RAZÓN DE CAMBIO

El objetivo al estudiar el concepto *razón de cambio*, es analizar tanto cuantitativa como cualitativamente las razones de cambio instantáneo y promedio de un fenómeno, lo cual nos permite dar solución a situaciones problemáticas cuya solución no está al alcance de los métodos algebraicos.

A través del estudio de los conceptos: Razón de Cambio Promedio y Razón de Cambio Instantánea, conceptos relativos a los cambios de una magnitud con respecto a otra con la que está relacionada funcionalmente, podremos resolver problemas que involucran el cambio de una población respecto al tiempo, el cambio de la temperatura de un líquido, el cambio de la distancia en relación con el tiempo, la velocidad respecto del tiempo, entre otros.

Actividad 1

La producción de acero en Monterrey N.L. (México) en millones de toneladas, durante el año de 1992 a partir del mes de enero se muestra en la tabla:

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Producción en millones de toneladas	6.7	8.5	8.9	7.8	9.7	10.5	9.3	11.2	8.8	11.7	11.5	11.9

1) Tomando valores para meses consecutivos, ¿para qué intervalo de meses el aumento de la cantidad de producción de acero fue mayor y de cuánto fue?
2) ¿Podrías calcular con una muy buena aproximación, qué producción hubo el 15de junio?

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

En la vida diaria se determinan razones de cambio de diversas situaciones de tipo natural, económico, y social. Situaciones en las que nos interesa conocer cuál es el valor más pequeño (mínimo) o más grande (máximo), cómo aumenta (crece) o disminuye (decrece) ese valor en un intervalo de tiempo específico, en general problemas donde se estudian fenómenos relativos a la variación de una cantidad que depende de otra, por lo que se hace necesario describir y cuantificar estos cambios a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Los datos de la siguiente tabla muestran los valores de la temperatura T de cierto volumen de agua tomadas en los minutos *t* indicados:

Tiempo t en minutos	0	5	10	15	20	25
Temperatura T en °C	15	25,5	55,7	95	85	62

Completar las siguientes tablas:

t	0	5	10	15	20	25
	Cambio 5 – 0 = 5	Cambio	Cambio	Cambio	Cambio	

T	15	25,5	55,7	95	85	62
	Cambio 25,5 – 15 = 10,5	Cambio	Cambio	Cambio	Cambio	

Intervalo de tiempo $[t_1 , t_2]$	Cambio de la temperatura $\Delta T = T_f - T_i$	Cambio de T respecto del tiempo t $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_f - T_i}{t_f - t_i}$
De $t = 0$ a $t = 5$	10,5	$\frac{T(5) - T(0)}{5 - 0} = \frac{25{,}5 - 15}{5} = \frac{10{,}5}{5} == 2{,}1 \frac{°C}{min}$
De $t = 5$ a $t = 10$		
De $t = 10$ a $t = 15$		
De $t = 15$ a $t = 20$		
De $t = 20$ a $t = 25$		

a) ¿Qué significado tienen las mediciones hechas en cada columna de la tabla?
b) ¿Qué expresa la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo?
c) ¿Es posible que algunos valores de la tercera columna sean positivos y otros negativos? ¿Qué interpretación le damos a esta situación?

El cambio se da cuando se pasa del estado inicial al estado final. Para medir el cambio de una variable restamos su valor en el estado final menos su valor en el estado inicial. Para la variable t el cambio lo mide la diferencia $t_f - t_i = \Delta t$, $(\Delta : delta)$, donde Δt representa el cambio en el tiempo. Para la variable T el cambio lo mide la diferencia $T_f - T_i = \Delta T$, donde ΔT representa el cambio, aumento o disminución, de la temperatura. Es un cambio de la temperatura respecto al cambio del tiempo. Pero podemos preguntarnos, ¿con qué velocidad cambia la temperatura? Para contestar esta pregunta debemos relacionar el cambio de temperatura respecto del cambio del tiempo comparando los cocientes.

Intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$	Cambio de la temperatura $\Delta T = T_f - T_i$	Cambio de T respecto del tiempo t $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_f - T_i}{t_f - t_i}$
De $t = 0$ a $t = 5$	10,5	$2{,}1 \frac{°C}{min}$
De $t = 5$ a $t = 10$	30,2	$6{,}04 \frac{°C}{min}$
De $t = 10$ a $t = 15$	39,3	$7{,}86 \frac{°C}{min}$
De $t = 15$ a $t = 20$	-10	$-2 \frac{°C}{min}$
De $t = 20$ a $t = 25$	-23	$-4{,}6 \frac{°C}{min}$

La razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo da como resultado la velocidad promedio con la que cambia la temperatura respecto del tiempo. Por ejemplo, el primero de los cocientes indica que la temperatura cambió con una velocidad promedio de $2{,}1 \frac{°C}{min}$ en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$, es decir que por cada minuto transcurrido en dicho intervalo, la temperatura cambió 2,1°.

Estas razones de cambio se denominan *razones de cambio promedio*.

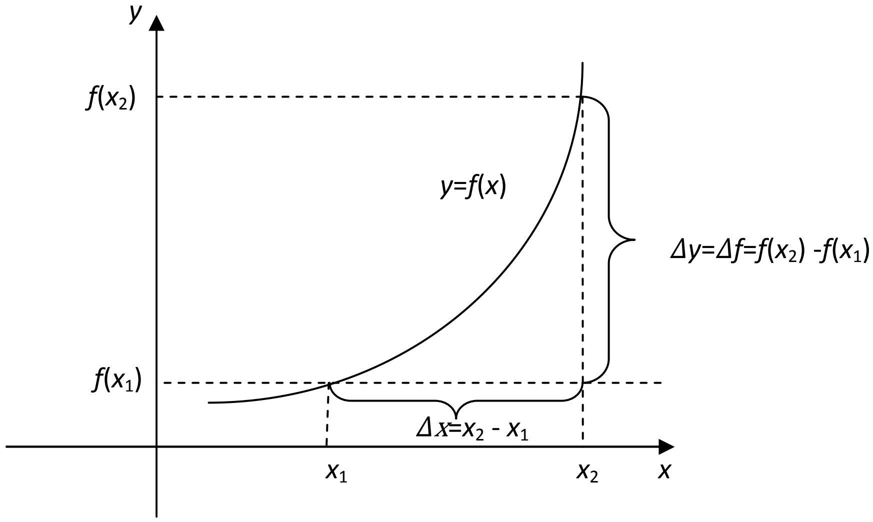
Veamos en el cuadro el significado de cada uno de los cálculos.

Cantidad	$t_2 - t_1$	$T(t_2) - T(t_1)$	$\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$
Significado	Cambio en el tiempo	Cambio de la temperatura cuando el tiempo cambia de $t=t_1$ a $t = t_2$.	Razón de cambio promedio de la temperatura T con respecto a t cuando cambia de t_1 a t_2.

Definición: dada una función $y = f(x)$, se llama *razón de cambio promedio* (o *media*) de y respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ al cociente entre el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ y la amplitud del intervalo $\Delta x = x_2 - x_1$, en el cual ocurrió el cambio. La razón de cambio promedio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Gráficamente:



Como $\Delta x = x_2 - x_1$, podemos despejar $x_2 = x_1 + \Delta x$, y

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ por lo que la razón de cambio media resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

En la tabla hay razones de cambio promedio positivas y negativas. Si la razón media de cambio es positiva, por ejemplo $6{,}04\,\frac{°C}{min}$ significa que la temperatura creció durante ese intervalo a razón de 6,04° por minuto. Si la razón media de cambio es negativa, por ejemplo - $4{,}6\frac{°C}{min}$ significa que la temperatura decreció durante ese intervalo a razón de 4,6° por minuto.

El valor absoluto de la razón de cambio promedio indica la *rapidez del cambio.*

El signo indica si se produjo un aumento o disminución.

Definición: se llama *rapidez de cambio media* al valor absoluto de la razón de cambio promedio, es decir

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \quad \text{ó} \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}\right|$$

Actividad 2

La cantidad de calor *h* (en joules) que se necesita para convertir un gramo de agua en vapor es función de la temperatura *t* (en °C) de la atmósfera según la ley $h(t) = \frac{-8t+7520}{3}$

Completar la tabla, calculando los cambios de calor y las razones de cambio promedio de la cantidad de calor h con respecto a la temperatura t de la atmósfera, para $0 \leq t \leq 60$, en intervalos de 15 grados de amplitud.

Intervalos de temperatura (°C)	Δh Cambio de cantidad de calor (en joules)	$\frac{\Delta h}{\Delta t}$ Cambio de cantidad de calor respecto a cambio de temepratura
$0 \leq t \leq 15$		
$15 \leq t \leq 30$		
$30 \leq t \leq 45$		
$45 \leq t \leq 60$		

¿Cómo se interpretan los resultados?

Observamos aquí, que la variación de calor es -40 joules en todos los intervalos, por eso la razón de cambio promedio se mantiene constante para intervalos de 15° de amplitud y es igual a -2,67 $\frac{joules}{°C}$.

Si calculamos la razón de cambio promedio en forma analítica a partir de la ley que define la función, se obtiene la misma conclusión, en efecto

$$\Delta h = h(t_2) - h(t_1) = \frac{-8t_2+7520}{3} - \frac{-8t_1+7520}{3} = \frac{-8t_2+7520+8t_1-7520}{3} = \frac{-8(t_2-t_1)}{3}$$

Como $\Delta t = t_2 - t_1$, la razón de cambio media es $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\frac{-8(t_2-t_1)}{3}}{t_2-t_1} = -2{,}67.$

Es decir, la razón de cambio promedio se mantiene constante independientemente del intervalo de temperatura del cual se trate.

Por lo que vemos en este ejemplo, hay cambios que ocurren uniformemente mientras que otros cambian a cada instante y otros en los que los cambios son muy complejos, como en el movimiento de moléculas, por ejemplo.

Uno de los objetivos del cálculo es encontrar leyes que describen esos cambios para poder medirlos y predecir.

Actividad 3

Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la ley $s(t) = -2t^2 + 12t + 9$ cuyos valores se expresan en metros. Determinar la razón media de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, durante los primeros 5 segundos, en intervalos de 1 segundo de amplitud. ¿Cuál es la razón de cambio del desplazamiento a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

Intervalos	Razón de cambio promedio

Si buscamos la razón de cambio en forma analítica, tenemos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-\ t_1}=\frac{-2(t_2)^2+12(t_2)+9-(-2t_1^2+12t_1+9)}{t_2-\ t_1}=$$

Si ahora llamamos $h=\Delta t=t_2-t_1$, tenemos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}=\frac{-2(t_1+h)^2+12(t_1+h)+9-(-2t_1^2+12t_1+9)}{h}=$$

$$=\frac{-4t_1h-2h^2+12h}{h}=\frac{h(-4t_1-2h+12)}{h}=-4t_1-2h+12$$

En la tabla vemos que la razón de cambio media, es decir, la velocidad promedio, cambia en cada intervalo: al principio lleva una velocidad mayor y a medida que se acerca a su altura máxima, la velocidad disminuye. ¿Es posible que se anule?

Después de alcanzar la altura máxima, el cuerpo baja (velocidad promedio negativa), primero con menor rapidez y luego con mayor rapidez.

Si $s(t)$ es la función posición de un objeto, la *velocidad promedio* está dada por

$$v_p=\frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t}$$

Actividad 4:

a) La función $f(t)=16t^2+10$ describe la posición de un objeto cualquiera. Calcular la velocidad media entre:
   a. $t=0$ y $t=2$
   b. $t=1$ y $t=2$
   d. $t=1{,}99$ y $t=2$
   c. $t=1{,}9$ y $t=2$

RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO

Para estudiar la razón de cambio en un instante dado, veamos el siguiente ejemplo:

Un globo esférico se infla con un gas.

a) Encontrar la razón de cambio media del volumen con respecto al radio cuando éste cambia de 2 m a 2,5 m y cuando cambia de 2,5 m a 3 m.

b) ¿Es posible calcular la variación del volumen cuando el radio es exactamente 2,5 m? Sugerencia: completar las siguientes tablas para facilitar el cálculo.

Intervalos	$\frac{\Delta V}{\Delta r}$ Cambio de volumen con respecto al cambio del radio
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}6$	$\frac{V(2{,}6)-V(2{,}5)}{2{,}6-2{,}5} = \frac{8{,}17232969}{0{,}1} = 81{,}7232969\,\frac{m^3}{m}$
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}51$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}501$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}5001$	
$2{,}5 \leq t \leq 2{,}50001$	
Intervalos	$\frac{\Delta V}{\Delta r}$ Cambio de volumen con respecto al cambio del radio
$2{,}4 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}499 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}4999 \leq t \leq 2{,}5$	
$2{,}49999 \leq t \leq 2{,}5$	

a) ¿Qué diferencia fundamental se puede observar entre este ejemplo y la Actividad 2 dada anteriormente?

b) ¿Por qué en este problema se hace necesario calcular la razón de cambio en un instante particular?

Teniendo en cuenta que el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$, vemos aquí, que si el radio cambia de 2m a 2,5m, la razón de cambio es 63,88m^3/m, es decir que el volumen cambia 63,88m^3 por cada metro que varía el radio; si el radio cambia de 2,5m a 3m, la razón de cambio es 95,29m^3/m, es decir que el volumen cambia 95,29m^3 por cada metro que varía el radio.

Con la razón de cambio promedio analizamos intervalos relativamente grandes, pero en realidad los cambios no suceden a saltos. Por ejemplo, el volumen del globo varía a cada instante, en forma continua a medida que se va inflando. En general, los cambios físicos y biológicos son continuos, cambian a cada instante, de modo que no alcanza con calcular la razón de cambio promedio.

Si la velocidad de los cambios o la razón de cambio promedio es constante, calcularla para cualquier intervalo nos permite saber lo que sucede en un instante cualquiera, porque no depende del valor de la variable en el intervalo (como es el caso de la Actividad 2).

Cuando la razón de cambio no es constante, el cálculo en un instante particular no es tan sencillo. Por ejemplo, en el problema del globo esférico que se infla con gas, ¿podemos calcular la variación del volumen del globo cuando el radio es exactamente 2,5m?

Para este problema, se construyeron dos tablas, donde los valores del radio se aproximan a 2,5 por valores mayores y por valores menores, es decir tomamos Δr cada vez más pequeño, y en ese caso las razones de cambio promedio se acercan o tienden a 78,539816m^3/m, que es el valor exacto para r = 2,45m.

La razón de cambio del volumen cuando el radio es de 2,5m, es el límite de las razones de cambio promedio cuando Δr es infinitamente pequeño, es decir cuando

$\Delta r \longrightarrow 0$. Este tipo de razón se denomina *razón de cambio instantánea.*

Definición: se llama *razón de cambio instantánea* de una función cuando $x = x_1$ a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vemos que la definición de razón de cambio instantánea comprende un concepto nuevo que es el concepto de *límite de una función*. Si bien no estudiaremos ahora esta noción, por lo cual no haremos cálculos de razón de cambio instantánea, sí podremos interpretar su significado y estimar su valor.

Por ejemplo, en la Actividad 3, para calcular la razón de cambio instantánea a los 2 segundos, debemos calcular el límite de la razón de cambio media cuando $\Delta t \longrightarrow 0$. Pero, podríamos estimar su valor, sin necesidad de usar límite. ¿Cómo lo haría? ¿A qué valor llega?

Para la Actividad 4, estime la velocidad instantánea en t = 2.