que forman las tangentes trazadas desde ese punto a la circunferencia.

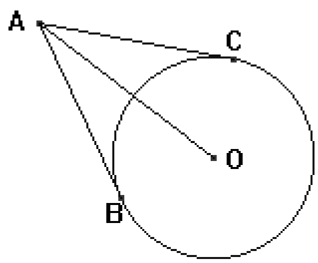
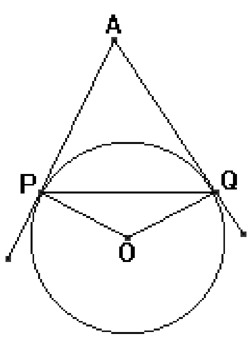


Figura 3

En la figura 3, *el segmento OA une el centro de la circunferencia con un punto exterior a la misma, entonces el segmento OA biseca al ángulo CAB.*

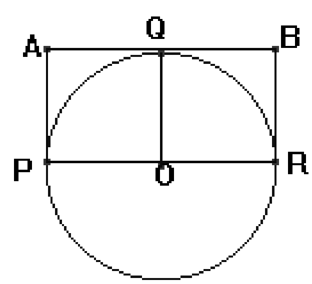
Ejercicios

1



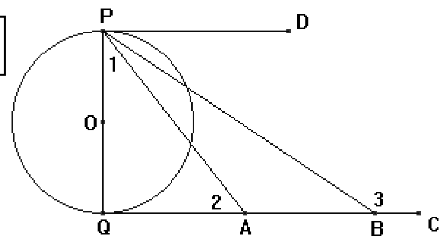
AP y AQ son tangentes
a) Si AP = PQ ¿Qué clase de triángulo es APQ?
b) Si AP = OP ¿Qué clase de cuadrilátero es OPAQ?

2



AP, AB y BR tangentes
Si OQ $\perp$ PR ¿Qué clase de cuadrilátero es PABR?

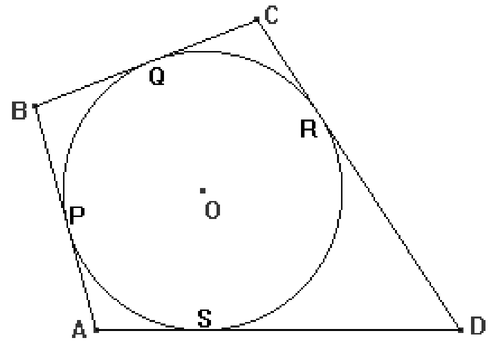
3



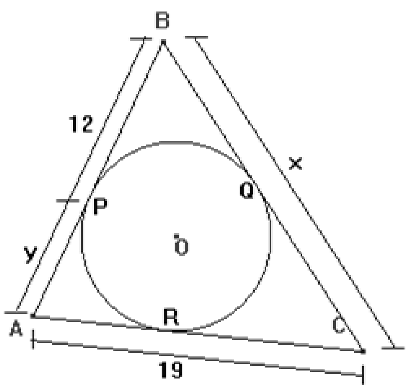
En la figura DP y CQ son tangentes. Calcular la medida del $\angle 2$ y $\angle 3$ si el $\angle OPD$ está trisecado y PQ es un diámetro.

4

El cuadrilátero ABCD es circunscrito.
PA = 10, QC = 5, CD= 13. Calcular *AD.*



5



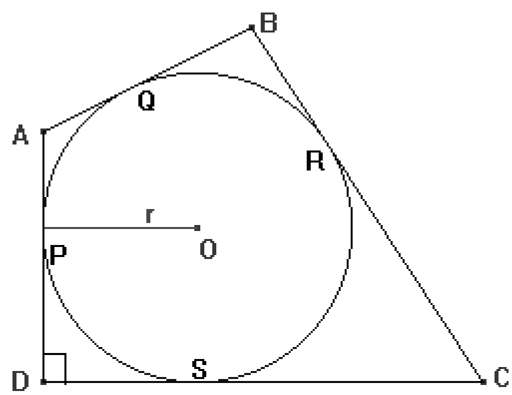
En la figura, el triángulo ABC es inscrito.

a) Si y = 9, calcular el valor de x.
b) Si x = 25, calcular el valor de y.

6

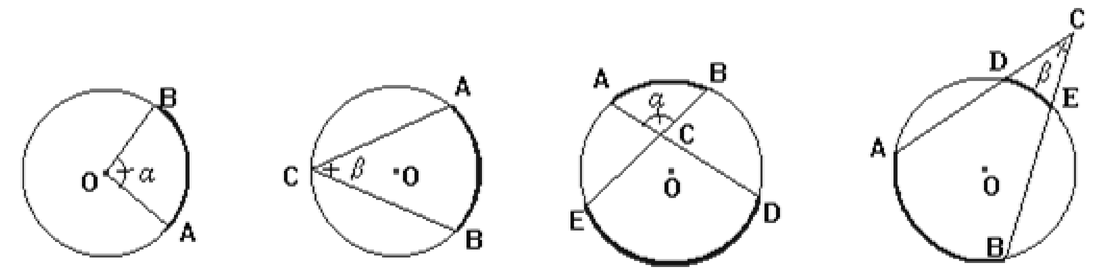
El cuadrilátero $ABCD$ es circunscrito.
$QB = 27$, $BC = 38$.

a) Si $r = 10$, calcular el valor de DC
b) Si $DC = 25$, calcular el valor de r.



5.4 Ángulos en la circunferencia

- **Ángulo central.** Aquel cuyo vértice se encuentra en el centro de la circunferencia y tiene la misma medida que el arco que subtiende sus lados.
- **Ángulo inscrito.** Aquel cuyo vértice se encuentra sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas o bien una cuerda y una tangente. Su medida es igual a la mitad del arco que subtienden sus lados.
- **Ángulo interior o interno.** Aquel que se forma cuando dos cuerdas se intersecan en el interior de una circunferencia. Su medida es igual a la semisuma de los arcos que subtienden sus lados.



ángulo central α ángulo inscrito β ángulo interior α ángulo exterior β

Ángulo exterior o externo. Aquel cuyos lados son: dos secantes o, una tangente y una secante o bien dos tangentes. Su medida es igual a la semidiferencia de los arcos que subtienden sus lados, considerando que al arco de mayor magnitud se le sustraerá el de menor magnitud.

Ángulo central = arco AB

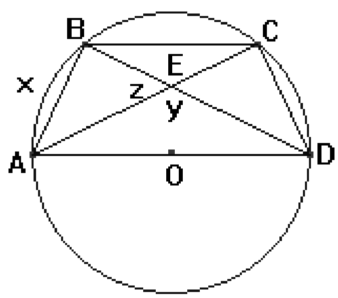
Ángulo inscrito $ACB = \frac{arco\ BA}{2}$

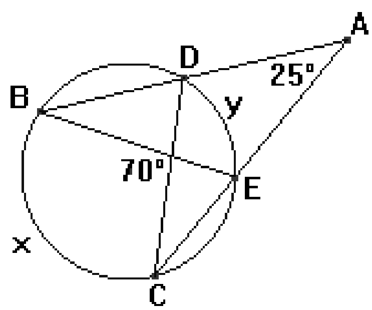
Ángulo interno $ACB = \frac{arco\ BA + arco\ ED}{2}$

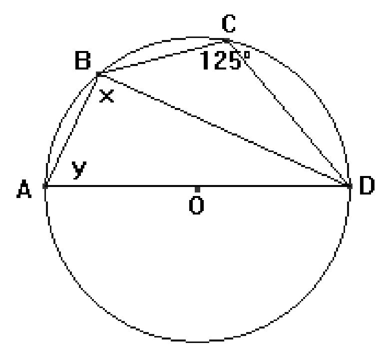
Ángulo externo $ACB = \frac{arco\ AB - arco\ ED}{2}$

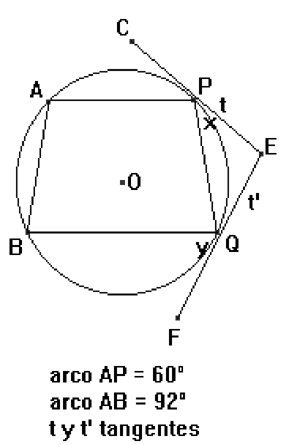
Ejercicios

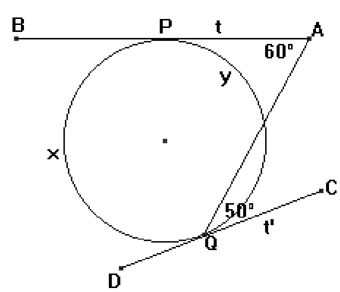
1. En las figuras siguientes, calcular los valores de x e y.

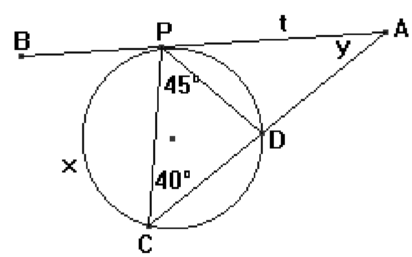










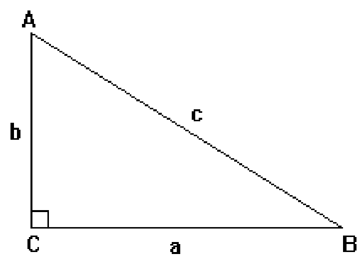


6. RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 Definiciones

Considerando el triángulo ACB rectángulo (situado en la figura de abajo), la notación de sus partes se realiza de la siguiente manera:

- *Los ángulos con letras mayúsculas.*
- *Los lados con la letra minúscula correspondiente al lado opuesto.*



Uno de los objetivos de la trigonometría es mostrar la dependencia existente entre los lados y los ángulos de dicho triángulo y para este objeto se emplean las ***razones trigonométricas****,* mismas que se definen como sigue:

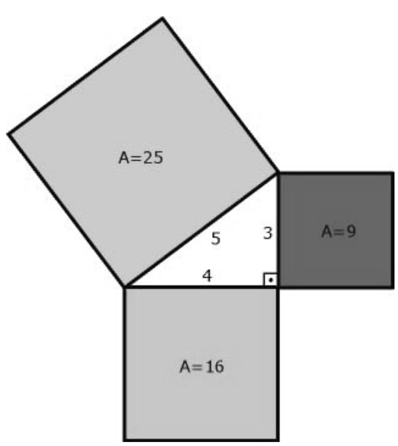
$$senA = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad cotA = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

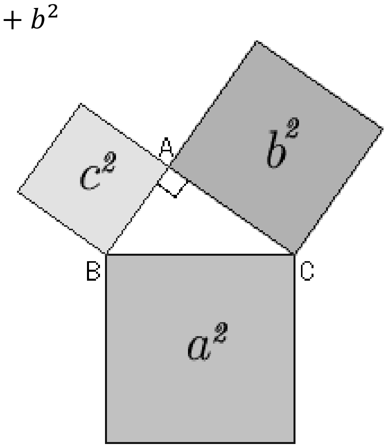
$$cosA = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad secA = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$tanA = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b} \qquad cscA = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

El ***teorema de Pitágoras*** señala que una relación entre los lados del triángulo rectángulo: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$





Ejercicios

1. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos A y B de un triángulo rectángulo ABC donde $\mathrm{a} = 8$ *y* $\mathrm{b} = 15$.

2. Calcular las razones trigonométricas:
a) Del ángulo B, sabiendo que $cosB = 0.6$
b) De los ángulos A *y* B sabiendo que $tanB = 1.3$

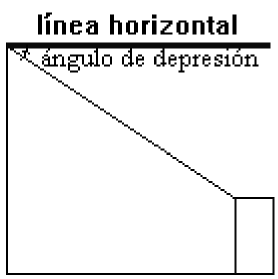
3. Determina las medidas de los lados y ángulos faltantes en cada uno de los triángulos siguientes: (*Considera triángulos rectángulos en C)*

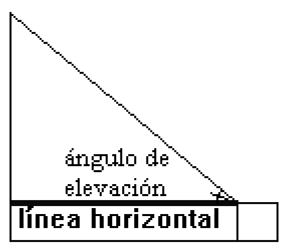
a) $\mathrm{A} = 60°\, 25', \mathrm{a} = 120$
b) $\mathrm{b} = 25, \mathrm{c} = 34$
c) $\mathrm{B} = 37°\, 45', \mathrm{c} = 12$
d) $\mathrm{a} = 15, \mathrm{b} = 18$
e) $\mathrm{c} = 7, \mathrm{a} = 12$

4. Demuestra que la hipotenusa en un triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de sus catetos.

5. Menciona las razones trigonométricas que siempre son menores que 1, las razones que son mayores que 1 y aquellas que pueden ser menores que o mayores que 1. Justifica tus respuestas.

Nota: Los conceptos de ángulo de depresión y ángulo de elevación son muy utilizados para resolver problemas de la vida cotidiana y que involucran triángulos rectángulos.





6. Desde un punto situado a 200 metros, medidos sobre el pie de una horizontal, del pie de una torre, se observa que el ángulo de la cúspide es de 60°. Calcular la altura de la torre.

7. Desde la parte superior de una torre de 120 metros de altura se observa que el ángulo de depresión de un objeto que está a nivel con la base de la torre es de 23° 43'. Calcula las distancias del objeto a la punta y a la base de la torre.

8. ¿Qué ángulo forma la diagonal de un cubo con la diagonal de una cara del mismo cubo trazada desde el mismo vértice?

9. La longitud de lado de un octágono regular es de 12 cm. Calcular la medida de los radios de los círculos inscritos y circunscritos.

10. Desde el punto medio de la distancia entre los pies de dos torres, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60°, respectivamente. Demuestra que la altura de una de las dos torres es el triple de la otra.

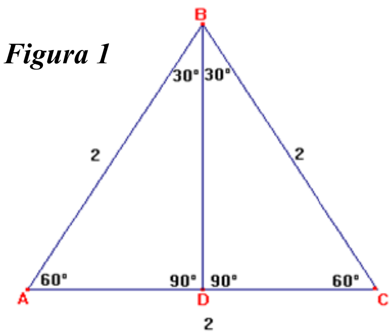
11. Dos boyas son observadas en dirección sur desde lo alto de un acantilado cuya parte superior está 312 metros sobre el nivel del mar. Calcular la distancia entre las boyas si sus ángulos de depresión medidos desde la punta del acantilado son 46° 18’ y 27° 15’, respectivamente.

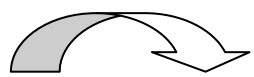
12. Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una llanura encuentra que, desde cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de 10°, y que desde otro lugar, 200 metros más cerca del fuerte, éste se ve bajo un ángulo de 15°. ¿Cuál es la altura del fuerte? ¿Cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

6.2 Razones trigonométricas de ángulos conocidos

Para obtener los valores de las razones trigonométricas de 30° y 60° se utiliza un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 unidades, al cual se le traza su altura, resultando la figura 1.
Tomando uno de los triángulos formados, se obtiene la figura 2, de la cual podemos obtener las funciones trigonométricas de los ángulos antes mencionados.

Figura 1





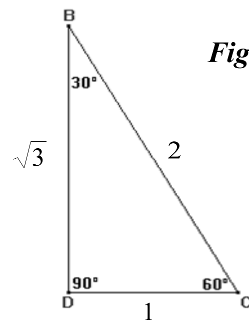
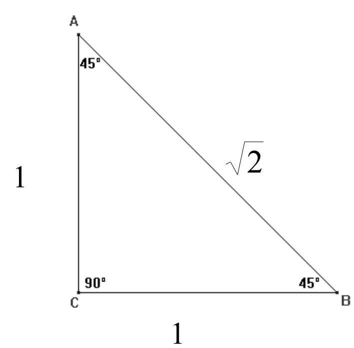


Figura 2

Para obtener los valores de las razones del ángulo de $45°$, se utiliza un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 1 unidad, obteniendo:



Ahora, auxiliándonos de los triángulos anteriores, podemos obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de $30°, 60°\ y\ 45°$.

Ejercicios

1. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $sen^2 60° + cos^2 60° = 1$

b) $tan\ 45° = \frac{sen45°}{cos45°}$

c) $csc^2 30° = cot^2 30° + 1$

d) $(cos45°)(csc30°) + tan30° = \frac{3\sqrt{2}+3}{3}$

2. Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones sin utilizar calculadora:

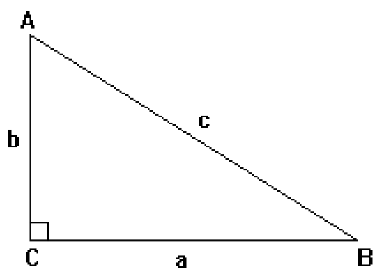
a) $(sen60°)(cos60°) + sec45° =$

b) $\frac{sen^2 45° + cot30°}{cos^2 60°} =$

c) $\frac{cos^2 45° + cot45°}{sec30° + csc60°} =$

6.3 Razones de ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios cuando su suma es 90°.



Nota que ∠A + ∠B = 90°
Entonces ∠A = 90° - ∠B
Por cuestiones de notación diremos:

$$A = 90 - B$$

De esta manera se puede afirmar que:

$$senA = \frac{a}{c} \qquad senB = sen(90° - A) = \frac{b}{c}$$

$$cosA = \frac{b}{c} \qquad cosB = \cos(90° - A) = \frac{a}{c}$$

$$tanA = \frac{a}{b} \qquad tanB = \tan(90° - A) = \frac{b}{a}$$

$$cotA = \frac{b}{a} \qquad cotB = \cot(90° - A) = \frac{a}{b}$$

$$secA = \frac{c}{b} \qquad secB = \sec(90° - A) = \frac{c}{a}$$

$$cscA = \frac{c}{a} \qquad cscB = \csc(90° - A) = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow$$

$$senA = cosB = \cos(90° - A)$$

$$cosA = senB = sen(90° - A)$$

$$tanA = cotB = \cot(90° - A)$$

$$cotA = tanB = \tan(90° - A)$$

$$secA = cscB = \csc(90° - A)$$

$$cscA = secB = \sec(90° - A)$$

Ejercicios

1. Probar que:
a) $\tan 25° - \cot 65° = 0$
b) $\sec 38° + \csc 52° = 2\sec 38°$
c) $\cos 42° + sen\, 48° = 0$

2. Para cada inciso, determina el valor de x que cumple la relación:
a) $\cot(35° - 2x) = \tan(65° + x)$
b) $\dfrac{1}{\sec(120° - 3x)} = \dfrac{1}{\csc(80° + 4x)}$
c) $\dfrac{1}{sen(20° + 4x)} = \dfrac{1}{\cos(30° - 2x)}$

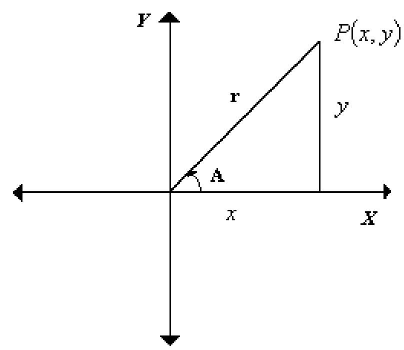
6.4 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Sea A un ángulo ubicado en un sistema de coordenadas rectangulares y sea $P(x, y)$ cualquier punto fuera del origen O en el lado terminal de θ. Si $d(O,P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces:

$$senA = \frac{y}{r} \qquad cotA = \frac{x}{y}, si\ y \neq 0$$

$$cosA = \frac{x}{r} \qquad secA = \frac{r}{x}, si\ x \neq 0$$

$$tanA = \frac{y}{x} \qquad cscA = \frac{r}{y}, si\ y \neq 0$$



Signos algebraicos de las funciones trigonométricas

Función	*Cuadrante I*	*Cuadrante II*	*Cuadrante III*	*Cuadrante IV*
Seno *Cosecante*	+	+	-	-
Coseno *Secante*	+	-	-	+
Tangente *Cotangente*	+	-	+	-

Se cumple lo siguiente:
1. En el **primer** cuadrante **todas las funciones** son **positivas (TO de todas)**
2. En el **segundo** cuadrante el **seno** y su recíproca, la **cosecante**, son **positivas**; las restantes son negativas **(SEN de la función seno)**
3. En el **tercer** cuadrante el **tangente** y su recíproca, la **cotangente,** son **positivas;** las restantes son negativas **(TAN de la función tangente)**
4. En el **cuarto** cuadrante el **coseno** y su recíproca, la **secante**, son **positivas;** las restantes son negativas **(COS de la función coseno)**

Existe un recurso nemotécnico podemos recordar los signos algebraicos de la funciones en cada uno de los cuadrantes. Tomando a partir del primer cuadrante y en orden sucesivo de las sílabas mayúsculas de los paréntesis, se forma la palabra: **TOSENTANCOS.**

Funciones de ángulos suplementarios

$sen\,(180º - A) = sen\,A$	$cos\,(180º - A) = -cos\,A$	$tan\,(180º - A) = -tan\,A$
$csc\,(180º - A) = csc\,A$	$sec\,(180º - A) = -sec\,A$	$cot\,(180º - A) = -cot\,A$

Funciones de – A en términos de A

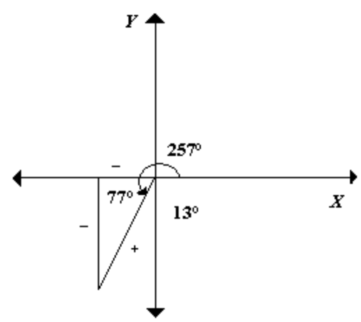
$sen\,(-A) = -sen\,A$	$cos\,(-A) = cos\,A$	$tan\,(-A) = -tan\,A$
$csc\,(-A) = -csc\,A$	$sec\,(-A) = sec\,A$	$cot\,(-A) = -cot\,A$

Reglas generales para reducir cualquier ángulo a funciones de un ángulo agudo

- Cuando un ángulo sea de $180°\pm A$ ó de $360°\pm A$, sus funciones son numéricamente iguales, es decir, en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre de A.
- Cuando el ángulo sea de $90°\pm A$ ó de $270°\pm A$, sus funciones son numéricamente iguales a las cofunciones del mismo nombre de A.

En todos los casos, el signo del resultado es el que corresponde a la función buscada en el cuadrante en que se encuentra el ángulo.

Ejemplo de reducción de ángulos
Reducir la función $tan\,977°$ a su ángulo agudo.



Solución:
Primero reducimos el ángulo restando **360°** hasta obtener un valor entre **0** y **360°.**

$$Tan\,977° = Tan\,257°$$

Entonces rotando el ángulo, queda en el tercer cuadrante y su signo es positivo.

$$Tan\,977° = Tan 257° = Tan\,(180° + 77°) = Tan 77° = Cot 13°$$

Ejercicios

1. Expresar *sen* 72º como una función de un ángulo positivo menor a 45º
2. Expresar las funciones trigonométricas siguientes en función del ángulo complementario:
a) *cos* 68º b) *csc* 58º 18' c) $ctg\,\frac{2\pi}{5}$ d) $sen\,\frac{\pi}{3}$
3. Expresar a *sen* 123º como una función de un ángulo agudo
4. Reducir las funciones siguientes a otros de un ángulo agudo
a) $sec\,\frac{5\pi}{6}$ b) *tan* 516º c) *cos* 1009º d) $cos\,\frac{19\pi}{4}$ *e)* $tan\left(\frac{4\pi}{5}-\theta\right)$
f) *sen* 111º g) *cos* 165º 20' h) $\sec(270+\theta)$ i) $\csc(630+\theta)$

. Completa la siguiente tabla, calculando los valores de las funciones trigonométricas para los siguientes ángulos:

Ángulo	***Funciones trigonométricas***					
	Sen	*Cos*	*Tan*	*Cot*	*Sec*	*Csc*
0º						
30º						
45º						
60º						
90º						
180º						
270º						
360º						

Formulario trigonométrico

$\text{Sen}\,(\text{A} + \text{B}) = \text{Sen A Cos B} + \text{Cos A Sen B}$

$\text{Sen}\,(\text{A} - \text{B}) = \text{Sen A Cos B} - \text{Cos A Sen B}$

$\text{Cos}\,(\text{A} + \text{B}) = \text{Cos A Cos B} - \text{Sen A Sen B}$

$\text{Cos}\,(\text{A} - \text{B}) = \text{Cos A Cos B} + \text{Sen A Sen B}$

$$\text{Tan}(\text{A}+\text{B}) = \frac{\text{TanA} + \text{TanB}}{1 - \text{TanA TanB}}$$

$$\text{Tan}(\text{A}-\text{B}) = \frac{\text{TanA} - \text{TanB}}{1 + \text{TanA TanB}}$$

$Sen2A = 2SenA\,CosA$

$Cos2A = Cos^2A - Sen^2A$

$Cos2A = 2Cos^2A - 1 = 1 - 2Sen^2A$

$$Tan2A = \frac{2TanA}{1 - Tan^2A}$$

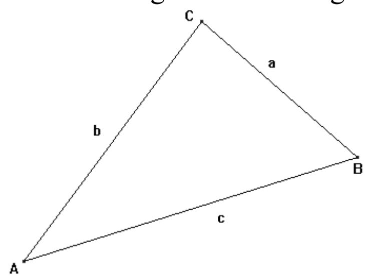
$$Sen\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - CosA}{2}}$$

$$Cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + CosA}{2}}$$

$$Tan\frac{A}{2} = \frac{1 - CosA}{SenA} = \frac{SenA}{1 + CosA}$$

7. LEY DE LOS SENOS Y LEY DEL COSENO

Para resolver triángulos no rectángulos, se utilizan la ley de los senos y la ley del coseno.

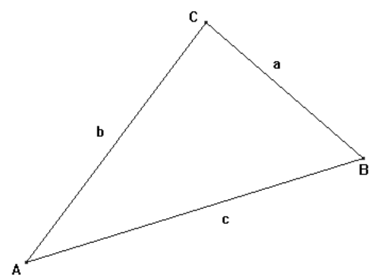


La ley de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Se utiliza cuando en el triángulo se nos proporcionen tres elementos (entre ángulos y lados) y dos de estos tres elementos conocidos sean un lado y su ángulo opuesto.



La ley del coseno

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de la otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\ B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\ C$$

Despejando las fórmulas dadas para la ley del coseno, obtenemos:

$$cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad cos\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad cos\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Estas fórmulas son útiles para calcular el valor de los ángulos de un triángulo, conociendo la medida de sus lados.
Se utiliza cuando se proporcionen dos lados y el ángulo entre ellos o bien los tres lados.

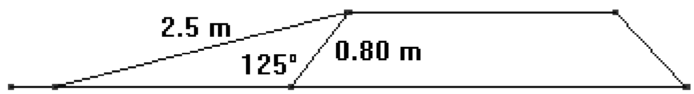
Ejercicios

1. Dos puestos de observación están alineados con una torre. Desde el puesto más lejano el ángulo de elevación al punto más alto de la torre es de 18° y desde el más cercano, situado a 20 metros del anterior, el ángulo de elevación al mismo punto de la torre es de 26° 30’. Calcula la distancia del puesto de observación más lejano a la torre.

2. Dos barcos *A y B* parten de una misma estación situada en un punto *R* en direcciones que forman un ángulo de 73° 30’. El barco *A* lleva una velocidad de 11 Km/hr mientras que el barco *B* lleva una velocidad de de 15 Km/hr. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro a los 45 minutos de viaje?

3. Un agricultor observa que su terreno tiene forma de trapecio y determina que las longitudes de los lados paralelos del trapecio son 25 metros y 34 metros. Además, mide los ángulos de la base (se asume como base el lado mayor de los paralelos) y observa que las medidas son 33° 20' y 40° 50'. Calcula la medida de los lados no paralelos.

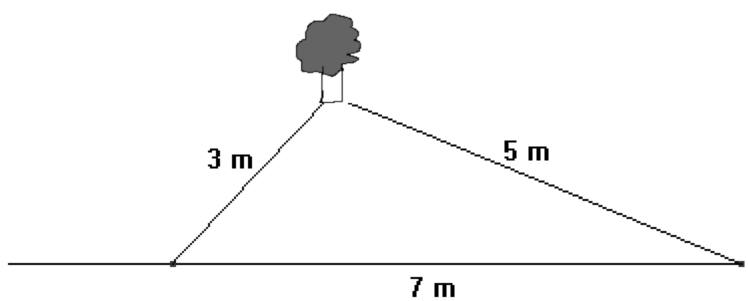
4. Para subir una caja desde la cuneta de una carretera hasta la cinta asfáltica se utiliza un tablón de 2.5 metros de longitud, como se muestra en la figura. El ángulo que forma el piso de la cuneta con el desplante de la carretera es d 125° y la longitud del desplante es de .80 metros ¿A qué distancia del inicio del desplante se apoya el tablón?



5. Las longitudes de las manecillas del horario y minutero de un reloj son 12 cm y 20cm respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran sus extremos cuando son las 17:00 horas?

6. Un asta de bandera está situada en la parte más alta de una montaña. Desde un punto de observación situado a nivel de la montaña, un topógrafo midió los ángulos de elevación a los puntos más alto y más bajo del asta, que son 45° y 36° respectivamente. Calcula la altura de la montaña.

7. Un árbol de 6 metros de altura se encuentra en la cima de un montículo como se muestra en la figura. Calcula la distancia de la base del montículo a la parte más alta del árbol.



8. Calcula la longitud del radio de la circunferencia circunscrita a un heptágono regular si su diagonal de menor longitud mide 42 cm.

7. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuación. Igualdad que se satisface para algunos valores de la incógnita que involucra.

Por ejemplo: $x+1=2 \Rightarrow x=1 \qquad x^2-3x-10=0 \Rightarrow$ factorizando $x=5, x=-2$

Identidad. Igualdad que se satisface para cualquier valor(es) de la(s) variable(s).

Por ejemplo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

En trigonometría también se ven involucradas las identidades trigonométricas:

Identidades Cociente

$$\tan A = \frac{sen\,A}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{\cos A}{sen\,A}$$

Identidades Pitagóricas

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad \sec^2 A = \tan^2 + 1 \qquad \csc^2 A = \cot^2 A + 1$$

Identidades recíprocas

$$sen\,A = \frac{1}{\csc A} \qquad \cos A = \frac{1}{\sec A} \qquad \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$\csc A = \frac{1}{sen\,A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

Ejercicios

Demostrar que las siguientes igualdades son identidades.

1. $tanx\; senx + cosx = secx$
2. $cotx - secx \csc x\,(1 - 2sen^2x) = tanx$
3. $(tany + coty)seny\; cosy = 1$
4. $\frac{seny}{1+cosy} = \frac{1-\cos y}{sen\,y}$
5. $\sqrt{\frac{1-senA}{1+senA}} = secA - tanA$
6. $cot^2x = cos^2x + (cotx\; cosx)^2$
7. $1 - 2sen^2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$
8. $cot^2x(1 - cos2x) + 2sen^2x = 2$