HISTORIA VERSUS ENSEÑANZA: LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Aurora Gallardo & Abraham Hernández
CINVESTAV- IPN México

Autores como Glaeser (1981), Sesiano (1985), Schubring (1988), Paradis (1989), Lizcano (1993) y Gallardo (2002) entre otros, han contribuido al análisis histórico epistemológico de los números negativos. Estos investigadores han evidenciado que el proceso de reconocimiento de los números negativos, en tanto concepto matemático legítimo no ha evolucionado de manera continua sino que ha variado cultura a cultura, mostrando incluso rupturas y retrocesos.

En la primera parte de este escrito nos referiremos a dos momentos cruciales en la historia temprana de los números negativos, a saber: la naturaleza algebraica de su génesis y el surgimiento del primer lenguaje simbólico que permitió reconocer y aceptar soluciones negativas. En la segunda parte del presente escrito se confrontan al estudiante y al profesor de educación básica con uno de los problemas históricos que desató la emergencia inaplazable de la solución negativa.

PRIMERA PARTE: HISTORIA

La génesis algebraica de los números negativos.

Desde épocas remotas 400 a. c., los chinos realizaban sus cálculos aritméticos utilizando pequeñas varillas. Colocaban estos numerales concretos (números barras) sobre una superficie plana (tablero de calculo) llegando así a la creación de numerales posicionales decimales que mostraron desde un principio su gran potencialidad. Por consiguiente, el concepto de número expresado en palabras se transcribió a una notación posicional sobre un tablero de cálculo. Este hecho jugó un papel muy importante en el paso de un nivel de pensamiento verbal a un nivel generalizado y abstracto, pavimentando así, el camino para el uso de símbolos.

Los nueve dígitos de la notación de número barra eran de dos tipos, dependiendo de la posición, como se muestra en el diagrama siguiente:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UNIDADES CIENTOS DIEZ MILES	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
DIECES MILES	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Por ejemplo, el número 94 571 se representaba como: 𝍨 𝍬 𝍤 𝍯 𝍠

El número 608 como: 𝍥 𝍧 donde el espacio vacío es consistente con el sistema de valor posicional. De hecho, los chinos realizaban las operaciones elementales dando estatus de número al espacio vacío, que evolucionó con el uso del cálculo, en el concepto del cero. Así también, los chinos utilizaron varillas de color rojo para representar los números positivos y varillas de color negro para los números negativos. Una forma alternativa de indicar los números negativos fue colocar sobre una varilla en forma diagonal. Así – 806 se expresaba como: ~~𝍧 𝍥~~ Esta notación pasó posteriormente a la forma escrita.

El tablero de cálculo permitió a los chinos extender sus bases aritméticas a otros niveles. Se sabe que la evolución de los conceptos geométricos estuvo relacionada con la asociación de números a mediciones, particularmente longitudes y áreas. Esta asimilación gradual resultó en reglas geométricas como las que conectan los lados de un triángulo rectángulo o aquellas que relacionan las áreas de un rectángulo a un cuadrado, cuando se dividen en partes más pequeñas. Este tipo de consideraciones dio origen al álgebra geométrica común a griegos y babilonios. Pero los chinos fueron más allá al aritmetizar estos conceptos de álgebra geométrica sobre el tablero de cálculo donde las posiciones jugaban un papel crucial. De hecho, se descubrió gradualmente que este método que involucra los números barra era aplicable no sólo a problemas particulares sino que podía generalizarse a conjuntos de problemas. Esto último se advierte en el terreno del álgebra, donde los números negativos cobran sentido en el contexto de la resolución de ecuaciones.

Un ejemplo típico tomado del “Tratado Matemático de los Nueve Capítulos”, 250 a. c., cuyo enunciado y resolución se expresan en lenguaje natural, se plantea:

“Al vender dos vacas y cinco cabras para comprar trece cerdos hay un sobrante de 1000. El dinero obtenido de la venta de tres vacas y tres cerdos alcanza exactamente para comprar nueve cabras. Al vender seis cabras y ocho cerdos para comprar cinco vacas, hay un déficit de 600. ¿Cuál es el precio de una vaca, una cabra y un cerdo?”.

El siguiente sistema de ecuaciones es una traducción directa actual del enunciado:

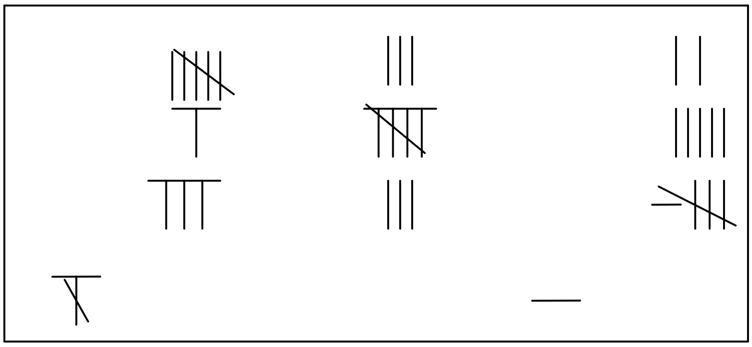
$$\boxed{\begin{aligned} &2x + 5y = 13z + 1000 \\ &3x + 3z = 9y \\ &6y + 8z = 5x - 600 \end{aligned}}$$

Ordenando el Sistema se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} &2x + 5y - 13z = 1000 \\ &3x - 9y + 3z = 0 \\ &-5x + 6y + 8z = -600 \end{aligned}}$$

Este problema involucra ventas y compras, que se corresponden con positivos y negativos, respectivamente y el sistema de ecuaciones relacionado en arreglo rectangular (representado en el tablero de cálculo chino) es el siguiente:

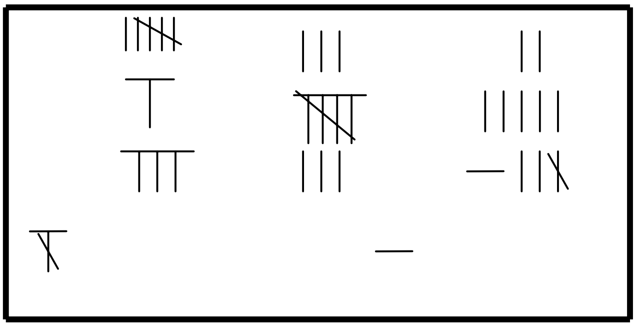
– 5	3	2
6	– 9	5
8	3	– 13
– 600	0	1000



Si analizamos el método de solución que emplearon los chinos, nos daremos cuenta que los símbolos usados para las variables carecen de importancia; los coeficientes de las variables son lo importante. En particular, propusieron un esquema a fin de identificar los coeficientes en forma tal que no haya necesidad de escribir las variables.

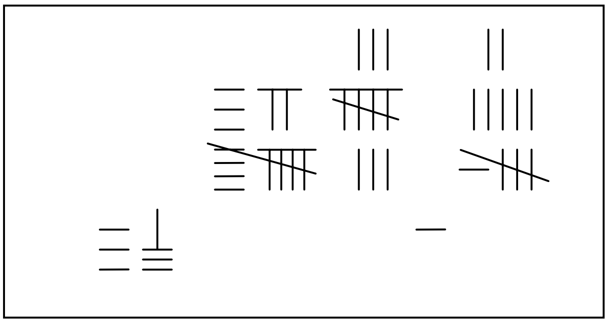
Primero comprobamos que los coeficientes de las variables aparezcan en el mismo orden en cada columna. En seguida hacemos las posibles operaciones que utilizaron lo chinos para resolver el problema planteado:

C_1	C_2	C_3
– 5	3	2
6	– 9	5
8	3	– 13
– 600	0	1000



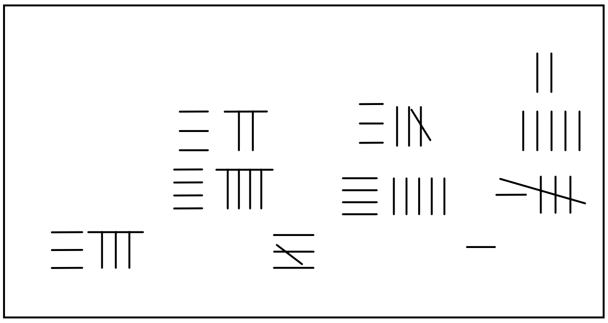
$C_3(5) + C_1(2) \rightarrow C_1$

0	3	2
37	– 9	5
– 49	3	– 13
3800	0	1000



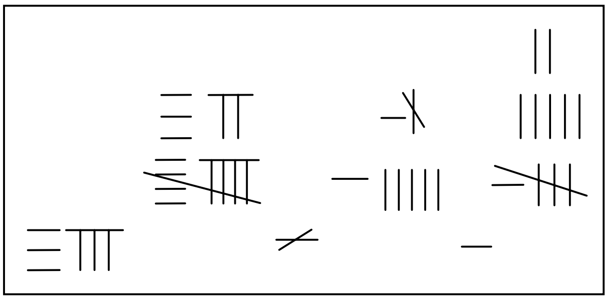
$C_3(–3) + C_2(2) \rightarrow C_2$

0	0	2
37	– 33	5
– 49	45	– 13
3800	– 3000	1000



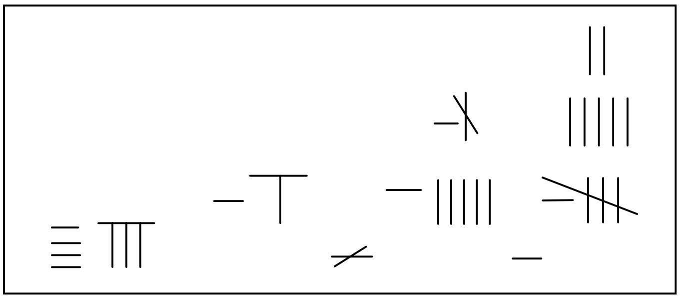
$C_2(\div 3) \rightarrow C_2$

0	0	2
37	– 11	5
– 49	15	– 13
3800	– 1000	1000



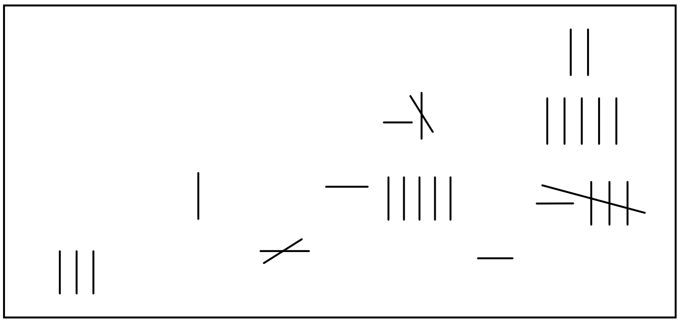
$C_2(37) + C_1(11) \rightarrow C_1$

0	0	2
0	−11	5
16	15	−13
4800	−1000	1000



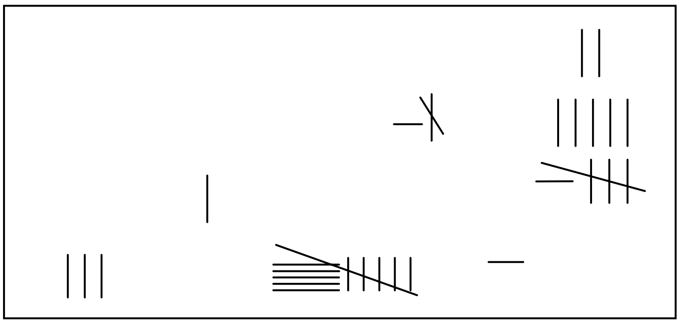
$C_1(\div 16) \rightarrow C_1$

0	0	2
0	−11	5
1	15	−13
300	−1000	1000



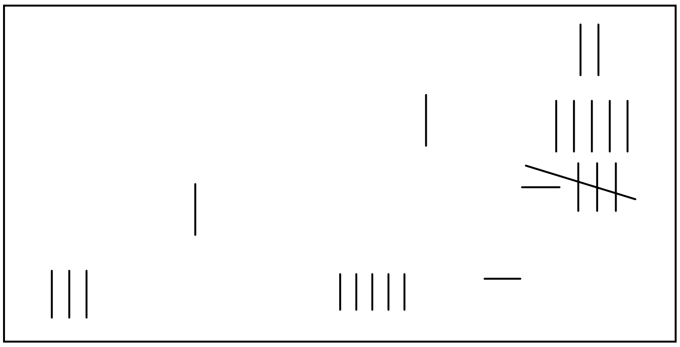
$C_1(-15) + C_2 \rightarrow C_2$

0	0	2
0	−11	5
1	0	−13
300	−5500	1000



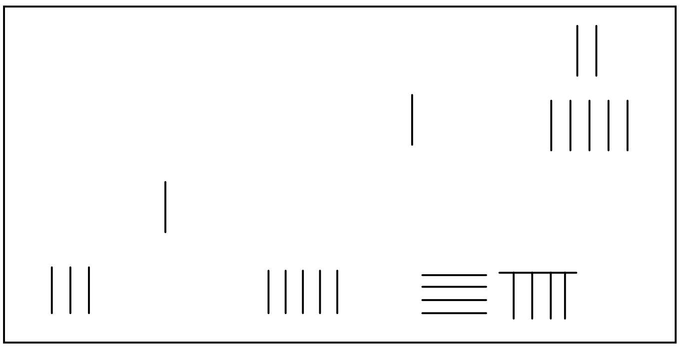
$C_2(\div -11) \rightarrow C_2$

0	0	2
0	1	5
1	0	−13
300	500	1000



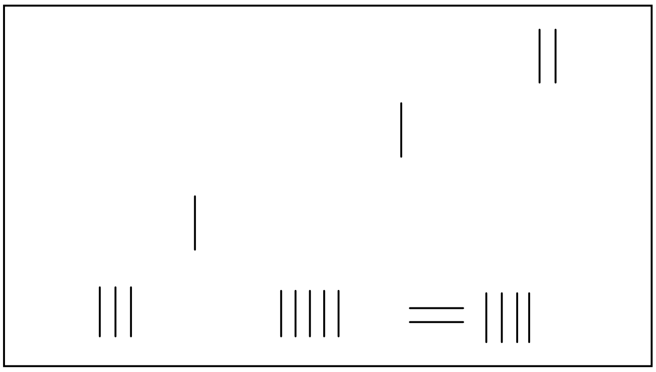
$C_1(13) + C_3 \rightarrow C_3$

0	0	2
0	1	5
1	0	0
300	500	4900



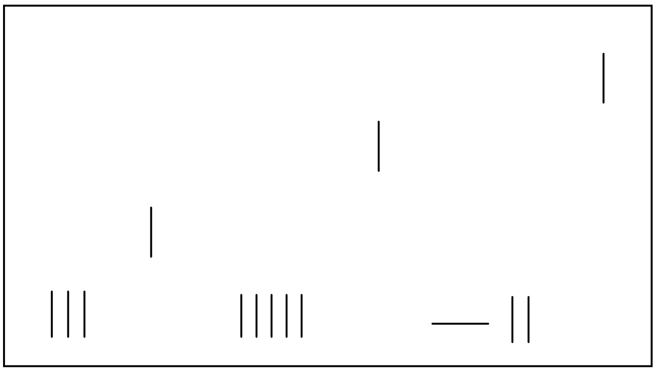
$C_2\,(-5) + C_3 \rightarrow C_3$

0	0	2
0	1	0
1	0	0
300	500	2400



$C_3\,(\div 2) \rightarrow C_3$

0	0	1
0	1	0
1	0	0
300	500	1200



De lo anterior se obtiene que las soluciones son: $x = 1200$; $y = 500$; $z = 300$

De este modo, el sistema del problema planteado, en arreglo matricial, se transformaba a fin de que todos los números a la derecha de la diagonal principal fueran cero (sólo operaban las columnas). Esta matriz transformada corresponde a un conjunto diagonalizado de ecuaciones, del cual todas las incógnitas se determinan sucesivamente. Cuando este método se aplicaba a diversos problemas, era inevitable que desembocara en el concepto de una nueva clase de números, distintos de los conocidos. Así, los negativos emergen de este lenguaje de cálculo, libres de los significados concretos que tenían en el contexto de los problemas verbales.

Como ya se mencionó, para fines de cómputo los números descritos con los términos precio de venta, precio de compra, excedente, déficit, se transcribían a una forma concreta: los números barra.

Así, los conceptos de positivo y negativo que inicialmente evolucionaron de entidades opuestas, como ganancia y pérdida, vender y comprar, en este tablero de cálculo, se desprenden de dichas asociaciones lingüísticas y devienen en un conjunto numérico, cuyas propiedades se conectan con las de otro grupo familiar, el de los números positivos.

En términos modernos, tales propiedades se describen como sigue: supóngase que $A > B$ y $B > 0$, entonces:

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Para sustraer} & \pm A - (\pm B) = & \pm & (A - B) \\
 & \pm A - (\mp B) = & \pm & (A + B) \\
 & 0 - (\pm A) = & \mp & A \\
\textit{Para sumar} & \pm A + (\pm B) = & \mp & (A + B) \\
 & \pm A + (\mp B) = & \pm & (A - B) \\
 & 0 + (\pm A) = & \pm & A
\end{array}
$$

En síntesis, puede afirmarse que el antiguo método chino es el método actual que consiste en transformar el sistema de ecuaciones en otro equivalente expresado por una matriz triangular. Los caracteres chinos escritos están en líneas verticales de derecha a izquierda, mientras que nuestras ecuaciones están en líneas horizontales de izquierda a derecha, es decir, plantean los problemas en términos de la matriz transpuesta. Mediante este arreglo matricial los chinos pasaron del lenguaje retórico a un lenguaje notacional que permitió resolver problemas prácticos por medio de sistemas de ecuaciones lineales. Las posiciones de los coeficientes y términos independientes sobre el tablero de cálculo propició generalizar a sistemas de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas. Ahora bien, se observa que en la traducción directa de los problemas al simbolismo algebraico, el coeficiente del término inicial de cada una de las ecuaciones tiene signo positivo; sin embargo, los coeficientes que ocupan una posición intermedia pueden ser también negativos. Por otra parte, los coeficientes de la misma incógnita están en una fila y los términos independientes en otra. Este arreglo matricial permite la presencia de números negativos. Una manera en que operaron la multiplicación fue realizando sumas o sustracciones reiteradas y las divisiones por sustracciones sucesivas o en base a la multiplicación.

Podemos concluir que el Tratado de los Nueve Capítulos muestra la génesis algebraica de los números negativos como resultados intermedios en el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Este hecho permitió interpretar los conceptos de compra y venta en problemas de enunciado verbal.

El surgimiento de las soluciones negativas en la historia

No sería sino hasta el siglo XV que Nicolás Chuquet tuviera la gran audacia de dar sentido a soluciones negativas en ecuaciones y problemas. De hecho, la obra de Chuquet contribuyó a establecer los cimientos del lenguaje algebraico a fines del siglo XVI.

En la obra "Triparty en la science des nombres" de Nicolás Chuquet, Lyon 1484, el autor enuncia las operaciones fundamentales para números simples y compuestos (denomina números compuestos a los que contienen expresiones irracionales; por ejemplo, 4 + $\sqrt{5}$ + 5 $\sqrt{15}$). En la tercera parte de su obra dedicada al álgebra, extiende la operatividad de los números simples y compuestos a las ecuaciones. Introduce un lenguaje sincopado avanzado, donde la generalidad de su notación y terminología apuntan a la simbolización del álgebra.

Chuquet explica que cada número puede considerarse estrictamente como cantidad y para expresarlo se puede escribir el cero en la parte superior del número, por ejemplo 12^0 es 12 y 13^0 es 13. Además, cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua; por ejemplo, 12^1 y 13^1, representan los números lineales 12 x y 13 x, respectivamente. Del mismo modo, el número superficial cuadrado 12^2 equivale a: $12x^2$ y 13^2 expresa: $13x^2$; y así sucesivamente. Cualquiera de las expresiones anteriores es positiva y si es necesario considerar la negativa, se debe añadir la palabra "menos", de la siguiente manera $\bar{m}$ 12^0 , $\bar{m}$ 12^1 , $\bar{m}$ $R^2 12^3$.

Chuquet introduce una notación para exponentes negativos. Asigna el nombre de primer menos al exponente de la expresión 12^{1m} y el segundo menos al exponente de 12^{2m} . Estos, a su vez, son diferentes del – 12 primeros, o sea, $\bar{m}\,12^1$.

Podemos afirmar que la gran importancia de Chuquet en relación al tema en cuestión, estriba en que sus lenguajes y métodos algebraicos permitieron encontrar soluciones de algunos problemas que sus contemporáneos consideraban insolubles. Si el método conducía a un número negativo, este número era la respuesta y debía ser interpretado en el proceso en que estaba involucrado. En el lenguaje simbólico creado por Chuqet los números negativos adquirieron presencia escrita, ya no serían invisibles ni absurdos. Sin embargo, sería hasta el siglo XIX que los números positivos y negativos adquirieran el estatus de números enteros. En 1867 apareció la obra de Herman Hankel, "Teoría del Sistema de Números Complejos", donde los obstáculos concernientes a estos números son superados. Su libro estuvo consagrado a la exposición formal de la teoría de los números complejos y no es más que a título de preliminares que resolvió el problema de los números negativos.

Retomando la obra de Chuquet, a continuación se presenta la interpretación atribuida a la solución negativa en un problema de compra y venta de mercancía. El enunciado afirma que:

"*Un comerciante compró 15 piezas de ropa por la suma de 160 escudos. Algunas pagó a 11 escudos cada una y las restantes a 13 escudos la pieza. Determinar cuántas prendas compró de cada clase".*

Chuquet utiliza lenguaje síncopado. Denota la incógnita ***x*** con el símbolo 1^1 y 2x con 2^1. Además, el signo menos lo representa por m y el signo más por p. En terminología moderna, el problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 15$$
$$11x_1 + 13x_2 = 160$$

Considerando $\mathbf{x_1 = x}$, como la incógnita, se tiene $\mathbf{x_2 = 15 - x}$ y la segunda ecuación se transforma en la siguiente: $11x+13(15-x) = 160$, donde $x = 17\frac{1}{2}$,

Chuquet afirma: *"al realizar las operaciones "1^1 por 11 escudos" más, "15 menos 1^1", por 13" se obtiene "195 menos 2^1" que corresponden a "160 escudos". Enseguida se igualan las partes. Ahora bien, 2^1 es el número que divide y 35 el número a dividir. Dividiendo 35 por 2 resultan 17 $\frac{1}{2}$ piezas por el* *precio de 11 escudos. Al sustraer 17* $\frac{1}{2}$ *de 15 queda menos 2* $\frac{1}{2}$ *piezas al precio de 13 escudos cada una. Después de verificar la ecuación, Chuquet observa que estos problemas son imposibles: es decir, el resultado es negativo. En este caso, la imposibilidad se debe a que* $\frac{160}{15}$*, igual a 10* $\frac{2}{3}$*, no es un valor entre los precios dados 11 y 13. Propone la interpretación siguiente: el comerciante compró 17* $\frac{1}{2}$ *piezas a 11 escudos cada una con dinero en efectivo, pagando 192* $\frac{1}{2}$ *escudos. También adquirió 2* $\frac{1}{2}$ *piezas a 13 escudos cada una para pagar a crédito la cantidad de 32* $\frac{1}{2}$ *escudos. De esta forma, contrajo una deuda 32* $\frac{1}{2}$ *que, al restarla de 192* $\frac{1}{2}$*, se obtiene 160. Siguiendo el mismo razonamiento, Chuquet considera que las 2* $\frac{1}{2}$ *piezas adquiridas a crédito deben sustraerse de las 17* $\frac{1}{2}$ *piezas compradas, y el comerciante tiene únicamente 15 piezas que, realmente, son de él.”*

Se concluye entonces, que Chuquet aceptaba y representaba simbólicamente la solución negativa en ecuaciones y problemas. Una vez verificada la solución por el método de sustitución en la ecuación o ecuaciones correspondientes, ésta recibía una interpretación adicional adecuada al contexto, en el caso de problemas verbales.

SEGUNDA PARTE: ENSEÑANZA

Aportaciones al álgebra educativa

¿Qué sucede cuando un estudiante de secundaria, ubicado en la transición de la aritmética al álgebra se enfrenta al problema de Chuquet?

Se mencionó al comienzo de este escrito que la resistencia a la aceptación de soluciones negativas en ecuaciones y problemas, se manifiesta tanto en el ámbito histórico del desarrollo de la matemática como en estudiantes que se inician en el estudio del algebra simbólica. En este último caso, tal evitamiento de la solución negativa está acompañado por lo general de una separación, en la práctica escolar, entre el manejo operativo de los números con signo y la resolución de ecuaciones algebraicas. Por otra parte, la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros, durante el proceso de adquisición del lenguaje algebraico por el estudiante de secundaria constituye un elemento esencial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones (Gallardo, 2002).

Para mostrar esta problemática con estudiantes se analizan las dificultades presentadas por el alumno (R) al momento de operar con negativos durante el proceso de transición de la aritmética al álgebra. Éste cursa el segundo año de secundaria y tiene 12 años. En dicho análisis, se examinan las interpretaciones atribuidas por el estudiante a la noción de orden en los enteros, simétrico de un número, y el uso de la operatividad aritmético – algebraico en adiciones, sustracciones, expresiones abiertas, ecuaciones y problemas.

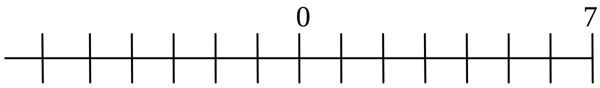
Este Estudio de Caso corresponde al estudiante de mejor desempeño de la investigación reportada en Gallardo (1994). Se presentan aquí los ítems anteriores al problema de Chuquet. Ello permite conocer cómo interpreta y opera este estudiante con números negativos antes de que resuelva el problema histórico en cuestión. De hecho, la entrevista termina con la resolución del problema de Chuquet por R.

Estudio de Caso (R)

En el fragmento izquierdo del formato siguiente, aparece el diálogo de R con el entrevistador (E) y en el recuadro de la derecha las observaciones de E, cuando las juzgó pertinentes.

Ítem: 7 – 12 =

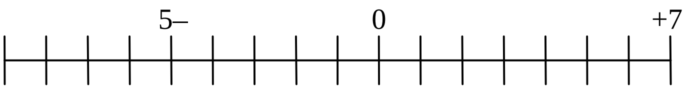
R: 7 menos 12 es igual a menos 5
E: ¿Y como le hiciste?
R: Por que lo que le falta a 7 [señala el 7] para llegar a 12 [señala el 12] es 5. Como no alcanza, o sea, baja del 0, entonces queda menos 5.
E: ¿Y como comprobarías eso en la recta?
[R dibuja una recta]



La sustracción como complementación (¿Cuánto le falta…?)

R. Así. Aquí está el 0 [Señala el 0]. De aquí para acá [Señala de 0 hacia el 7] son positivos de acá para acá [señala el 0 hacia la izquierda] son negativos.
E: Sí
R: Entonces sería 7 menos; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, [cuenta de +7 hasta llegar a –5] 5.
E: Sí.
R: Sería 5. [Señala el menos 5] y como está en el lado de los positivos es 5.
E: Del lado de los negativos.
R: Del lado de los negativos, perdón.

[Rastros de R en la recta]:



En el modelo de la recta; el signo menos le indica una dirección. Utiliza el conteo de uno en uno

Ítem: – 1 + ☐ = 5

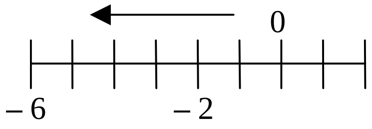
E: Muy bien ¿Y menos 1 más cuadrito igual a 5?
R: ¿Menos 1 más cuadrito igual a 5? Sería 6
E: ¿Cómo le hiciste?
R: Porque menos 1 [Señala -1] está del otro lado del 0, entonces es 1 atrás del 0 [mueve la mano hacia la izquierda]. Y 5, está a 5 lugares del 0, entonces se suman los lugares. Entonces 1 atrás del 0 más 5 para llegar del 0 al 5, son 6 [mueve la mano hacia la derecha dibujando una recta imaginaria].

Recurre al modelo de la recta numérica. El signo + indica “moverse a la derecha”

Ítem: – 2 – 4 =

E: Muy bien, ¿Y menos 2 menos 4?

R: Menos 2 menos 4. Aquí (– 2 – 4 =) sería menos 6. Porque es menos 2, o sea, siempre que se hace menos en una recta se cuenta hacia este lado [señala hacia la izquierda en una recta que dibuja].



Entonces sería menos 2 [señala – 2], menos 4 es menos 6. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; menos 6 [señala – 6],

Ítem: 3 – (– 5) =

E: Muy bien, ahora tenemos 3 menos menos 5.

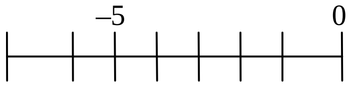
R: 3 menos menos 5. Aquí [3 – (– 5) =] sería 8,

porque aquí [3 – (– 5) =] se usa la ley de los signos. Menos por menos, o sea signos iguales, es más. Entonces sería 3 más 5 igual a 8 [escribe] 3 + 5 =8

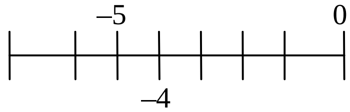
Introduce la ley de los signos, propia del dominio multiplicativo.

Ítem: – 5 – (–1) =

E: Muy bien ¿Y ésta?
R: Ésta es lo mismo. No. Es menos 5, menos menos 1. Es más o menos lo mismo, porque, o sea, 0 [dibuja una recta y señala el 0]:



Tendríamos 1, 2, 3, 4, 5 (señala –5).
Tendríamos el menos 5, menos menos 1, daría menos 4.
Porque sería menos 5 más 1, menos 4 [escribe]:



Utiliza en forma simultánea el modelo de la recta numérica y la regla de los signos.

Ítem: El simétrico de – 2

E: Muy bien. Ahora, el simétrico de menos 2. R: Sería 2 [escribe 2]. E: ¿Por qué? R: Porque así es el simétrico [traza una recta vertical y a continuación una perpendicular en ella]. Esta raya tiene que seguir para este lado y es igual los números. Este 1 1 [se interrumpe]. Es primero aquí 1 [coloca el 0]. Su simétrico –2 –1 0 1 2 –1 1 –1 1 es menos 1 Aquí está el 0 .Menos 2 y su simétrico sería 2	Explica el simétrico utilizado espontáneamente el modelo de la recta numérica.

Ítem: Escribe el número que corresponda a cada caso:

- La temperatura es de 20 grados bajo 0.
- José ganó 2500 pesos.
- Rosa no ganó ni perdió.
- Se deben 25,000 pesos a la escuela.

E: ¿Cómo podrías poner con números estas expresiones? R: Menos 20 [Escribe –20°]. E: Sí. R: José ganó 2500 pesos [escribe]: + 2 500. 0 – 25,000 E: Muy bien.	Verbaliza menos 20 pero escribe –20°. En estos tres casos, escribe números con signos.

Ítem: Escribe un número entero menor que –7

E: Muy bien, ahora escribe un número menor que –7 R: Un número entero menor que menos 7. Menos 8… E: ¿Por qué es menos 8 menor que menos 7? R: Porque pon tú que tuvieras 10 pesos, le restas 7; entonces sería menos 7; te quedarían 3 y le restas menos 8 y te quedan 2 o sea que te quedan menos, te quedaría menos. E: ¿Y si yo te pidiera ahora que lo explicaras en la recta numérica? R: Porque está mas distante del 0 … E: Porque está más distante del 0, pero también, por ejemplo, el 20 esta más distante del 0. R: Sí, pero está del otro lado del 0. Del lado de los negativos.	Plantea las sustracciones: 10 – 7 = 3; 10 – 8 = 2 Asocia el signo de operación al número. Afirma: “10 pesos le restas 7 sería –7, te quedarían 3”. Considera que –8 es menor que –7 porque el resultado de 10 – 8 es menor que el resultado de 10 – 7.

Ítem: Encuentra el valor de la siguiente expresión: $5 - x - 2 =$

E: ¿A que podemos poner igual esta expresión?
R: *x*.
E: La expresión es 5 menos *x* menos 2.
R: ¿Quieres que te dé el resultado o *x*?
E: Quiero que me digas a qué puedo poner igual esta expresión: [$5 - x - 2 =$].
R: Cualquier número podría solucionar esta expresión [$5 - x - 2 =$].
E: Pero, ¿La puedo reducir un poco?
R: La podemos reducir como a… ¿cómo?
E: Lo que hemos llamado simplificar.
R: Sí, sería 3 menos x igual [escribe: $3 - x =$].
E: ¿Podríamos simplificarla más?
R: No.
E: No, ¿verdad? ¿Por qué?
R: Porque x no se podría combinar, porque éste [$3 - x =$] no lo sabemos.

Entonces no lo podemos combinar con éste [$3 - x =$]. Porque éste [$3 - x =$] ya sabemos

que es una unidad y éste [$3 - x =$] es x número de unidades pero como no sabemos cuántas

unidades, no lo podemos combinar con esté [$3 - x =$].

Ante la expresión abierta $5 - x - 2 =$ manifiesta dos posibilidades. Una en el ámbito aritmético: “dar el resultado”.

La otra en ámbito algebraico: “encontrar x”, Verbaliza además la posibilidad de igualar la expresión a un parámetro

Ítem: Encuentra el valor de la siguiente expresión: $x + 3 - 1 =$

E: Así es. Esto [$x + 3 - 1 =$] ¿ A qué es igual?
R: Sería x más 2, igual a [escribe $x + 2 =$]

E: Este es igual [$x + 2 =$], ¿por qué lo pusiste?
R: Porque cualquier número puede dar esta operación [$x + 2 =$] y cualquier número, o sea, esto [$x + 3 - 1 =$] es lo mismo que ésto [$x + 2 =$]. Entonces esta operación [$x + 2 =$] es igual a algo.
E: Sí.
R: Es igual, pon tu a *y* [escribe: $x + 2 = y$].
Cómo puede ser cualquier número, tampoco lo sabemos. Pero tiene que dar igual a algo. O sea que

le puse [$x + 2 = y$] por eso.

En la expresión abierta $x + 3 - 1 =$, Roberto explicita el parámetro con la letra y.

Ítem: Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $6x + 40 = 12$

E: Te voy a pedir que esta ecuación [$6x + 40 = 10$] la resuelvas sin calculadora.
R: Es 6, menos 30 … 5 [escribe -5].
E: ¿Cómo le hiciste?
R: Primero pasas ésta[$6x + 40 = 10$] del otro lado. Sería 10 menos 40 es

igual a menos 30; 6 por algo [$6x + 40 = 10$] te da menos 30. Entonces 6 por menos 5, te da menos 30.
E: Muy bien.

Inversión de operaciones

Ítem: Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $2x + 8 = x + 8$

R: Está [2x + 8 = x + 8] también la puedes hacer sin calculadora. [Escribe: x = 16]. A ver, 32 más 8, no es igual a 16 [lo tacha]. 8, 2x … x menos 8 … entonces x es igual a x, entonces es igual a … sería más … [escribe: 2x = x + 8 – 8].
E: ¿Cuánto vale la x?
R: 0 [escribe x = 0]
E: ¿Y está bien?
R: 2 por 0 es 0, mas 8, 8. 0 más 8, 8. X es igual a 0.
E: Muy bien.

El primer intento es erróneo. Verifica en forma espontánea y llega al resultado correcto. No hay dificultad para concebir la solución nula.

Ítem: Resuelve el problema: Un individuo nació en 1947. ¿Qué edad tenía en 1952?

E: Aquí hay un problemita…
R: Un individuo … 15 años [Escribe]:

Roberto se equivoca al restar. Presenta mejor manejo de la sustracción cuando la interpreta como “completar a” que cuando visualiza como “quitar de”.

E: ¿Por qué?
R: Esto [**19** 47, **19** 52] como es igual se elimina. Entonces sería éste [19 **52**] menos este [19 **47**] porque entre ellos hay un lapso de tiempo. Hay una cierta cantidad de años, que pon tú, tienes una recta ,
aquí, tienes 1, por decirlo así.

Recurre en forma espontánea al modelo de la recta numérica.

Esto vale 1947 y 1952, pon tu hasta acá
Y si tú le quitas esto , nada más lo que pasó entre éste y éste
O sea de 47 a 52 eso hay, 15.
E: ¿Cuánto hay de 47 a 52?
R: 15, yo creo que sí …, No, no.
E: No son tantos. Está más cerquita.
R: Serían, 47 menos 52, serían como 8 … 5 [Corrige]:

$$\begin{array}{r}52\\ -47\\ \hline 05\end{array}$$

E: ¿Qué estaba pasando?

Nuevamente verbaliza mal la sustracción.

R: Es que no le quité de aquí $\begin{array}{r}52\\ -47\\ \hline 05\end{array}$, pase 1 para acá $\begin{array}{r}5\;2\\ -4\;7\\ \hline 0\;5\end{array}$ y no se lo quité.

Ítem: La temperatura en la noche era de 12° bajo 0 y desde la noche hasta la mañana siguiente subió 8 grados ¿Qué temperatura había en la mañana?

E: Ahora un problema de temperatura.
R: La temperatura en la noche era de 12 grados bajo 0, desde la noche hasta la mañana subió 8 grados.
E: Sí
R: ¿Subió 8 grados o subió a 8 grados?
E: Subió 8 grados. Marcaba 8 grados bajo 0 y aumentó 8 grados.
R: Entonces subió de 12 bajo 0, es igual a menos 4.
E: ¿Por qué?
R: Serían menos 4 porque menos 12, por qué está bajo 0. Más 8 que subió, es igual a menos 4.

“Subió a” recuerda “completar a”. indica mas claramente la ejecución de una acción.

Ítem: El filosofo Platón nació en el año 430 antes de Cristo y murió en el año 349 antes de cristo ¿A qué edad murió?

E: Muy bien. A ver esté.
R: Nació en 430 antes de cristo y … ¿a qué edad murió? Antes de cristo, ¿verdad?
E: Antes de cristo vivió Platón

$$\begin{array}{r} 430 \\ 390 \\ \hline 081 \end{array}$$

> Realiza una sustracción de números naturales, no de números con signo. Nótese que la "resta" se escribe verticalmente y no hay necesidad de indicar el signo de operación (ámbito aritmético).

R: ¡Ah, sí! … 81 años [Escribe
E: ¿Cómo lo podemos ver en la recta?
R: Ahí es igual. Nació por aquí y murió por acá
Entonces aunque esto vaya para allá [derecha] o vaya para acá [izquierda], de cualquier manera este lapso siempre va ser el mismo.
E: ¿Dónde se encuentra el 0?
R: Acá

> Coloca erróneamente el 0.

E: El 0.
R: A ver, si esté (430) es el 430 [Lo escribe] y (430 349) éste es el 349 [lo escribe] el cero debe andar por:

430 349 0
acá

> Aquí aparece un reconocimiento de números con signo. Coloca en la recta 430 a la izquierda de 349. Sitúa al 0 correctamente.

R: Entonces, ¿Cómo son esos números?
E: Estos números van al revés; 430 va antes del 349.
E: Están antes del 0, ¿cómo son?
R: Negativos.
E: Los indicamos adecuadamente [agrega los signos a los números]

–430 –349 0

E: Entonces el 81 ¿Dónde anda?
R: El 81 (–430 –349 0) no se pone negativo porque es el lapso de tiempo. Es la cantidad. Aunque está del lado del negativo, va a ser una cantidad.
E: Y si te preguntaran la edad de alguien que hubiera nacido aquí (0) y hubiera muerto acá (0) ¿qué edad hubiera tenido?
R: Primero sacaría lo que tiene de aquí (0) acá (0)
y luego de acá (0) a acá (0) y lo sumaría
E: Y esa cantidad cómo será ¿negativa o positiva?
R: Positiva, porque no deja de ser una cantidad.
E: Bueno, muy bien. Ahora otro de temperatura.

Ítem: Si la temperatura a la 1 de la mañana era de 5 grados bajo 0 y descendió 3 grados en las siguientes 3 horas, ¿qué temperatura había a las 4 de la madrugada?

E: Bueno, muy bien. Ahora otro de temperatura.
R: La temperatura a la una de la mañana es de 5 grados bajo 0, 3 horas, ¿Qué temperatura había a la una de la mañana? Tres grados en las siguientes 3 horas, menos 4. A ver, es menos 1, a la una; 2 3 4 en las siguientes 3 horas, menos 3, a las 4 había menos 4. Si ¿no? [escribió: $-1\ \ -3\ =\ -4$
$1\ \underbrace{2\ \ 3\ \ 4}$].

> Confunde un dato del problema. Piensa que la temperatura a la una de l mañana es de 1° bajo 0

E: Voy a leerlo, si la temperatura a la 1 de la mañana era de 5 grados bajo 0, a la 1 de la mañana 5 grados bajo 0. Desciende tres grados en las siguientes 3 horas ¿qué temperatura había a las 4?

> El entrevistador repite la oración para que Roberto note el error.

R: Sería 1 más 3 horas es a las 4. Se saca la operación que es menos 1 menos 3 en las siguientes tres horas. Es menos 4. $-1\ \ -3\ = -4$

E: Este menos 1 $1\ \underbrace{\mathbf{2\ 3\ 4}}$ ¿qué es?

> Persiste el error.

$-1\ \ -3\ = -4$
$1\ \underbrace{2\ 3\ 4}$
R: Es a la 1 de la madrugada y en las siguientes 3 horas 1 2 3 4
E: Pero, a la una de la mañana ¿qué temperatura hay?
R: Menos 1 $-1\ \ -3\ = -4$

E: ¿De dónde sacaste esto $1\ \underbrace{2\ \ 3\ 4}$?

R: De aquí [se refiere al texto del problema] ¡Ay! 5 grados bajo 0 ¡Oh!
$-5\ \ -3 =\ -8$
[corrige] $1\ \underbrace{2\ 3\ \ 4}$

> Acude al texto y advierte finalmente el dato equivocado.

Ítem: Luis tiene 22 años y su papá 40 ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que el papá tenga el doble de años que su hijo?

R: [escribe 18, 36, -4].
E: ¿Cómo le hiciste?
R: Por qué siempre entre el papá y el hijo hay un lapso de tiempo [Dibuja una recta] . Ese va a ser aquí de 18 años. Si el hijo tiene 18, la única manera de que [el papá] tenga el doble es que el hijo tenga 18 años. Y como tiene 22, para llegar a 18, son menos 4 [en la recta que tiene dibujada mueve la mano hacia la izquierda de las marcas indicadas]. Entonces tendrían que transcurrir menos 4 años.

> Recurre espontáneamente al modelo de la recta numérica. La respuesta al problema es: menos 4 años.

E: Si yo te pidiera que resolvieras este problema con la ecuación, con álgebra. ¿Cómo lo harías?
R: 22 más x [escribe 22 + x]… No, no sé.
E: Vamos a tratar. Con álgebra lo primero es lo que no conoces, lo nombramos
R: x [escribe: x]
E: ¿A qué es igual?

> El entrevistador sugiere que plantee el problema mediante una ecuación.

R: Años que tienen que transcurrir [escribe: x = años que tienen que transcurrir].
E: Resulta que tenemos 2 personas, una tiene 22 años y la otra 40.
R: Sí.
E: Nos dicen ¿cuántos años tienen que transcurrir para que el papá tenga el doble de años que su hijo? ¿Cómo podemos expresar eso? Tú me estabas diciendo 22 más x, ¿eso [22 + x] qué quiere decir?
R: Sería 22 mas un determinado número de años, … , no, está mal. Esto daría para que diera 40, no sé. Esto está mal.
E: Bueno pero podemos intentarlo. Yo pongo 22 más x. Con esto yo lo único que puedo decir es que Luis tiene 22 años y va a pasar cierto numero de años.
R: Un cierto número de años. Sí.
E: Más cierto número de años. Ahora también el papá 40 …
R: 40 mas cierto número de años.
E: Ahora tengo que construir una ecuación, tengo que construir una igualdad.
R: Entonces sería … [escribe: 40 + x = 22 + x]
E: Pero, nos dicen: ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que el papá tenga el doble de años que su hijo? ¿Cómo podríamos poner que el papá va a tener el doble de la edad de Luis?
R: Entonces sería 40 más x es igual a 22 más x por 2 [escribe; 40 + x = 22 + x x 2]…
E: Muy bien. Todo eso [40 + x = 22 + x x 2] …
R: Por 2.
E: Para que todo eso [40 + x = 22 + x x 2] esté multiplicado por 2 se escribe así: 40 + x = (22 + x) x 2.
R: Sí.
E: Entonces ahora tienes que resolver esta ecuación.
R: 40 … 44 más x [escribe: 40 = 44 + x]. Escribe [44 – 40 = x]. ¡No! Es al revés, 40 menos 44 es igual a x [escribe: 40 – 44 = x, –4 = x]. Es igual a menos 4.
E: ¿Viste que salio lo mismo?
R: Sí.

Roberto muestra dificultad para expresar la variación en relación a la edad del padre.

El entrevistador induce la variación en la edad del padre.

Error en la sintaxis algebraica.

Comete un error al restar el menor del mayor que corrige enseguida. El entrevistador considera innecesaria una interpretación adicional a la respuesta x = –4.

Ítem: Una persona tiene una cierta cantidad de dinero y recibe $ 100. Si en total reúne $ 50, ¿Qué cantidad tenía inicialmente?

E: A ver otro problema.
R: Resuelve el problema. Una persona tiene una cierta cantidad de dinero si en total reúne ¿Qué? ¿Cuánta cantidad tenía inicialmente? Ah, pues menos 50 [escribe: –50]
E: ¿Cómo lo resolverías con una ecuación?
R: Sería x + 100 es igual a 50 [escribe: x + 100 = 50].
E: Y si un compañero te pregunta cómo está eso de que la cantidad que tenía inicialmente era menos 50?
R: Pues debía 50.

Respuesta inmediata: –50

Se sugiere plantear una ecuación.

Interpretación correcta de la solución: "debía 50"

Ítem: Un vendedor ha comprado 15 piezas de ropa de 2 clases y paga 160 monedas. Si una de las clases cuesta 11 monedas la pieza y la otra 13 monedas la pieza ¿cuántas piezas compró de cada precio?

E: Un último problema. Este es un vendedor.
R: Ha comprado 15 piezas de ropa de 2 clases y pagó 360 monedas, una de las clases cuesta 11 monedas la pieza y la otra 13 monedas, ¿Cuántas piezas compró de cada precio?
15 piezas … a ver, sería … 15 piezas de ropa es igual a 160 monedas [escribe: 15 = 160]. Entonces sería 160 … no, 11 por x, más 13 por x igual a 160 piezas [escribe: (11 x *x*) + (13 x *x*) = 160, y ahora …

> Uso espontáneo del álgebra. Utiliza la misma incógnita para nombrar cosas distintas. Plantea solamente una ecuación.

E: ¿Te acuerdas Roberto que era muy buena idea saber qué es x?
R: x es igual al número de piezas [escribe: x = número de piezas].
E: Número de piezas. Fíjate te voy a leer el problema en voz alta. El vendedor compra 15 piezas en total, nada mas que las piezas son de dos clases, pon tú, unas son de lana y otras son de algodón.
R: Sí.
E: Y paga 160 monedas. Una de las clases, por ejemplo, las de algodón, cuestan 11 monedas la pieza y la otra clase cuesta 13 monedas la pieza; entonces tú me estás indicando por x el número de piezas de una clase, ¿de cuál clase? Por que hay de dos.
R: [Silencio]
E: Pregunta ¿Cuántas piezas compró de cada precio? O sea, ¿Cuántas piezas compró de algodón y cuántas de lana? Entonces por x me estás diciendo el número de piezas ¿De qué clase?¿De la de 11 monedas?
R: De la de 11 [escribe: x = número de piezas de la de 11 y *y* es igual [escribe: y = número de piezas de la de 13]
E: Exactamente
R: [Modifica la ecuación] (11 x *x*) + (13 x *y*) = 160.

> Introduce una segunda incógnita *y*.

E: Entonces tú tienes una ecuación con dos cosas (11 x *x*) + (13 x *y*) = 160 que no conoces. Necesitas otra ecuación para poder resolver el problema.
R: Esta sería [tacha: 15 = 160].
E: ¿Cuál es la otra ecuación?
R: Quince piezas de 2 clases … ¡ah! …, a x número de piezas de 11 más *y* número de piezas de 13, entonces sustituimos[escribe: 15 = x + y].

> El entrevistador induce el planteo de una segunda ecuación.

> Roberto escribe esta segunda ecuación fácilmente.

E: Muy bien, ya tenemos 2 ecuaciones.
R: Falta resolverlo nada más.
E: ¿Te acuerdas como habías hecho antes?
R: Sí. [escribe: (11 x *x*) + (13 x 15 – *x*) = 160.
E: En lugar de y, estas poniendo 15 menos *x*.
R: Menos *x*.

> Utiliza el método de sustitución para la resolución de ecuaciones.

E: 15 menos *x*. Nada más te voy a corregir la escritura. [escribe: (11 x *x*) + 13 x (15 - *x*) = 160, para que sepa que el 13 tiene que multiplicar todo esto (11 x *x*) + 13 x (15 – *x*) = 160.
R: Sí pero también hay otro paréntesis acá (11 x *x*) + 13 x (15 – *x*) = 160. para sumar.
E: Si quieres ese paréntesis se escribe de otra forma [escribe: (11 x *x*) + [13 x (15 – *x*)] = 160. Ahora sí te voy a prestar mi calculadora.
R: Sí, ahora sí [Usa la calculadora y escribe]:

> Advierte el uso del paréntesis como símbolo de agrupación y sugiere otro paréntesis correcto pero innecesario.

$$(11 \times x) + (195 - 13x) = 160$$
$$11x + (195 - 13x) = 160$$
$$-2x + 195 = 160$$
$$-2x = 160 - 195$$
$$x = 17.5$$

E: Ya tenemos la *x*, la voy a encerrar [la encuadra: $\boxed{x = 17.5}$].

R: Totalmente imposible.
E: ¿Y ahora como encuentro la *y*?
R: No se puede.
R: A ver, vamos de todas maneras…
R: Sería … 15 menos 17.5 [escribe: y = 15 – 17.5 = –2.5] saldría a menos 2.5.
E: Volvemos a nuestro problema. La *x* es el número de piezas de 11 monedas y la y el número de piezas de 13 monedas.
R: Entonces sería 11 por 17.5 es igual a 192.5 más 13 por menos 2.5, vale menos 11. Entonces sería 192.5 …no sale [usó calculadora].
E: 17.5 por 11, ¿cuánto nos salió?
R: 17.5 por 11 es igual a 192.5 [usó calculadora]. Menos 2.5 por 13 es igual a menos 32.5. Ahora voy hacer la resta. [escribe:

$$\begin{array}{r} 192.5 \\ -\ 32.5 \\ \hline 160 \end{array}$$

¡Oh! Si salió

E: Entonces ¿Qué paso?
R: Pues no sé, tal ves le dió …
E: ¿Qué pasa con este vendedor?
R: Éste le dió, éste [y = –2.5] en vez de comprar le dió dos telas y media al que se las llevó a vender.
E: ¡Ah!
R: Y compró 17 telas y media de la otra [x = 17.5]. El comprador empezó con dos telas y media de éstas [y = –2.5] de 13 y el vendedor, o sea el comprador, le dio al vendedor las dos telas y media y el vendedor le vendió 17 telas y media al comprador.

E: Entonces cuando alguien te pregunta ¿Cuántas piezas compró de cada precio? ¿Qué dices tú?
R: Pues compró 17 y media de la calidad 11 y le dió 2 telas y media de la 13.
E: ¿A quien le dió?
R: Al que vendió éstas [x = 17.5] al que le vendió de la calidad 11.

E: O sea no se las compró.
R: No.
E: Nada más le compró éstas [x = 17.5]
R: Sí.
E: Y éstas [y = –2.5]
R: Es como un trueque. O sea, yo te doy estas telas. Valen tanto.
E: Sí.
R: Tu me das este valor en las telas de esto. En total suma 15 telas porque a éste [x = 17.5] le restas dos y media que éste [y = –2.5] le dió. En total se queda con 15 telas con calidad 11.
E: Muy bien

Esta es la primera ocasión en que Roberto advertirá una incongruencia en la solución de un problema.

Roberto insiste en la imposibilidad del problema. El entrevistador lo induce a encontrar otra solución.

Verifica espontáneamente sustituyendo las soluciones en una de las ecuaciones.

Roberto “olvida la incongruencia anterior” y da una interpretación “Congruente” de la solución negativa. Durante la explicación de su interpretación, verifica las condiciones del problema. Desaparece el conflicto.

Revisando el texto de la entrevista anterior, podemos afirmar que efectivamente R manifiesta muy buen desempeño en todos los ítems resueltos. Reconoce el simétrico de un número, el orden en los números negativos, resuelve adiciones, sustracciones, expresiones abiertas, ecuaciones y problemas de enunciado verbal. Recurre al modelo de la recta numérica en forma acertada. Por lo que respecta al problema de Chuquet, utiliza el método algebraico de sustitución espontáneamente. Este método lo hubo aprendido en clase. El entrevistador sólo interviene en la corrección de la sintaxis. R escribe: $11 \bullet x + (13 \bullet 15 - x) = 160$, que es modificada a la expresión correcta: $11 \bullet x + 13 \bullet (15 - x) = 160$. El estudiante sugiere otro paréntesis para separar los sumandos, $11 \bullet x + \left[13 \bullet (15 - x)\right] = 160$. Resuelve el problema con ayuda de la calculadora. Llega al resultado: x = 17.5 y exclama "totalmente imposible". El entrevistador le sugiere encontrar el valor de y. R afirma: "No se puede". El entrevistador le insiste. R llega a y = – 2 . 5. En este momento el entrevistador señala el contexto de las incógnitas, pero es ahora R quien lo ignora y verifica espontáneamente las soluciones sustituyéndolas en ambas ecuaciones. Esta verificación le proporciona una interpretación plausible de las soluciones. El lenguaje algebraico ha salvado la imposibilidad del problema, no necesita recurrir al contexto.

Estudio con profesores de Educación Básica:

¿Cómo interpretan profesores de educación básica la solución negativa?

Una de las actividades principales de la matemática educativa, es la resolución de problemas. Esta afirmación es sustentada por diversas razones, entre ellas, la utilidad de los problemas y su resolución en la enseñanza, incrementan notablemente que el aprendizaje de los contenidos matemáticos sea significativo. Esto no es una tarea fácil, dado que el resolver un problema implica un proceso que, en muchos de los casos resulta complejo y difícil ya que intervienen un gran número de variables. Entre ellas:

- la importancia del conocimiento que se tenga sobre el tema o temas requeridos para dar solución al problema;

- la variedad de estrategias generales y específicas que se pueden desarrollar al momento de resolver un problema concreto;
- la influencia de la historia individual y afectiva del sujeto que resuelve el problema, esto es las actitudes, las emociones y las creencias sobre la resolución de un problema matemático (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994, Puig, 1993; entre otros).

Consideramos que lo anterior, constituyen premisas fundamentales en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas. En este escrito, nos hemos abocado específicamente a un problema que conduce a una solución negativa en el contexto de compra y venta de mercancías, el problema de Chuquet, resuelto por un grupo de profesores.

Presentamos a continuación los resultados de la aplicación de un cuestionario a 80 profesores de preescolar, primaria y secundaria del Estado de Hidalgo, actualmente en servicio en el Sistema Educativo Nacional. Con este primer instrumento metodológico, pretendimos indagar sobre el dominio numérico utilizado por los profesores al resolver expresiones algebraicas, problemas de enunciado verbal. Se encuentra en proceso el análisis de 10 entrevistas individuales videograbadas realizadas a profesores, seleccionados de los 80 en total, que permitirán un análisis a mayor profundidad de la problemática en cuestión. (Hernández, A. y Gallardo A., 2005)
En este reporte sólo se aborda la parte correspondiente al análisis de los datos obtenidos de las respuestas escritas de los profesores en el cuestionario, los ítems más representativos del cuestionario son los siguientes:

I. ESCRIBE UN NÚMERO DENTRO DEL RECTÁNGULO PARA QUE SE CUMPLA LA IGUALDAD:

A) $\square - 10 = 12$	D) $25 \times \square - 60 = 8$
B) $\square + 298 = 8$	E) $9 \times \square + 70 = 11$
C) $568 + \square = 212$	F) $- \square - 12 = 47$

II. ENCUENTRA EL VALOR DE x EN LAS SIGUIENTES ECUACIONES, ESCRIBE CADA UNO DE LOS PASOS SEGUIDOS PARA ENCONTRAR LA SOLUCIÓN.

A) $12x - 32 = 52$ B) $6x + 40 = 10$ C) $x + 1568 = 392$

D) $4 = 4x + 20$ E) $2x + 8 = x + 8$ F) $-x/2 = -1/3$

III. RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

a) El triple de un número es -84. ¿Cuál es ese número?
b) Luis tiene 22 años y su papá 40. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que el papá tenga el doble de años que su hijo?
c) La suma de dos números es 28 y su diferencia es 4. ¿Cuáles son estos números?
d) 7 dulces cuestan 12 monedas menos un tanto, mientras que 12 dulces valen 8 monedas menos un tanto. ¿Cuánto vale cada dulce?
e) Encuentra dos enteros que su suma sea 100 y su diferencia sea también 100.
f) La suma de dos números es 10 y también es 10 la suma del doble de uno de los números más el triple del otro. ¿Cuáles son los números?
g) Tere tiene 100 monedas más de lo que tiene Carlos. Además el cuadrado de lo que tiene Tere es 400 monedas más que el cuadrado de lo que tiene Carlos. ¿Cuántas monedas tiene cada uno?
h) Un vendedor ha comprado 15 piezas de ropa de dos clases y paga 160 monedas. Si una de las clases cuesta 11 monedas la pieza y la otra 13 monedas la pieza. ¿Cuántas piezas compró de cada precio?

A continuación, se presenta el análisis del problema de Chuquet, cuyo enunciado repetimos.

Un vendedor ha comprado 15 piezas de ropa de dos clases y paga 160 monedas. Si una de las clases cuesta 11 monedas la pieza y la otra 13 monedas la pieza. ¿Cuántas piezas compró de cada precio?

Las respuestas de los profesores se exhiben nivel a nivel, es decir, se muestra primero el desempeño de los profesores de preescolar, después los de primaria y acto seguido los de secundaria. La información aparece organizada en cuadros con respecto a las categorías de análisis: lenguaje, método, tipo de solución e interpretación de la misma.

PREESCOLAR

Método de una ecuación (Presentado por 10 profesores).

El profesor busca múltiplos de 11 y 13 que sumados dan como resultado 160. (Equivale a resolver la ecuación $11x + 13y = 160$. La existencia de $x + y = 15$ es ignorada). Cuando el profesor no encuentra los múltiplos adecuados que resuelven el problema, esto es, $11 \times 11 + 13 \times 3 = 160$, recurre a una interpretación adicional para explicar sus resultados, como se muestra en el cuadro siguiente:

Lenguaje Aritmético	Método de una sola ecuación	Solución	Interpretación
Tanteo Múltiplos de 11 y 13	11 x 11 = 121 13 x 3 = 39	160	Compró 11 de 11 y 13 de 3, 121 más 39 monedas, son 160 monedas. No se alcanzan a comprar las 15 piezas. Compró 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas.
	11 x 5 = 55 13 x 8 = 104	159	Compró 5 de 11 monedas y 8 de 13 monedas y sobra una, es lo más aproximado. No hay parejas posibles que al sumar de 160 monedas

	11 x 6 = 66 13 x 8 = 104 13 x 4 = 42 11 x 10 = 110 11 x 9 = 99 13 x 5 = 65 11 x 11 = 121 13 x 4 = 42	170 152 164 163	Todos lo valores son aproximados Se compraron 11 piezas de 11 monedas y 4 piezas de 13 monedas, le regatee y me condonó 3 monedas

Método algebraico (presentado por 2 profesores).

Planteamiento espontáneo del sistema de ecuaciones que resuelve el problema. No encuentran la solución.

Lenguaje Algebraico	Método algebraico	Solución	Interpretación
	$x + y = 15$ $11x + 13y = 160$ $\underline{-11x \ -11y = -165}$ $2y = -5$ $y = -\frac{2}{5}$	No hay solución	Es un número que no es positivo, por lo tanto no hay combinación de parejas de clases y que sumados den 15 y sumen $160.00
	$x + y = 15$ $11(x) + 13(y) = 160$ $x + 5 = 15$ $15 = 5 - x$ $x = 15 - 5$ $x = 10$	No hay solución	No se puede resolver.

PRIMARIA

Método de una ecuación (Presentado por 25 profesores).

El profesor busca múltiplos de 11 y 13 que sumados dan como resultado 160. (Equivale a resolver la ecuación 11x + 13y = 160. La existencia de x + y = 15 es ignorada). Cuando el profesor no encuentra los múltiplos adecuados que resuelven el problema, esto es, 11 x 11 + 13 x 3 = 160, recurre a una interpretación adicional para explicar sus resultados.

Lenguaje Aritmético	Método de una sola ecuación	Solución	Interpretación
Tanteo Múltiplos de 11 y 13	11 x 6 = 66 13 x 8 = 104	170	Compró 6 de 11 y 8 de 13 y sobran 3 monedas. (3) No tiene solución exacta si se considera valor unitario. Sólo se compran 14 piezas.
	11 x 11 = 121 13 x 3 = 39	160	Compró 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas. En total son 14 piezas..
	2 x 13 = 26 13 x 11 = 143	169	Compró 2 de 13 y 13 de 11 y sobran 9 monedas.
	11 x 7 = 77 13 x 6 = 78	155	Compró 7 piezas de 11 monedas y 6 piezas de 13 monedas.
	15 x 11 = 165 0 x 13 = 0	165	Compró 15 piezas de 11 monedas y 0 piezas de 13 monedas. a) No da exactamente, lo más cercano que da a la cantidad que pagó o es la cantidad más baja. Compró 14 piezas de 11 monedas y 1 pieza de 13 monedas. b) Para cumplir con la compra de dos diferentes tipos de ropa.
	14 x 11 = 154 1 x 13 = 13	167	Es lo más aproximado Le dan una de regalo por comprar por mayoreo.
	11 x 11 = 121 13 x 3 = 39	160	Se compran 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas. Solo se pueden comprar 14 piezas.

Lenguaje Aritmético	Método de una sola ecuación	Solución	Interpretación
Tanteo Múltiplos de 11 y 13	A B 1 → 11 → 13 2 → 22 → 26 3 → 33 → 39 4 → 44 → 52 … 11 13 14 → 1 → 167 13 → 2 → 169 12 → 3 → 171 …	173	No hay respuesta, el resultado que más se acerca es 173 con 11 piezas de 11 monedas más 4 piezas de 13 monedas. No hay combinación que dé las 160 monedas Me falta una pieza si el valor de las monedas fuera $1.00

Método algebraico (presentado por 2 profesores).

Planteamiento espontáneo del sistema de ecuaciones que resuelve el problema, sin embargo, en uno de los dos casos no encuentra la solución por hacer la sustitución equivocada, sin embargo, en el otro encuentra las soluciones pero no las considera como respuestas al problema, señalando que no se puede resolver.

Lenguaje Algebraico	Método algebraico	Solución	Interpretación
	x + y = 15 11x + 13y = 160 x = 15 – y 11(15–y)+13y= 160 165–11y +13y=160 2y =160 –16 5 2y = – 5 $y = -\frac{2}{5}$ y = – 2.5 x – 2.5 = 15 x = 15 +2.5 x = 17.5	No hay Solución	No se puede resolver.

	x+(– 2.5) = 15 x = 15 – 2.5 x = 12.5 x + y = 15 11x + 13y = 160 y = 15 – x 11x+13(15–x)= 160 11x+195–13x=160 195 –2x=160 –2x= –35 X = –35/ –2 x = 17.5	 x=17.5 y= – 2.5	 Resultado 11 prendas de 11 monedas y 3 prendas de 13 monedas, 121 + 39 = 160

SECUNDARIA

Método de una ecuación (Presentado por 9 profesores).

El profesor busca múltiplos de 11 y 13 que sumados dan como resultado 160. (Equivale a resolver la ecuación 11x + 13y = 160. La existencia de x + y = 15 es ignorada). Cuando el profesor no encuentra los múltiplos adecuados que resuelven el problema, esto es 11 x 11 + 13 x 3 = 160, recurre a una interpretación adicional par explicar sus resultados.

Lenguaje Aritmético	Método de una sola ecuación	Solución	Interpretación
Tanteo Múltiplos de 11 y 13	11 x 6 = 66 13 x 7 = 91 11 x 6 = 66 13 x 8 = 94 11 x 11 = 121 13 x 3 = 39	157 160 160	Compró 6 de 11 y 7 de 13 y sobran 3 monedas. (s) Compró 6 piezas de 11 monedas y 8 piezas de 13 monedas. (p) Compró 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas. * a) es lo más aproximado b) ¿No le darían una prenda de pilón? c) Le dan una de regalo por comprar por mayoreo. d) Me falta una pieza si el valor de las monedas es de $ 1

	11 x 9 = 99 13 x 4 = 52	151	Se compran 9 piezas de 11 monedas y 4 piezas de 13 monedas y me sobran 9 pesos. *
	11 x 14 = 154 13 x 1 = 13	167	Se compran 14 piezas de 11 monedas y 1 de 13 monedas. El valor más cercano a 160 es 154 +13 = 167*
	11 x 13 = 143 13 x 2 = 26	169	Se compran 13 piezas de 11 monedas y 2 de 13 monedas, pero el resultado no es exacto. (p)
	11 x 7 = 77 13 x 6 = 98	175	Se compran 7 piezas de 11 monedas y 6 de 13 monedas y sobran 5. *
	11 x 6 = 66 13 x 8 = 104	170	Se compran 6 piezas de 11 monedas y 8 de 13 monedas. (p)
	11 x 5 = 55 13 x 8 = 104	159	Se compran 5 piezas de 11 monedas y 8 de 13 monedas. *

b) Método aditivo (presentado por 10 profesores)

El profesor resuelve el problema (x + y = 15; 11x + 13y = 160). Respetando el número de piezas que reporta el enunciado considerando los precios de 11 y 13 monedas.

Interpretaciones:

Lenguaje Aritmético	Método aditivo	Solución	Interpretación
Tanteo	A B 1 – 11 1 – 13 2 – 22 2 – 26 . . . . . . x = 5 , y = 10 55 + 130 = 185 X = 6 , y = 9 66 + 117= 183 x = 7, y = 8 77 + 104= 181 x = 10, y = 5 110 + 65= 175 x = 12, y = 3	171 169 167 185 183 181 175	• Puede comprar de tres maneras: 12 de once monedas y 3 de 13 monedas (171); 13 de 11 monedas y 2 de 13 monedas (169) y 14 de 11 monedas y 1 de 13 monedas (167) esos son los más cercanos. • Con las combinaciones de ambas prendas, se demuestra que no existe ninguna combinación posible para adquirir el número específico de prendas de cada clase con el número de monedas

	134 + 39 = 173 x = 14, y = 1 154 + 13 0 167 A B 1 – 11 1 – 13 2 – 22 2 – 26	173 167 143 26	señaladas. • Para cualquiera, ya sea que cueste 11 o 13 monedas, tendría que pagar 10 pesos, por unas 1 peso más y por otras 3 pesos más. 10 x 15 son 150, solo me restan 10 monedas y no pueden repartirse, si agrego 1 peso costarían 11 pesos, solo podría agregar a 10 playeras y las otras valdrían 10. • Si se considera que se compran 14 de 11 monedas y 1 de 13 monedas, el resultado en monedas es de 167, por lo tanto quedo a debe7. • Se compran 2 de 13 monedas y 13 de 11 monedas, aunque me sobran monedas son las 15 piezas, no hay solución exacta. • Se compran 11 de 11 monedas y 4 de 13 monedas, le regatie y me condonó dos monedas. • 14 piezas de 11 y 1 pieza de 13 monedas, en total da 167 monedas, con esta cantidad se cumple la compra de dos diferentes tipos de ropa.

c) Método de reparto (presentado por 2 profesores)

Lenguaje Aritmético	Método de reparto	Solución	Interpretación
Reparto	P N. de P. 11 1 22 2 . . . . . . 13 1 26 2 . . . . 132 + 42 = 174 x + y = 15 11x + 13y = 160 160 + 15 = 175 15 + 2x = 160 2x = 175 175/2 = 72.5 72.5/ 13 = 6 72.5 / 11= 7	12 y 4	• El planteamiento es correcto, solo que no sé si sea correcto comprar fracciones de ropa, lo más aproximado es que se compran 12 prendas de 11 monedas y 4 prendas de 13 monedas, aunque sobran monedas. • Se compran 6 piezas de 13 monedas y 7 piezas de 11 monedas, las piezas que faltan ya no se pueden comprar. • Dado que uno de los resultados es negativo, no hay parejas de clases de prendas que sumadas den 15 y sumen 160 al mismo tiempo. • El resultado es fraccionario, por lo tanto las prendas que se compran son 18 y 3 respectivamente.

d) Método algebraico (presentado por 28 profesores).

Planteamiento espontáneo del sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

Lenguaje Algebraico	Método algebraico	Solución	Interpretación
Método de una sola ecuación	$x + y = 15$ $11x + 13y = 160$ $11x + 11y = 165$ $\underline{11x + 13y = 160}$ $-2y = 5$ $y = -5/2$	$y = -5/2$ $x = 35/2$ $y = -2.5$ $x = 17.5$	• Este problema no tiene solución real, en virtud de que no existen cantidades negativas ni fraccionarias en prendas. Siempre y cuando todas las monedas en cuestión sean del mismo valor, hay posibilidades de solución. • Por este método no sale. Si divido en partes iguales las monedas podría comprar 7 piezas de 11 monedas y 6 piezas de 13 moneda • El resultado no es lógico, ya que no debe salir ningún negativo, ni fraccionario. • De las posibles combinaciones se observa que compraría 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas, pero no son 15 piezas en total son 14. Entonces el problema no tiene solución con números naturales. Tiene números negativos y no existen cantidades negativas en la compra de ropa. • Parece un sistema con una solución negativa, por lo tanto no resuelve el problema de compra.

Sistema de ecuaciones (sustitución)	x + y = 15 11x + 13y = 160 x = 15 – y 11(15 – y) + 13y = 160 165 – 11y + 13y = 160 2y = 5 y = –5/2	y =– 5/2 x = 17.5	• No tiene solución real debido al resultado negativo • 11 monedas = 17.5 piezas; 13 monedas = – 2.5 monedas, pero no es posible, por deducción son 11 piezas de 11 monedas y 3 piezas de 13 monedas. • 2.5 de 11 monedas y 17.5 de 13 monedas.
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (suma y resta)	x + y = 15 11x + 13y = 160 –11x – 11y = –165 11x + 13y = 160 – 2y = 5 y = – 5/2	y = –2.5 x = 17.5	• Aunque matemáticamente, considero que es correcto el procedimiento, el resultado es incongruente con la realidad del problema.

	y = – 2. 5 x + (– 5/2) = 15 x = 15 + 5/2 x = 30/2 + 5/2 x = 35/2 x = 17. 5	y =– 2.5 x = 17.5	• Este problema no tiene solución por esos datos (reales), matemáticamente si tiene solución. • El problema representa un sistema de ecuaciones, pero no puede comprar ni las 15 piezas del valor más bajo, porque serían 11(15) = 165 y le faltarían monedas, por lo tanto sólo puede comprar 14 piezas: 11 de 11 monedas y 3 de 13 monedas. • Lo que más se aproxima es 15 de 11 monedas. • La respuesta negativa no puede ser posible.

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (igualación)	$x + y = 15$ $11x + 13y = 160$ $x = 15 - y$ $11x = 160 - 13y$ $x = \frac{160 - 13y}{11}$ $\frac{15 - y}{1} = \frac{160 - 13y}{11}$ $11(15 - y) = 160 - 13y$ $165 - 11y = 160 - 13y$ $-11y+13y = 160 - 165$ $2y = -5$ $y = -5/2$ $y =- 2.5$ $x + (-2.5) = 15$ $x = 15 + 2.5$ $x = 17.5$		• No tiene solución, pero por deducción: 11 de 11 y 3 de 13 • Podría pensarse que 2.5 y 17.5 son el costo, pero el 2.5 es negativo y no se considera como resultado en este problema • Es incompatible. • Es una ecuación del sistema 2 x 2, pero incompatible.

Del Análisis de los Cuadros anteriores se concluye que en las respuestas dadas por los profesores, se encontraron básicamente dos los lenguajes empleados para dar solución al problema planteado: el aritmético y el algebraico. Dentro del lenguaje aritmético, los profesores hacen uso de diversos métodos, que lamentablemente, en ningún caso, les permite llegar a la respuesta correcta.

A continuación se exhibe un sólo cuadro que representa un concentrado de los resultados obtenidos por los profesores de los tres niveles educativos:

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Lenguaje</th><th>Método o estrategia</th><th>Solución</th><th>Número de profesores</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Preescolar</td><td>Aritmético</td><td>Método de una sola ecuación</td><td>Positiva e imposible</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Algebraico</td><td rowspan="2">Método algebraico</td><td>Positiva, no hay solución</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Negativa, no hay solución</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Primaria</td><td>Aritmético</td><td>Método de una sola ecuación</td><td>Positiva e imposible</td><td>25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Algebraico</td><td rowspan="2">Método algebraico
(No pueden interpretar la solución)</td><td>Positiva</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Negativa</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Secundaria</td><td rowspan="3">Aritmético</td><td>Método de una sola ecuación</td><td>Positiva e imposible</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Método aditivo</td><td>Positiva e imposible</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Método de reparto</td><td>Positiva e imposible</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Algebraico</td><td>Método algebraico, con una sola ecuación</td><td>Negativa, no aceptan la solución</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Método algebraico, sistema de ecuaciones (sustitución)</td><td>Positiva</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>Negativa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Método algebraico, sistema de ecuaciones (igualación)</td><td>Positiva</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Negativa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Método algebraico, sistema de ecuaciones (suma y resta)</td><td>Positiva</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>Negativa</td></tr>
</table>

En seguida se describen brevemente los métodos utilizados por los profesores:

a) Método de una ecuación: Este se presentó en 44 profesores de los tres niveles de educación básica. En este caso, los profesores buscaron los múltiplos de 11 y 13 que sumados dieran como resultado 160. Cuando los profesores hacían coincidir los múltiplos de 11 y 13 con el 160, es decir 11 x 11 + 13 x 3 = 160, recurrían a una interpretación personal para dar solución al problema, por lo que las respuestas son diferentes. En algunos casos hay excedentes y en otros faltantes. No se tuvo en cuenta que el problema estaba formado por dos ecuaciones. Los profesores sólo consideraron la ecuación $11x + 13y = 160$. La ecuación $x + y= 15$ fue totalmente es ignorada.

b) Método aditivo: Este se presentó en 10 profesores. En este caso, respetaron el número de piezas que plantea el problema considerando los precios de 11 y 13 monedas respectivamente. Sin embargo llegaron a plantear que el sistema no tiene solución y hasta consideraron la posibilidad de poder adquirirlas por 3 precios diferentes.

c) Método de reparto: Este se presentó en 2 sujetos. En este caso los profesores intentaron repartir las 160 monedas entre las dos variables, con ello el problema se vuelve imposible de resolver, ya que hacen diferentes repartos, llegando a considerar que el planteamiento es el correcto pero la solución es imposible encontrarla.

d) Método algebraico: Este se presenta en 24 casos. En un primer momento se da el planteamiento espontáneo de una sola ecuación, de tal forma que al resolverla y aparecer la solución negativa, resulta imposible el problema. En la mayoría de los casos se plantea y se resuelve el sistema de ecuaciones, sin embargo, muchos de los profesores no pueden interpretar el hecho de que haya una solución positiva y otra negativa. Es de llamar la atención que aún estando bien los resultados del sistema, las interpretaciones son diversas y equivocadas. En otros casos, las cambian a manera de que su respuesta parezca la correcta. Se puede inferir que no hay un conocimiento pleno de las soluciones negativas en los problemas verbales. Será necesario seguir analizando esta en otros problemas y con otras poblaciones de docentes y estudiantes para ampliar esta investigación.

Reflexiones finales

Lo que hemos realizado hasta el momento abre una vía para dar algunas respuestas a las preguntas planteadas en el trabajo, quizá no sean contestadas en su totalidad pero si de manera parcial. Del análisis de los resultados obtenidos se concluye que la resolución de problemas permite la creación de métodos específicos de acuerdo al problema. La elección del método apropiado conlleva a la aceptación de la solución negativa que es interpretada en el contexto del problema. Ante este tipo de soluciones, los profesores recurren a la construcción de fuentes de significado que les permitan dar interpretaciones plausibles de la solución obtenida.

Un problema que puede parecer imposible por métodos aritméticos, se considera posible por álgebra, una vez que la solución negativa es validada al ser sustituida en la ecuación. Tanto por lo que respecta a los problemas, como por lo que respecta a los métodos de resolución, no puede pensarse en establecer una separación nítida entre lo que es aritmético y lo que es algebraico, es más se puede afirmar que los profesores se encuentran en el tránsito de la aritmética al álgebra, o, quizá mejor dicho, en un lugar en que aritmética y álgebra se solapan: la primera en su extremo superior y la segunda ocupando el terreno del que ésta se retira.

Aceptar los números negativos, implica romper la visión tradicional de los números como nociones que expresan el resultado de la medida de una cantidad de magnitud absoluta. Concluimos afirmando que los dos casos histórico presentados al principio de este escrito, permiten comprender por una parte, el largo camino recorrido por la comunidad matemática a fin de arribar a la aceptación de los negativos, y por otra, que una vez situados en el lenguaje algebraico sea simbólico o no, es posible admitir a los negativos. Esto último queda reflejado en el Estudio de Caso presentado aquí, donde R puede salir airoso gracias al método algebraico.

Referencias

Gallardo, A. (2002). *"The extension of the natural number domain to the integers in the transition from artihmetic to algebra".* Educational Estudies in Mathematics. 49: 171-192, 2002. Kluwer Academic publishers. Printed in the Netherlands.

Gallardo, A. (1994). *El Estatus de los Números Negativos en la Resolución de Ecuaciones Algebraicas.* Tesis de Doctorado. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I P N, México.

Glaeser, G. (1981). *Epistemologie des nombres relatifs.* Recherches en Didàctique des Mathèmatiques, Vol. 2, No. 3, pp. 303 – 346.

Hernández A. y Gallardo A (2005). La negatividad y el cero en problemas algebraicos. Un estudio con profesores de educación básica, (Investigación en curso).

Lester, F. K. (1994). *Musings about mathematical problem solving research: 1970-1994*. Journal for research in mathematics education, 25(6), pp. 660-675.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario Colectivo y Creación Matemática.* Ed. Gedisa, Universidad Autónoma de Madrid.

Paradís, J. (1989). *Los Orígenes del Álgebra: De los Árabes al Renacimiento.* Promociones y Publicaciones Universitarias S. A. Barcelona.

Puig, L. (1993). El *estilo heurístico de resolución de problemas*, en Salar, A., Alayo, F., Kindt, M. y Puig, L. *Aspectos didácticos en matemáticas,* 4, pp. 93-122. Zaragoza: ICE.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*, en Grows, D. Handbook for research on mathematics teaching and learning, pp. 334-370*.* Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Schubring, G. (1988). *Discussions èpistèmologiques sur le statut des nombres nègatifs et leur representation dans les manuels allemands et francais de mathèmatique entre 1795 et 1845.* Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathèmatiques et de l'informatique. Editions La Pensée Sauvage.

Sesiano, J. (1985). *The appearance of negative solution in medieval mathematic.* Archive for History of Exact Sciences, Vol. 32, No. 2 pp. 105 – 150.