MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Raimundo Alba García   José María Vázquez de la Torre Prieto

Índice General

Parte I

Introducción

Nuestra intención es encender una luz en el mundo de los préstamos para aquellos que como nosotros no son afines al campo de las finanzas. ¿Quién no se ha encontrado en la situación del futuro matrimonio que nos ayudará en nuestra exposición?

Les comentamos el caso de Borja y María: Dentro de dos meses se casan y acaban de pagar una entrada para un piso. Aún así, les quedan por pagar 60.000 euros, por lo que deciden negociar con una entidad bancaria para que les preste este dinero. El Banco X les ofrece un préstamo hipotecario a 4'5% de interés nominal pagadero en cuotas mensuales.

Es en esta última frase donde Borja y María se pierden y lo único que les interesa es conocer la respuesta a la pregunta del millón: "¿cómo quedaría la cuota mensual?" A lo que les responde el empleado bancario que la cuota sería de "380 euros". El matrimonio ante la respuesta asiente y se conforma, ya que en estos últimos días han visitado otras entidades bancarias y han visto que ese interés nominal es un poquito más bajo que el que le ofrecían en otras (4'75, 4'63, ...), y por lógica la cuota debe ser más baja.

Pero siempre quedarán algunas preguntas en el aire: ¿estará bien calculada la cuota? ¿cómo se calcula? ¿cuánto acabaríamos pagando al final?. Sabemos que con la cuota se paga parte del préstamo o capital concedido, siendo la otra parte de interés. ¿Cómo se calcula esa parte de capital que se paga? (el resto será de interés).

Siempre es bueno al menos conocer la fórmula con la que se calcula la cuota y el capital pagado, aparte de por curiosidad por seguridad (no sería la primera vez que un prestamista se equivocase).

Es nuestra intención responder a éstas y otras preguntas que se pueden plantear. Para hacer esta tarea lo más grata al lector se ha procurado desarrollar el tema sin caer demasiado en tecnicismos financieros, aunque se introducen los términos más usuales. Si bien, debido a nuestra condición de licenciados en Ciencias Matemáticas, no hemos podido evitar realizar un desarrollo matemático riguroso para la deducción de la mayoría de las fórmulas que aparecen, aunque a todo aquel que sólo le interese conocer las fórmulas sólo tendrá que saltarse dicho desarrollo.

Por último, señalar que en las fórmulas aparecen subíndices (i_k, k es el subíndice) lo que entraña una dificultad para todo aquel no acostumbrado en el cálculo simbólico de las Matemáticas, pero optamos por no eliminarlo para precisamente mantener la rigurosidad matemática. Para salvar esta dificultad se han añadido ejemplos con el manejo de las fórmulas.

Parte II

Interés simple y compuesto

Es imprescindible para comprender el mundo de los préstamos, entender el concepto de interés simple e interés compuesto. Pongamos un ejemplo de cada tipo para intentar comprender en qué consiste cada interés:

Interés simple: Borja tiene 100 euros y desea depositarlos en un banco, el cual le ofrece un interés anual del 6%, es decir, al cabo de un año el banco le devuelve 100 euros más el 6% de 100 (6 euros de interés), luego le devuelve 106 euros.

A Borja le ha gustado esta operación y vuelve a realizar la misma operación con los 100 euros, ya que los 6 euros decide gastárselos. Entonces al cabo del segundo año se encontraría de nuevo con 106 euros. En dos años ha pasado de 100 euros a 112, ya que le ha añadido 6 cada año a los 100 primeros. Si esto lo hiciéramos durante varios años, podríamos resumirlo en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4
Capital total	100	106	112	118	124

Interés compuesto: Supongamos ahora que María realiza la misma operación que Borja el primer año, transcurrido el cuál tendrá 106 euros. María decide al igual que su novio en volver a depositar en el banco el dinero, pero ella no deposita sólo los 100 euros, sino que añade el interés conseguido. La situación sería que el 6% en el segundo año se debe calcular sobre 106 euros, y este interés sería de

$$106 \cdot \frac{6}{100}$$

Al final del segundo año, María tendría 112'36 euros , y si continuásemos el proceso, calculando siempre el 6% sobre el capital obtenido el año anterior, los primeros años quedarían reflejados en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4
Capital total	100	106	112'36	119'1016	126'247696

La diferencia entre los dos tipos de interés es evidente, en el primer caso, los intereses no se acumulan al capital, pero en el segundo si lo hacen, siendo este segundo caso más beneficioso para la parte que aporta el dinero. El proceso que consiste en sumar al capital inicial el interés correspondiente al tiempo que dura la inversión o el préstamo se le llama **capitalización**. En nuestros dos ejemplos, tras cuatro años el proceso de capitalización ha dado dos cantidades distintas, que se han obtenido mediante las llamadas **leyes financieras de capitalización simple y compuesta**, respectivamente.

Habitualmente, el interés compuesto o la llamada **ley financiera de capitalización compuesta** es la que se utiliza en los préstamos. La razón es evidente, porque si el banco nos prestase 5.000 euros es más beneficioso para ellos que el interés que tengamos pactado sea un interés compuesto, se acumularían más intereses a lo largo del tiempo.

Parte III

Ley financiera de capitalización compuesta

En este apartado pretendemos describir el cálculo de la fórmula que nos determina el capital final (C') tras aplicarle un determinado interés compuesto(i) a un capital inicial (C). El cálculo de dicha fórmula es prescindible en el desarrollo de este tema, y sólo aparece a modo informativo para aquellos iniciados en el cálculo simbólico.

Qué mejor que pedirle ayuda a nuestros novios para entender el desarrollo. Borja y María han decidido ingresar en un banco 4.000 euros y han pactado que lo cederán durante 5 años a un interés del 5% (por supuesto, compuesto). Inmediatamente podríamos hacer una tabla en la que apareciesen el desarrollo de los 5 años.

Año	0	1	2	3	4	5
Capital total	4.000	4.200	4.410	4.630'5	4.862'025	5.105'12625

Cómo ya hemos comentado, hay un método para averiguar cuánto tendremos al final de los 5 años, sin tener que utilizar una tabla en nuestros cálculos. En definitiva, queremos que saber qué capital final *C'* tendríamos a partir de un capital *C* a un interés compuesto anual i durante n años.

<u>Cálculo de la fórmula</u>

Dado el capital C, calculemos que cantidad tendremos al cabo de un año. Si el interés es i%, la cantidad que habría que añadir tras el primer año sería C·i/100=C·i·0'01. Es decir, el capital que tendría tras el primer año sería C+C·i·0'01=C·(1+i·0'01), sólo hemos multiplicado el capital que teníamos por (1+i·0'01).

Calculemos ahora cuánto tendríamos al segundo año, observando que el capital que tendríamos ahora C·(1+i·0'01), sería el capital inicial, y que para calcular el capital tras aplicarle el interés sólo habría que multiplicarlo por (1+i·0'01), lo que nos daría $C \cdot (1 + i \cdot 0'01)^2$. Todo este proceso se puede resumir en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	...	n
Capital total	C	$C \cdot (1 + i \cdot 0'01)$	$C \cdot (1 + i \cdot 0'01)^2$	$C \cdot (1 + i \cdot 0'01)^3$	...	$C \cdot (1 + i \cdot 0'01)^n$

Así que si Borja y María quieren averiguar cuánto tendría al cabo de n años sólo tendría que aplicar la fórmula $C' = C \cdot (1 + i \cdot 0'01)^n$, más conocida como

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n \tag{1}$$

En este caso particular era
C=4.000
i=5%

n=5 años

Entonces

$$C' = 4.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 4.000 \cdot (1 + 0'05)^5 = 4.000 \cdot 1'05^5 = \mathbf{5.105'12625\ euros}$$

Parte IV

Tanto nominal. Nueva fórmula para el interés compuesto

Habitualmente cuando un banco nos habla de un interés nos habla del llamado interés nominal, al que llamaremos i_k. Junto a este interés nominal debe aparecer la expresión **capitalizable por semestres, capitalizable mensualmente, capitalizable por trimestres**,.... Esta segunda expresión nos indica el valor de la k del siguiente modo: k será la cantidad de períodos que hay en un año del orden que nos indica la capitalización. Por ejemplo, si nos indicasen que el interés nominal es capitalizable por trimestres, al haber 4 trimestres en un año, sería k=4 y pondríamos i_4 para referirnos al interés nominal. Es corriente que la propuesta del prestamista incluya una expresión parecida a ésta: "capitalizable por trimestres al 8% nominal". Esta frase nos está diciendo que cuando calculemos el valor del capital final tendremos que aplicar la ley financiera de capitalización compuesta, añadiéndose los intereses cada tres meses. Pero, para utilizar la fórmula vista en el apartado anterior, debemos conocer el valor de **i** (no es igual a i_k).
El valor de ı viene de la relación

$$i = \frac{i_k}{k}$$

es decir, se divide el tanto por ciento nominal por el número de períodos en los que el capital se capitalizará durante un año. Por ejemplo, si nos dijesen que invertimos un capital al 5% nominal capitalizable por semestres, el valor de i es igual a $i = \frac{5}{2} = 2'5\%$.

Sólo nos quedaría modificar algo la Fórmula 1 deducida antes para en el caso de que el interés dado sea nominal. Quedaría así:

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^{n \cdot k} \tag{2}$$

Nótese que el exponente no sería n, sino n·k, ya que si el los intereses se añaden k veces en un año, en n años se añadirán n·k veces.

Veamos el uso de esta Fórmula 2 con un ejemplo.

Calculemos el capital final *C'* que se obtiene al capitalizar trimestralmente durante 2 años 400 euros al 3% de interés nominal.
La expresión "capitalizar trimestralmente", nos indica que en un año se añadirán intereses cada tres meses. Calculemos cada elemento de la Fórmula 2:
C=400
k=4 (hay 4 trimestres en un año)
i4=3%

Entonces C' saldría de aplicar la Fórmula 2

$$C' = C \cdot \left(1 + \frac{i_4}{100 \cdot 4}\right)^{2 \cdot 4} = 400 \cdot \left(1 + \frac{3}{400}\right)^{8} = 400 \cdot (1 + 0'0075)^8 = 400 \cdot 1'0075^8 = \mathbf{424'6395\ euros}$$

¿Qué ocurre si el proceso no dura años completos?

Si por ejemplo tuviésemos que capitalizar un capital C durante dos años y 3 meses, ¿cómo utilizaríamos la fórmula?. Bien, la fórmula seguiría siendo la misma, sólo que n no sería entero, ya que los tres meses habría que pasarlos a años mediante una simple regla de tres

Si 1 año son 12 meses, ¿Cuántos años serán 3 meses?

La respuesta es que 3 meses=3/12 años=0'25 años, por lo que el tiempo que hay que capitalizar C es 2+0'25=2'25 años, sería n=2'25.

Otra forma de proceder es tener en cuenta qué es n·k, el número de veces que se añaden intereses al capital inicial o las veces que se capitaliza. Así, si la capitalización fuese mensual en dos años y 3 meses se añaden intereses 27 veces mediante la ley de capitalización compuesta, luego sería n·k=27 (comprobar que es lo que saldría de multiplicar 2'25·12). Si la capitalización fuese trimestral, se añadirían intereses 9 veces, sería n·k=9(=2'25·4).

Parte V

Préstamos

La filosofía de un préstamo es siempre la misma: Un prestamista (Banco) cede un dinero (nominal del préstamo) a un prestatario (Borja y María) y, a cambio, éste se compromete a devolver dicha cuantía más los intereses correspondientes derivados de la prestación, mediante un pago único o mediante un conjunto de pagos o cuotas. La variedad en los tipos de préstamos es inmensa. Todos los préstamos son devueltos al prestamista mediante una o varias cuotas, siendo éstas iguales o no. Éstas cuotas vienen determinadas por el tipo de interés, fijo o variable, pactado por el prestamista.

Las cuotas se descomponen en dos partes: una **cuota de interés** que se destina al pago de intereses y una **cuota de amortización de capital** que se destina a amortizar (pagar) el capital prestado.

Sólo por ver la variedad de préstamos que hay, destacaremos los posibles criterios para clasificarlos:

A) Según la forma de amortización del capital:

   a. <u>Préstamos por amortización única</u>: Lo debido junto a los intereses se paga en una sóla cuota.
   b. <u>Préstamos con amortización periódica</u>: Lo debido junto a los intereses se paga en varias cuotas periódicas (mensuales, trimestrales, semestrales,...).

B) Según la forma de pago de las cuotas de interés:

   a. <u>Préstamos con pago único de intereses</u>.
   b. <u>Préstamos con pago periódico de intereses</u>.

C) Según el momento en que se pagan las cuotas de interés:

   a. <u>Préstamos con pago de intereses por vencido</u>: Los pagos se realizan al final de cada período, por ejemplo, si los períodos son mensuales los intereses se pagarían al finalizar el mes.
   b. <u>Préstamos con pago de intereses por anticipado</u>: Los pagos se realizan al comienzo del período.

D) Según las cuantías del término amortizativo:

   a. <u>Préstamos con cuotas constantes</u>: En cada período se paga la misma cuota.
   b. <u>Préstamos con cuotas variables</u>.

E) Según el interés vigente durante la vida del préstamo:

   a. <u>Préstamo a interés fijo</u>.
   b. <u>Préstamo a interés variable</u>.

La verdad es que conjugando distintas características de las expuestas podríamos crear decenas de tipos de préstamos, así podríamos hablar de préstamos con amortización única de capital y pago único de intereses por vencido (que en el esquema anterior serían las características: Aa, Ba, Ca), o préstamos con amortización única de capital y pago periódico de intereses por vencido (Ab, Bb, Ca, Db).

Nosotros vamos a hacer un estudio del **Préstamo amortizable por el sistema francés**. Para realizar el estudio haremos la restricción de suponer el interés fijo para el cálculo de la fórmula que nos relacione los distintos parámetros de una operación financiera de este tipo (cuotas, tiempo, interés,...). Sería imposible tratar el problema con interés variable si la variación de éste, como pasa habitualmente, no se conoce con anterioridad. Aunque esto no es problema a la hora de hacer los cálculos de las cuotas, ya que un vez que termine un período con un tipo de interés, al comenzar otro período con otro interés se puede considerar este nuevo período como si realmente fuese el primero, considerando el momento actual como si fuese el inicial y el capital restante por amortizar el capital inicial.

Parte VI

Método de amortización francés

Es el tipo de préstamo más habitual en la práctica financiera. Sus características son:

- Las cuotas de interés y las cuotas de amortización de capital se hacen efectivas periódicamente al final del período (Ab, Bb, Ca).
- La cuota es constante siendo la cuota = cuota de interés + cuota de amortización (Da).
- Tanto la cuota de interés como la de amortización varían, decreciendo aquella y creciendo ésta.
- El interés pactado es fijo (Ea), aunque volvemos a insistir, si fuese variable anualmente (lo habitual), una vez que se efectúe esa variación, sólo hay que realizar de nuevo los cálculos con los datos (capital, interés y tiempo) que en ese momento tengamos.

VI-1-,Relación entre capital inicial, interés nominal y tiempo-

A continuación vamos a calcular una fórmula que nos relacione el capital prestado (C), el interés nominal (i_k) y el tiempo (k períodos en n años). Sólo aconsejamos su lectura a aquellos con un nivel medio de Matemáticas (1º Bachiller o superior).

Cálculo de la fórmula

Nos olvidamos por un momento del interés nominal y hablaremos sólo de un interés i anual. Sabemos ya que si tenemos un capital C, al cabo de n años el valor final será el capital inicial C más los intereses, lo cual se representa en la expresión de la Formula 1

$$\text{Valor final}=C\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$$

Como ya hemos dicho, para devolver esa cantidad final se pagan cuotas anuales fijas de valor a euros, ahora bien, estas cuotas también acumulan intereses a lo largo del tiempo. Por ejemplo, la primera cuota que se paga al final del primer año, acumulará intereses a lo largo de n-1 años. Su valor final sería

$$a\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n-1}$$

La segunda cuota que se paga al final del segundo año, acumulará intereses durante n-2 años, y así sucesivamente con todas las cuotas. Todo esto quedaría mejor reflejado en la siguiente tabla, donde la cuota que se paga cada año siempre es a.

Cuota nº	Valor final de la cuota
1	Tras n-1 años$\rightarrow a \cdot \left(1+\dfrac{i}{100}\right)^{n-1}$
2	Tras n-2 años$\rightarrow a \cdot \left(1+\dfrac{i}{100}\right)^{n-2}$
3	Tras n-3 años$\rightarrow a \cdot \left(1+\dfrac{i}{100}\right)^{n-3}$
...	...
n-1	Tras 1 año$\rightarrow a \cdot \left(1+\dfrac{i}{100}\right)^{1}$
n	Tras 0 años$\rightarrow a$ (no acumula intereses)

La suma de todas las cuotas junto con sus intereses debe ser igual al capital prestado junto con sus intereses para poder decir que hemos devuelto el préstamo. Esto se refleja en la siguiente igualdad, donde el 2º miembro es la suma de los valores finales de las cuotas

$$C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} = a \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n-1} + a \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n-2} + a \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n-3} + \ldots + a \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{1} + a$$

Se observa que el segundo miembro de la igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón (1+i/100)(si la miramos de derecha a izquierda) [1].

Calculando la suma total del segundo miembro, la igualdad quedaría

$$C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} = a \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} - 1}{\left(1+\frac{i}{100}\right) - 1} \rightarrow C \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} = a \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} - 1}{\frac{i}{100}}$$

Y si despejamos a quedaría

$$C \cdot \frac{\frac{i}{100} \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^{n}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{n} - 1}$$

Aunque la expresión quedaría más completa si la expresamos en función del tanto nominal

$$C \cdot \frac{\frac{i_k}{100 \cdot k} \cdot \left(1+\frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^{n}}{\left(1+\frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^{n} - 1}$$

Para simplificar los cálculos para aquellos que no dominan las operaciones matemáticas, haremos unos pequeños cambios en la fórmula final. Llamaremos

$$I_k = \frac{i_k}{100 \cdot k}$$

[1] Recordemos que si teníamos una progresión geométrica de términos

$$a, a \cdot r, a \cdot r^2, \ldots, a \cdot r^{n-1}$$

la suma total de toda la progresión es

$$S = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$M_k = 1 + I_k$$

Quedando finalmente la fórmula como sigue

$$a = C \cdot \frac{I_k \cdot M_k^{n \cdot k}}{M_k^{n \cdot k} - 1} \tag{3}$$

Nota: Si el tiempo no viniese dado en años exactos, sólo habría que convertirlo mediante una regla de tres en años, por ejemplo, 3 años y 4 meses serían 3'33 años. (Recordar lo que se comentó al final de la parte IV).

Caso de la hipoteca de Borja y María

Recordemos a nuestra pareja protagonista y su problema, necesitan un préstamo hipotecario por un capital de 60.000 euros y el banco les ofrece ese préstamo a un 4'5% de interés nominal pagadero en cuotas mensuales durante 20 años. ¿Qué cuota tendrían que pagar?

Antes de aplicar la fórmula calculemos todos los datos necesarios:
n=20 (Se paga en 20 años)
k=12 (En cada año se pagan 12 cuotas, al ser mensual el pago)
n·k=20·12=240 (durante los 20 años se realizarán 240 pagos)
$I_{12} = \dfrac{i_{12}}{100 \cdot 12} = \dfrac{4'5}{1200} = 0'00375$
$M_{12} = 1 + I_{12} = 1'00375$
Finalmente la cuota sería igual a

$$a = C \cdot \frac{I_{12} \cdot M_{12}^{20 \cdot 12}}{M_{12}^{20 \cdot 12} - 1} = 60.000 \cdot \frac{0'00375 \cdot 1'00375^{240}}{1'00375^{240} - 1} = 379'5896 \simeq \textbf{380 euros}$$

Nuestros novios se preguntan además cuánto pagarían en total después de 20 años.Para ello bastaría sólo multiplicar el número de cuotas (n·k) por su valor.

a·n·k=380·20·12=380·240=**91200 euros**

31.200 euros más.

Compra de un coche

Supongamos ahora que el préstamo solicitado es de 18.400 euros para comprarse un coche. La financiera les exige pagar 36 cuotas cada 2 meses. ¿Qué cuota pagarían bimestralmente, si el interés pactado es del 7'6% nominal?

Calculamos los datos necesarios:
n=6 (36 cuotas cada dos meses nos indica que estarían pagando 6 años)
k=6 (En cada año se pagan 6 cuotas, al ser bimestral el pago)
n·k=6·6=36
$I_6 = \dfrac{i_6}{100 \cdot 6} = \dfrac{7'6}{600} = 0'0126$

$M_6 = 1 + I_6 = 1'0126$
Finalmente la cuota final será igual a

$$a = C \cdot \frac{I_6 \cdot M_6^{6\cdot 6}}{M_6^{6\cdot 6} - 1} = 18.400 \cdot \frac{0'0126 \cdot 1'0126^{36}}{1'0126^{36} - 1} = 638'9238 \simeq \mathbf{639\ euros}$$

y, ¿cuánto acabarían pagando por el coche?

a·n·k=639·6·6=639·36=**23.004 euros**

VI-2-,Cuotas de interés y de amortización-

Ya sabemos que la cuota que pagamos periódicamente mediante el *método de amortización francés* se divide en dos cuotas: *de interés y de amortización*. Veamos que cómo se calcula cada una. Para ello necesitaremos conocer el valor de la cuota *a*. Una vez calculado el valor de a, si llamamos CP al capital pendiente por amortizar antes de pagar la cuota, entonces se cumple que la cuota de interés c_i es igual a

$$c_i = CP \cdot \frac{i_k}{100 \cdot k} \tag{4}$$

y a partir de a y c_i, se calcula la cuota de amortización, c_a, simplemente efectuando la siguiente diferencia

$$c_a = a - c_i \tag{5}$$

Para ilustrar su aplicación veamos los dos ejemplos anteriores

Hipoteca de Borja y María

Seguimos con Borja y María y su préstamo de 60.000 euros, al 4'5% con capitalización mensual. La cuota era de 380 euros, pues bien calculemos cuánto hay de interés y de amortización en esa cuota.

$$c_i = CP \cdot \frac{i_{12}}{100 \cdot 12} = 60.000 \cdot \frac{4'5}{1200} = \mathbf{225\ euros}$$
$$c_a = a - c_i = 380 - 225 = \mathbf{155\ euros}$$

Entonces tras pagar la primera cuota el capital pendiente se reduciría en 155 euros, luego para la siguiente cuota el capital quedaría en 60.000-155=**59.845 euros**.
Sigamos hasta la siguiente cuota, que volverá a ser de 380 euros. Pero, ¿cuánto serán ahora la cuota de interés y la cuota de amortización?

$$c_i = CP \cdot \frac{i_{12}}{100 \cdot 12} = 59.845 \cdot \frac{4'5}{1200} \simeq \mathbf{224\ euros}$$
$$c_a = a - c_i = 380 - 224 = \mathbf{156\ euros}$$

Quedando ahora como capital pendiente

CP=59.845-156=**59.689 euros**

Se podría resumir todo el proceso en la siguiente tabla para verlo más claro

Mes	CP	a	c_i	c_a	CP tras la cuota
0	60.000	380	225	155	59.845
1	59.845	380	224	156	59.689
2	59.689	380	224	156	59.533
3	59.533	380	223	157	59.376
4	59.376	380	...	...	...

Y así podríamos continuar con todos los meses, hasta que acabase o cambiase el interés y en éste caso se volverían a realizar los cálculos con otro interés, menos meses y con un capital distinto, que sería el capital pendiente tras la última cuota.

Compra del coche

Recordemos que en este caso la cuota a pagar cada dos meses era de 639 euros con un interés nominal del 7'6%. Calculemos las cuotas de amortización y de interés, además del capital pendiente por amortizar tras el pago de la cuota.

$$c_i = CP \cdot \frac{i_6}{100 \cdot 6} = 18.400 \cdot \frac{7'6}{600} \simeq \textbf{233 euros}$$

$$c_a = a - c_i = 639 - 233 = \textbf{406 euros}$$

Quedando ahora como capital pendiente

CP=18.400-406=**17.994 euros**

Representemos en una tabla las operaciones ligadas al pago de las primeras cuotas

Bimestre	CP	a	c_i	c_a	CP tras la cuota
0	18.400	639	233	406	17.994
1	17.994	639	228	411	17.583
2	17.533	639	223	416	17.167
3	17.167	639	217	422	16.745
4	17.745	639	...	...	...

Parte VII

T.A.E.: Tasa Anual Equivalente

La idea del T.A.E. surge para simplificar la información que se nos da. La idea es intentar buscar un interés anual que sea equivalente al interés nominal que me ofrece el prestamista. Por ejemplo, si nos hablan de un interés nominal del 6'5% capitalizable trimestralmente la cosa no nos queda muy clara, pero si nos quedaría más clara si nos dijesen que en un año el interés que vamos a pagar es del 6'66%, el T.A.E.. Hay una fórmula que relaciona el interés nominal con el T.A.E., y es la que a continuación deducimos.

Cálculo de la fórmula

Partimos de un capital C, que se va a capitalizar k veces en un año al interés nominal i_k. Al pasar un año (n=1) este capital se habrá convertido en

$$(*) C \cdot \left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^k$$

¿Qué interés anual habría que aplicar a ese capital C para obtener la misma cantidad?
Buscamos un interés anual, que llamaremos TAE, de tal forma que al aplicarse a C, nos de la misma cantidad anterior.
Si aplicamos ese interés anual TAE a C el capital al final del año sería

$$(**) C \cdot \left(1 + \frac{TAE}{100}\right)$$

Entonces las dos cantidades (*) y (**) deben ser iguales, lo cual se indica en la siguiente igualdad que desarrollamos

$$C \cdot \left(1 + \frac{TAE}{100}\right) = C \cdot \left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^k \Rightarrow 1 + \frac{TAE}{100} = \left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^k \Rightarrow \frac{TAE}{100} = \left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^k - 1 \Rightarrow$$

$$TAE = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{i_k}{100 \cdot k}\right)^k - 1\right] \Rightarrow$$

Resumiendo, el TAE se calcularía aplicando la fórmula:

$$TAE = 100 \cdot \left(M_k^k - 1\right) \text{ donde } M_k = 1 + \frac{i_k}{100 \cdot k} \qquad (6)$$

Comprobemos la validez de la fórmula con el ejemplo que utilizábamos para comenzar este apartado.

Era un interés del 6'5% capitalizable trimestralmente, ¿cuál sería su T.A.E.?
k=4 (hay cuatro trimestres en un año)
$i_4 = 6'5$
$M_4 = 1 + \frac{i_4}{100 \cdot 4} = 1 + \frac{6'5}{400} = 1'01625$

TAE=100·($1'01625^4$-1)≃100·(1'0666-1)=100·0'0666=**6'66%**

En un año se ha pagado de intereses el 6'66% del capital inicial.

Para finalizar, veamos el T.A.E. en los dos ejemplos de la Hipoteca y la compra del coche.

Hipoteca de Borja y María

Calculamos el T.A.E. del préstamo hipotecario de Borja y María, que estaba a un interés nominal del 4'5% capitalizable mensualmente.
k=12
i_{12}=4'5
$M_{12} = 1 + \frac{i_{12}}{100 \cdot 12} = 1 + \frac{4'5}{1200} = 1'00375$

TAE=100·($1'00375^{12}$-1)=**4'59%**

En un año se pagarían de intereses el 4'59% de 60.000 euros.

Compra del coche

k=6
$i_{12} = 7'6$ $M_6 = 1 + \frac{i_6}{100 \cdot 6} = 1 + \frac{7'6}{1200} = 1'0126$

TAE=100·($1'0126^{6}$-1)=**7'82%**

Nota:Comentar que en el T.A.E., por definición, se deberían incluir como intereses todos los gastos de apertura de un préstamo (comisión de apertura, de estudio, ...), lo cual hace que en el primer año el T.A.E. no nos indique con claridad qué porcentaje real del capital inicial pagamos. Actualmente, la mayoría de los bancos notifican al cliente el T.A.E. calculado sólo a partir del interés nominal, es lo que se denomina Coste Efectivo Remanente (C.E.R.).

Parte VIII

Bibliografía

- Matemáticas 4º de E.S.O., Opción B: José María Vázquez de la Torre Prieto, Mª Carmen Flores Fernández, Adolfo López Gómez, Ladislao Navarro Peinado y José María Vicente Carreto.
- Matemática Financiera: Concepción Delgado con la colaboración de Juan Palomero.
- Matemática Financiera: A. Terceño, J. Sáez, M. G. Barberá, F. Ortí, J. de Andrés y C. Belvis.
- Matemáticas Financieras: Mariano Álvarez García.
- Página Web http://www.5campus.com/leccion/operfincp/inicio.html: Sara Fernández López.
- Página Web http://www.platea.pntic.es/ migarcia/basicos.htm: Miguel García.