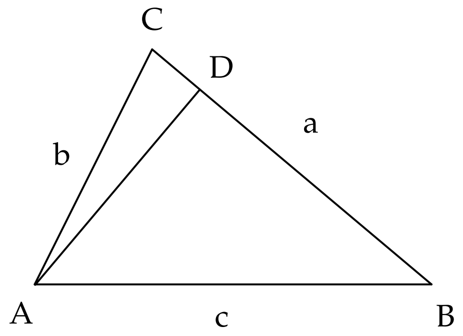
Ley del Coseno

Dado un triángulo ABC, con lados a, b y c, se cumple la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(Observe que la relación es simétrica para los otros lados del triángulo.)

Para demostrar este teorema, dibujemos nuestro triángulo *ABC*, y tracemos la altura *AD* hacia el lado *BC*.



Es fácil observar que el triángulo *ABD* es rectángulo en *D*. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\begin{aligned}
c^2 &= AD^2 + BD^2 \\
c^2 &= AD^2 + (a - CD)^2 \\
c^2 &= a^2 + (AD^2 + CD^2) - 2aCD \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \left(\text{Note que } \cos C = \frac{CD}{b}. \right)
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento a los otros lados del triángulo obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B
\end{aligned}$$

No hay que olvidar la importancia de este teorema, pues nos puede servir en algún momento para hallar las longitudes de ciertos lados de triángulos o en ocasiones conocer la medida del ángulo que forma dos rectas.

Vemos cómo funciona, con unos cuántos ejemplos:

Ejemplo 1.

Dos lados de un triángulo miden 6 y 10, y el ángulo que forman es de 120°. Determine la longitud del tercer lado.

Solución.

Supongamos que a = 6, b = 10, $\angle C = 120°$, y el tercer lado es c. Entonces por la Ley de Cosenos tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos 120°$$
$$c^2 = 36 + 100 - 2(6)(10)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$c^2 = 196$$

Por lo tanto c = 14.

Ejemplo 2.

Un triángulo ABC tiene lados AB = $\sqrt{3}$, BC = 1 y AC = 2. Determine las medidas de sus ángulos.

Solución.

En este caso, tenemos que c = $\sqrt{3}$, a = 1 y b = 2. Entonces aplicando la ley de Cosenos obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos C$$
$$\Rightarrow \cos C = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\angle C = 60°$.

Por otra parte tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$(1)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(2)\left(\sqrt{3}\right)\cos A$$
$$\Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto $\angle A = 30°$.

Así, calculamos el tercer ángulo: $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 30° - 60° = 90°$.

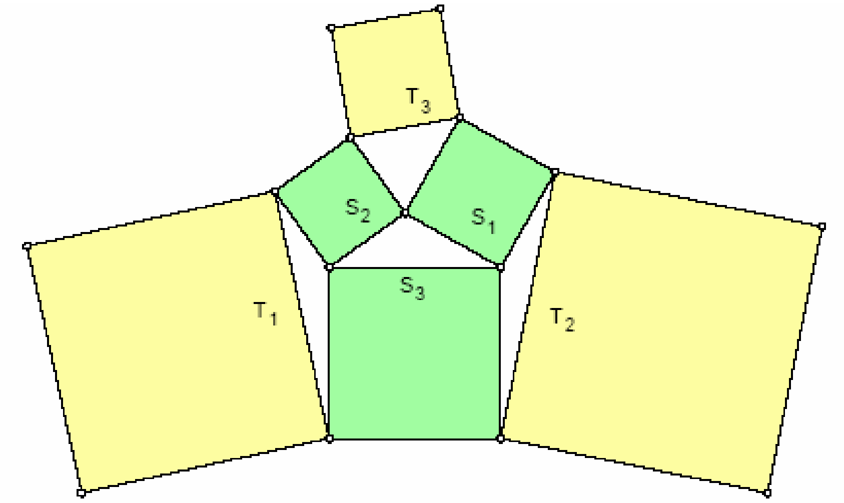
Luego, el triángulo tiene ángulos de 30°, 60° y 90°.

Ejercicios

1. Muestra que en un triángulo de lados 4, 5, 6 uno de los ángulos es el doble del otro.

2. Si en un triángulo *ABC* se cumple $\angle C = 2\angle B$, demuestre que $c^2 = (a+b)b$.

3. La siguiente figura está formada por seis cuadrados de áreas $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$. Demuestre que $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$.



4. *ABC* es un triángulo tal que a = 12, $b + c$ = 18 y *cos A* = $\cos A = \frac{7}{38}$. Demuestre que $a^3 = b^3 + c^3$.

Ley del Paralelogramo

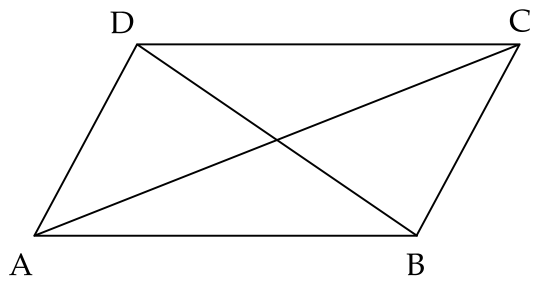
En un paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

En otras palabras, lo que tenemos es lo siguiente: Dado un paralelogramo *ABCD*, se cumple la relación:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Lo cual podemos escribirla en la forma $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

Vamos a demostrarlo de la forma fácil, usando Ley de Cosenos.



Fijémonos en los triángulos ABC y ABD que contienen precisamente las diagonales AC y BD. Aplicando la ley de Cosenos en el triángulo ABC obtenemos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos ABC \quad (1)$$

Ahora, aplicando la ley de Cosenos al triángulo ABD obtenemos:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos BAD \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) miembro a miembro obtenemos:
(Usando que $BC = AD$ y $\cos ABC = -\cos BAD$ por ser ángulos suplementarios.)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos ABC$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos BAD$$
$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + BC^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos ABC - 2(AB)(BC)(-\cos ABC)$$
$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$
$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

Con esto completamos la demostración de la Ley del Paralelogramo.

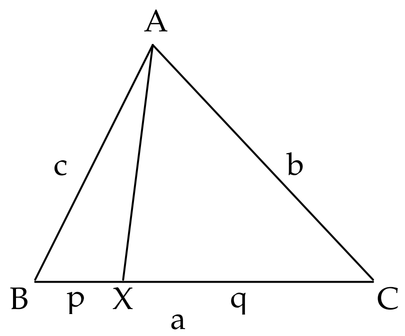
Teorema de Stewart

Si X es un punto sobre el lado BC (o su prolongación) de un triángulo ABC, tal que $\frac{BX}{XC} = \frac{m}{n}$*, entonces:*

$$AX^2 = \frac{b^2 m + c^2 n}{m+n} - \frac{a^2 mn}{(m+n)^2}.$$

Demostración.

Considere un triángulo ABC y el punto X sobre el lado BC, tal que $\frac{BX}{XC} = \frac{m}{n}$, como muestra la figura.



Sea $BX = p$ y $CX = q$. Entonces podemos establecer $p = km$ y $q = kn$. Además, notemos que los ángulos AXB y AXC son suplementarios, es decir: $\cos AXB = -\cos AXC$.

En el triangulo ABX, obtenemos:

$$\begin{aligned} c^2 &= AX^2 + p^2 - 2AXp\cos AXB \\ c^2 &= AX^2 + k^2m^2 - 2AXkm\cos AXB \end{aligned} \quad (1)$$

En el triángulo AXC, tenemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= AX^2 + q^2 - 2AXq\cos AXC \\ b^2 &= AX^2 + k^2n^2 + 2AXkn\cos AXB \end{aligned} \quad (2)$$

Despejando $\cos AXB$ de (1) y (2) obtenemos:

$$\cos AXB = \frac{k^2m^2 + AX^2 - c^2}{2AXkm} = \frac{b^2 - k^2n^2 - AX^2}{2AXkn}$$

$$\Rightarrow k^2m^2n + AX^2n - c^2n = b^2m - k^2n^2m - AX^2m$$

$$\Rightarrow AX^2(m+n) = b^2m + c^2n - k^2mn(m+n)$$

$$\Rightarrow AX^2 = \frac{b^2m + c^2n}{m+n} - k^2mn \quad \left(pero \;\; p + q = k(m+n) = a \Rightarrow k^2 = \frac{a^2}{(m+n)^2} \right)$$

$$\Rightarrow AX^2 = \frac{b^2m + c^2n}{m+n} - \frac{a^2mn}{(m+n)^2}$$

Este teorema puede ser muy útil a la hora de determinar longitudes desde un vértice a un punto que divide al lado opuesto en una razón dada.

Ejercicios

1. Calcula la longitud de la mediana de un triángulo en función de sus lados.

2. Calcula la longitud de la bisectriz de un triángulo en función de sus lados.

3. Calcula la longitud de la altura de un triángulo en función de sus lados.

4. Considera un triángulo, tal que dos de sus lados miden a y b, y el ángulo que forman es de $120°$. Calcula la longitud de la bisectriz de ese ángulo en función de a y b.