CAPÍTULO

9 Modelos cuadráticos

Resumen del contenido

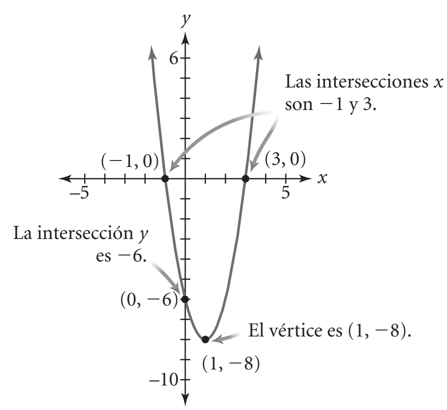
En el Capítulo 9 el texto de *Discovering Algebra* continúa profundizando el entendimiento de los estudiantes de las funciones lineales a través del estudio de funciones no lineales. Este capítulo se enfoca en las funciones cuadráticas y llega eventualmente a las funciones cúbicas.

Formas de las ecuaciones cuadráticas

Las *ecuaciones cuadráticas* pueden tomar tres formas útiles:

- La *forma de vértice* es $y = a(x - h)^2 + k$. Esta forma es útil para decir cómo la gráfica madre $y = x^2$ ha sido transformada. El vértice (h, k) de la parábola es el punto más alto o más bajo. El factor a dice la cantidad de estiramiento vertical, y un valor negativo de a revela una reflexión alrededor del eje x.
- La *forma factorizada* es $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. De esta forma es fácil decir que las raíces de la ecuación son x_1 y x_2 y que la gráfica tiene intersecciones x en x_1 y x_2.
- La *forma general* es $y = ax^2 + bx + c$. Esta forma es útil para hallar que la intersección y es c—la parábola cruza el eje y en $(0, c)$. Si la ecuación describe la altura de un objeto que sube o cae, entonces $-a$ es la mitad de la aceleración debida a la gravedad, b es la velocidad inicial y c es la altura inicial por encima del nivel del suelo.

Aquí tiene una ecuación escrita en estas tres formas y su gráfica.



Forma de vértice: $y = 2(x - 1)^2 - 8$

Formal factorizada: $y = 2(x - 3)(x + 1)$

Forma general: $y = 2x^2 - 4x - 6$

Cambiar de formas

Debido a que las tres formas sirven diferentes propósitos, el convertir entre ellas es común. Las formas de vértice y factorizada pueden cambiarse a la forma general multiplicando *binomios* y *combinando términos iguales.* La forma general puede cambiarse a la forma de vértice *completando el cuadrado.* La forma general puede cambiarse a la forma factorizada por *factorización.* Tanto el multiplicar como el factorizar puede ser ayudado por un diagrama de rectángulo.

Este diagrama de rectángulo muestra que $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$.

	x	3
x	x^2	$3x$
5	$5x$	15

Puede que usted haya aprendido un procedimiento abreviado F.O.I.L.—siglas en inglés para Primero, Afuera, Adentro, Último—para multiplicar binomios. No empuje a su estudiante a usar este método. El diagrama de rectángulo provee un organizador visual para ayudar a los estudiantes a factorizar y multiplicar expresiones. Es fácil expandirlo para multiplicar binomios y trinomios. (Usa un rectángulo 2 por 3). La razón primaria para cambiar a la forma factorizada es para resolver la ecuación—para hallar sus *raíces*.

(continuado)

Frecuentemente factorizar es muy difícil o aún imposible. Un método de resolver las ecuaciones cuadráticas, independientemente de si la ecuación puede ser factorizada, es usar la *fórmula cuadrática*, la cual se introduce en la Lección 9.7.

Tenga cuidado—los estudiantes tienden a confundir los términos *ecuación cuadrática* y *fórmula cuadrática*.

Funciones cúbicas

Las *funciones cúbicas* (con la forma general $y = ax^3 + b^2 + cx + d$) surgen frecuentemente en problemas reales. Para hallar las raíces de estas ecuaciones, *Discovering Algebra* usa gráficas. Una vez que se hallan las raíces, se puede derivar la forma factorizada de la ecuación cúbica. Más adelante, en *Discovering Advanced Algebra,* los estudiantes verán cómo factorizar las ecuaciones cúbicas a partir de la forma general.

Problema de resumen

Usted y su estudiante pueden volver a visitar este problema de resumen varias veces mientras trabajan a través de este capítulo.

La altura de un cohete modelo particular está descrita por la función cuadrática $h(t) = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 49t + 2.5$, donde t representa el número de segundos después del despegue. ¿Qué puedes aprender acerca de la altura del cohete de esta ecuación y otras formas de esta ecuación?

Preguntas que podría hacer, en su papel de estudiante para su estudiante, incluyen:

- ¿Qué representan los coeficientes -9.8, 49 y 2.5?
- ¿Cuáles son las unidades usadas para describir la altura del cohete?
- ¿Cuál es la forma de vértice de la ecuación?
- ¿Qué puedes aprender de la forma de vértice?
- ¿A qué tiempos la altura es 0?
- ¿Cuándo el cohete alcanza el nivel del suelo?
- ¿Cómo se relacionan los ceros de una función cuadrática o cúbica a su forma factorizada?
- ¿Cuál es la forma factorizada de la ecuación?
- ¿Qué puedes aprender de la forma factorizada?
- ¿En qué tiempos el cohete está a 20 metros por encima del nivel de suelo?
- ¿Hay otras formas útiles de las ecuaciones cuadráticas?

Repuestas ejemplares

Los coeficientes representan el opuesto de la mitad de la fuerza debida a gravedad, la velocidad inicial y la altura inicial en metros. Los estudiantes pueden hallar la forma de vértice completando el cuadrado para obtener $h(t) = -4.9(t - 5)^2 + 125$, de la cual ellos pueden notar que el cohete alcanza su altura máxima de 125 metros cuando $t = 5$. Los ceros pueden hallarse mejor usando la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $-4.9t^2 + 49t + 2.5 = 0$. Los ceros están aproximadamente en -0.05 y 10.05, así que la forma factorizada de la función es $h(t) = -4.9(t + 0.05)(t - 10.05)$. Los ceros muestran dónde la gráfica cruza el eje horizontal, o alcanza el nivel del suelo. El cohete choca con el suelo después de 10.05 segundos. Para hallar cuándo la altura es 20 metros, resuelve la ecuación $20 = -4.9t^2 + 49t + 2.5$ para t. (t es alrededor de 0.4 y 9.6.)

Capítulo 9 • Ejercicios de repaso

Nombre ____ **Periodo** ___________ **Fecha** ________________

1. *(Lección 9.1)* Usa un método simbólico para hallar la solución exacta de la ecuación $2(x-1)^2+5=9$. Expresa las soluciones en forma radical.

2. *(Lección 9.2)* Nombra el vértice de la parábola dada por cada función cuadrática. Luego grafica cada ecuación para verificar tu respuesta.

a. $y=(x-6)^2-3$ **b.** $y=2(x+1)^2+3$

3. *(Lección 9.3)* Convierte la ecuación $y=2(x-4)^2-7$ a la forma general. Para verificar tu respuesta, entra ambas ecuaciones en la pantalla de Y= en tu calculadora gráfica y compara sus gráficas.

4. *(Lección 9.4)* Escribe la ecuación $y=x^2-2x-8$ en forma factorizada y luego usa la propiedad del producto del cero para hallar las intersecciones x de la parábola descrita por la gráfica.

5. *(Lección 9.6)* Completa el cuadrado para reescribir cada ecuación en la forma de vértice, y nombra el vértice de la parábola descrita por la ecuación.

a. $y=x^2-6x+4$ **b.** $y=3x^2+6x-4$

6. *(Lección 9.7)* Usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2-6x+3=0$. Expresa las soluciones en forma radical.

7. *(Lección 9.8)* Resta las siguientes expresiones racionales y expresa tu respuesta en forma reducida. Declara cualquier restricción sobre la variable.

$$\frac{3}{x-1}-\frac{9x}{x^2+x-2}$$

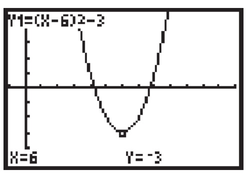
1.

$2(x-1)^2+5=9$	Ecuación original.
$2(x-1)^2=4$	Resta 5 de ambos lados.
$(x-1)^2=2$	Divide ambos lados por 2.
$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{2}$	Toma la raíz cuadrada de ambos lados.
$\lvert x-1\rvert=\sqrt{2}$	Definición de raíz cuadrada.
$x-1=\pm\sqrt{2}$	Usa $\pm$ para deshacer el valor absoluto.
$x=1\pm\sqrt{2}$	Suma 1 a ambos lados.

Las dos soluciones son $1+\sqrt{2}$, o aproximadamente 2.4; y $1-\sqrt{2}$, o aproximadamente -0.4.

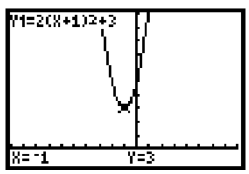
2. Para una parábola dada por una ecuación en forma de vértice $y=a(x-h)^2+k$, el vértice está en (h, k).

a. El vértice es $(6, -3)$.



$[-1, 13, 1, -5, 5, 1]$

b. El vértice es $(-1, 3)$.



$[-10, 8, 1, -1, 10, 1]$

3. Primero usa un diagrama de rectángulo para cuadrar el binomio $(x-4)^2$.

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-4	$-4x$	16

$(x-4)^2=x^2-8x+16$

$y=2(x-4)^2-7$	Ecuación original.
$y=2(x^2-8x+16)-7$	Cuadra el binomio.
$y=2x^2-16x+32-7$	Usa la propiedad distributiva.
$y=2x^2-16x+25$	Combina términos iguales.

Grafica ambas la forma de vértice, $y=2(x-4)^2-7$, y la forma general, $y=2x^2-16x+25$, en tu calculadora para ver que producen la misma gráfica.

4. Usa un diagrama de rectángulo para ayudarte a factorizar el polinomio.

	x	
x	x^2	
		-8

Halla dos números cuyo producto es -8 y cuya suma es -2. Estos números son -4 y 2, así que la forma factorizada de x^2-2x-8 es $(x-4)(x+2)$. Para hallar las intersecciones x, resuelve la ecuación $(x-4)(x+2)=0$.

$(x-4)(x+2)=0$	Ecuación.
$x-4=0$ or $x+2=0$	Usa la propiedad del producto del cero.
$x=4$ or $x=-2$	Resuelve cada ecuación.

Las intersecciones x son 4 y -2.

5. a. $y=x^2-6x+4$ Ecuación original.

Suma $(-3)^2$, ó 9, para crear un trinomio de cuadrado perfecto. También debes restar 9 para mantener la ecuación balanceada.

$y=x^2-6x+9-9+4$	Suma cero en la forma $9-9$.
$y=(x-3)^2-9+4$	Factoriza el trinomio.
$y=(x-3)^2-5$	Combina términos iguales.

El vértice está en $(3, -5)$.

b. $y=3x^2+6x-4$

$y=3(x^2+2x)-4$

$y=3\left(x^2+2x+1-1\right)-4$

$y=3\left(x^2+2x+1\right)+3(-1)-4$

$y=3(x+1)^2-3-4$

$y=3(x+1)^2-7$

El vértice está en $(-1, -7)$.

6. Las soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ son $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Para la ecuación dada $2x^2-6x+3=0, a=2$, $b=-6$, y $c=3$. Por lo tanto las soluciones son $x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(3)}}{2(2)}$, or $x=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}$.

7. Factoriza x^2+x-2 para hallar un denominador común: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

$\frac{3}{x-1}-\frac{9x}{x^2+x-2}$	Expresión original.
$=\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x+2}-\frac{9x}{(x-1)(x+2)}$	Multiplica por 1 para obtener un denominador común.
$=\frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\frac{9x}{(x-1)(x+2)}$	Multiplica.
$=\frac{3x+6}{(x-1)(x+2)}-\frac{9x}{(x-1)(x+2)}$	Usa la propiedad distributiva.
$=\frac{3x+6-9x}{(x-1)(x+2)}$	Suma los numeradores.
$=\frac{-6x+6}{(x-1)(x+2)}$	Combina términos iguales.
$=\frac{-6(x-1)}{(x-1)(x+2)}$	Factoriza el numerador.
$=\frac{-6}{(x+2)}$, donde $x\neq 1$ y $x\neq -2$	Reduce la expresión.

La restricción $x\neq 1$ es necesaria porque el valor de x de 1 hace al denominador de la expresión original cero.

