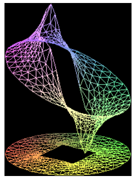
ALGEBRA y ALGEBRA LINEAL

520142

Primer Semestre



CAPITULO 6.
POLINOMIOS DE UNA VARIABLE.

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Polinomios

Definición: Polinomio

Sea $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y sean $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Se llama **función polinomial** o **polinomio** con coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ a la función $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ que a cada $x \in \mathbb{K}$ le asigna el valor:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

Polinomios

Observaciones y notaciones:

- El grado de un polinomio es el mayor valor n tal que $a_n \neq 0$. Se escribe gr(p)=n.
- Si $n = 0$ y $a_0 \neq 0$, entonces $p(x) = a_0$ se llama polinomio constante y tiene grado cero. El caso $p(x) = 0 \in \mathbb{K}$ se define como el polinomio nulo, y se denota por θ. Se conviene que el polinomio nulo no tiene grado.
- $\forall x \in \mathbb{K} : \ \theta(x) = 0 \wedge 1(x) = 1.$
- a_n se llama coeficiente principal de p y a_0 el término libre o independiente de x. Si $a_n = 1$, entonces el polinomio p se llama polinomio mónico.
- Se denota por $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Polinomios

Igualdad de Polinomios:

$$\text{Si } p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{y} \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,$$

entonces

$$p = q \Longleftrightarrow gr(p) = gr(q) \ \text{ y } \ a_i = b_i, \quad \forall i = 0, ..., n.$$

Proposición:

Si dos polinomios p y q de grado n coinciden en $n+1$ puntos distintos,

entonces $p = q$.

Polinomios

Definición : adición y multiplicación de polinomios.

Sean $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ dos polinomios cualesquiera en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. El conjunto de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ resulta ser un anillo conmutativo con unidad al definir las siguientes operaciones:

- **Adición**

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{r} (a_i + b_i) x^i,$$

donde $r \leq$máx$\{m, n\}$, es decir, gr($p+q$)$\leq$ gr(p) o gr($p+q$)$\leq$ gr(q).

- **Multiplicación**

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} d_i x^i,$$

donde $d_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j, \quad i = 0, 1, ..., m+n.$

Propiedades de la adición y el producto en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

$\forall p, q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ se tiene:

S1).	$(p+q)+r = p+(q+r)$.	S2).	$p+q = q+p$.
S3).	$\exists\, \theta \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+\theta = p$	S4).	$\exists -p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p+(-p) = \theta$
M1).	$(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$	M2).	$p\cdot q = q\cdot p$
M3).	Existe $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p\cdot 1 = p$	D).	$p\cdot(q+r) = p\cdot q + p\cdot r$
N).	$p\cdot q = \theta \Longrightarrow p = \theta$ o $q = \theta$		

Polinomios

Observación:

- La **división de polinomios** tiene mucha semejanza con el de los números enteros.
  Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, entonces $\dfrac{p}{q}$ se llama **función racional** de x y en general no es un polinomio.

Polinomios

Teorema.

Si $p, d \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, $gr(p) \geq gr(d)$ y $d \neq \theta$, entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ llamados respectivamente **cuociente y resto**, tales que:

$$p = qd + r, \qquad \text{donde} \quad r = \theta \quad \veebar \quad gr(r) < gr(d).$$

Observaciones:

- En el teorema se tiene que si p es el dividendo y d es el divisor, entonces
$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}.$$
- Si $r = \theta$, entonces decimos que d **divide a** p, d es un factor de p o p es divisible por d.

Polinomios

Ejemplo

- Si $p(x) = 6x + 4x^3 + 5x^4 - x^2$ y $d(x) = x^2 + 1$, entonces $q(x) = 5x^2 + 4x - 6$ y $r(x) = 2x + 6$.

Regla de Ruffini.

Si dividimos el polinomio p por $(x - c)$, obtenemos un cuociente

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0$$

y un resto constante $r(x) = r_0$, con $r_0 = p(c)$.

Corolario.

$p(x)$ es divisible por $(x - c)$, si y sólo si $r_0 = 0$, en tal caso

$$p(x) = (x - c)q(x).$$

Teorema del resto.

El resto de dividir $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ por $(x - c)$ es $p(c)$.

Demostración.

Si $p(x) = q(x)(x - c) + r_0$, entonces $p(c) = r_0$.

Teorema del factor.

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$:

$$p(c) = 0 \Longrightarrow \exists\, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}) : p(x) = q(x)(x - c).$$

Polinomios

Definición. Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $c \in \mathbb{K}$, se dice que c es una **raíz o cero** de p si $p(c) = 0$. Es decir:

$$p(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n = 0.$$

Observaciones.

- El valor $x = c$ corresponde a la intersección de la gráfica de p con el eje X.
- Para calcular $p(c)$ resulta eficaz el algoritmo de Horner:

$$p(c) = a_0 + c(a_1 + c(a_2 + \cdots + c(a_{n-1} + ca_n) \cdots))$$

que exige sólo $2n$ operaciones elementales frente a las $\dfrac{n(n+3)}{2}$ operaciones efectuadas con la sustitución directa.

Definición. Polinomios reducibles e irreducibles.

Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ y $gr(p) \geq 2$ se dice que p es **reducible** en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ si es divisible en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, es decir, cuando existen dos polinomios $q, d \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, con $gr(q) \geq 1, gr(d) \geq 1$, tales que $p = q\, d$. En caso contrario se dice que p es **irreducible o primo** en $\mathcal{P}(K)$.

- Por ejemplo, $p(x) = x^2 + 1$ es reducible en $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ y es irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
- Los polinomios de grado 1, $p(x) = a_0 + a_1 x$, son irreducibles o primos en $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Polinomios

Observaciones.

- Sea $k \in \mathbb{N}$ el mayor entero tal que $(x-c)^k$ divide a $p(x)$. Es decir existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tal que

$$p(x) = q(x)(x-c)^k, \quad x \in \mathbb{K}.$$

  En tal caso decimos que c es una raíz de multiplicidad k. Si $k=1$ se dice que c es una **raíz** simple.

- Si $gr(p) = n$, entonces la adición de la multiplicidad de los ceros de $p(x)$ es menor o igual que n.

Teorema Fundamental del Algebra.

Todo polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ admite una descomposición en factores primos, es decir,

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

con $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ raíces de p.

Polinomios

Observaciones.

- Si un polinomio $p(x)$ de grado n con coeficientes complejos es igual a cero para más de n valores de x distintos, entonces el polinomio es idénticamente nulo.
- Equivalentemente decimos que $p(x)$ tiene a lo más n raíces distintas.
- O bien, decimos que los únicos factores irreducibles de p son polinomios de grado 1.

Polinomios

Teorema.

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ con coeficientes complejos reales, $gr(p) \geq 2$ y $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$). Si $p(z) = 0$, entonces $p(\overline{z}) = 0$ y existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que

$$p(x) = [(x-a)^2 + b^2]q(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Observación.

- $(x-z)(x-\overline{z}) = (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.

Polinomios

- $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$, luego del teorema concluimos:

  a) $(x-z)(x-\overline{z})$ son factores irreducibles de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

  b) $(x-a)^2 + b^2$ es un factor irreducible, de segundo grado, de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corolario.

Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ con coeficientes complejos reales, $gr(p) \geq 2$. Si $z = a + bi$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) es una raíz de multiplicidad k, $1 < k \leq gr(p)$, de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, entonces $[(x-a)^2 + b^2]^k$ es un factor irreducible de grado $2k$ de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Polinomios

Teorema.

Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ con coeficientes complejos reales, $gr(p) = n$, entonces

$$p(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{n_1} \cdots [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{n_s},$$

donde:

- $p(a_i) = 0$, $x = a_i \in \mathbb{R}$ cero de multiplicidad $m_i, i = 1, ..., r$.
- $p(\alpha_k + i\beta_k) = 0$, $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$) cero de multiplicidad $n_k, k = 1, ..., s$.
- $m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2n_1 + 2n_2 + \cdots 2n_s = n$.

Polinomios

Criterios de localización de raíces.

- Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene grado impar, entonces p tiene al menos una raíz.
- Si $a + \sqrt{b}$ es raíz de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con coeficientes racionales, $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b}$ es irracional, entonces $a - \sqrt{b}$ tambien es raíz de p.

Regla de Descartes.

El número de raíces reales positivas (negativas) de un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, con coeficientes complejos reales es menor o igual que el número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$ (de $p(-x)$) o difiere de él en un número par.

Por ejemplo, $p(x) = x^4 - x^3 - 2x - 1$ tiene una raíz real positiva, una negativa y dos complejas conjugadas.

Polinomios

Observaciones.

- Las raíces racionales de un polinomio p con coeficientes racionales son las mismas que las raíces del polinomio $q = M \cdot p$, con M el mínimo común multiplo de los denominadores de los coeficientes de p.
- Por ejemplo, las raíces de $p(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + 1$ y de $q(x) = 30p(x) = 90x^4 - 15x^3 + 20x^2 - 18x + 30$ son las mismas.

Teorema. Raíces racionales .

Si $\dfrac{p}{q}$ es una raíz de $h(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y con $p, q \in \mathbb{Z}$, primos relativos, $q \neq 0$, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Polinomios

Corolario.

Si p es un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces sus posibles raíces racionales son los enteros divisores de su término libre.

Localización de raíces de un polinomio con coeficientes complejos reales .

Si $c \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces:

$$\frac{|a_0|}{\alpha + |a_0|} \leq |c| \leq \frac{\beta + |a_n|}{|a_n|},$$

donde:

$\alpha =$máx$\{|a_n|, ..., |a_1|\}, \quad \beta =$máx$\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$.

Ejemplo, si $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, entonces $\frac{1}{2} \leq |c| \leq 4$.

Polinomios

Ejemplo

Descomponer en factores irreducibles en $P(\mathbb{R})$ y en $P(\mathbb{C})$, $p(x) = x^6 - 1$.

Solución

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 1 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Como $x^2 + x + 1$ y $x^2 - x + 1$ tienen raices complejas. Así

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

esta descompuesto en factores irreducibles en $P(\mathbb{R})$ y

$$p(x) = (x-1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)(x+1)\left(x - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$$

esta descompuesto en factores irreducibles en $P(\mathbb{C})$.

Polinomios

Ejemplo

Encuentre todas las raíces de

$$p(x) = x^6 - \frac{3}{2}\,x^5 - \frac{45}{4}\,x^4 + \frac{271}{8}\,x^3 - 33\,x^2 + \frac{27}{2}\,x - 2$$

Solución

Para poder encontrar raíces racionales es necesario que el polinomio sea a coeficientes enteros, es decir, busquemos las raíces de

$$q(x) = 8\,x^6 - 12\,x^5 - 90\,x^4 + 271\,x^3 - 264\,x^2 + 108\,x - 16.$$

q tiene 5 cambios de signo, luego tiene una, tres o 5 raíces positivas. Análogamente se tiene que tiene exactamente una raíz negativa.

Las posible raices racionales son $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$.

8	-12	-90	271	-264	108	-16	-4
	-32	176	-344	292	-112	16	
8	-44	86	-73	28	-4	0	

De aquí -4 es la raíz negativa y como

$$q(x) = (x+4)(8\,x^5 - 44\,x^4 + 86\,x^3 - 73\,x^2 + 28\,x - 4)$$

las posibles raíces racionales son: $\left\{1, 2, 4, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right\}$.

Análogamente se obtiene que las restantes raíces son: 2 con multiplicidad 2 y $\frac{1}{2}$ con multiplicidad 3.

Descomposición de una fracción en adición de Fracciones Parciales.

Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, con $gr(p) < gr(q), q \neq \theta$, entonces la función racional $\dfrac{p}{q}$ puede descomponerse en adicións de fracciones cuyos denominadores son polinomios obtenidos de la factorización de q en polinomios irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, de la siguiente forma:

- I) por cada factor lineal repetido n veces, $(ax+b)^n, \quad n \in \mathbb{N}$, se obtienen los adiciónndos:

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

Polinomios

- II) por cada factor cuadrático irreducible en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, repetido m veces $(ax^2 + bx + c)^m$, se obtienen los adiciónndos:

$$\frac{A_1 x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

Observación.

Si $gr(p) \geq gr(q)$, entonces podemos calcular el cuociente Q y el resto R de la división $\dfrac{p}{q}$, tales que:

$$\frac{p}{q} = Q + \frac{R}{q}, \quad gr(R) < gr(q),$$

y aplicar el procedimiento anterior a $\dfrac{R}{q}$.

Ejemplo 1. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$$

Solución

Los factores del denominador son lineales diferentes

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

De aquí $A = 2$ y $B = 1$, es decir,

$$\frac{3x+6}{(x-2)(x+4)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+4}$$

Ejemplo 2. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2}$$

Solución

El denominador tiene el primer factor lineal no repetido y el segundo lineal repetido

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

De aquí $A = 1$, $B = 5$ y $C = -3$, es decir,

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{3}{(x-3)^2}$$

Ejemplo 3. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)}$$

Solución

El denominador tiene el primer factor del denominador lineal y el segundo, es irreducible en los números reales

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

De aquí $A = 3$, $B = 2$ y $C = -1$, es decir,

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Ejemplo 4. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Solución En este caso en el denominador el factor cuadrático es irreducible en los números reales

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

De aquí $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$ y $D = 1$, es decir,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3} + \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Ejemplo 5. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución Primero es necesario dividir, pues $gr(p) > gr(d)$. Así:

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6} = x - 2 + \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

y

$$\frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 5}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 3}.$$

Luego

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6} = (x - 2) \ + \ \frac{3}{x - 2} \ - \ \frac{2}{x - 3}$$

Ejemplo 6. Descomponga la fracción en adición de fracciones parciales

$$\frac{2x^4 + x^3 + x^2 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Polinomios

Solución

Primero es necesario dividir, pues $gr(p) = gr(d)$. Así:

$$\frac{2x^4 + x^3 + x^2 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1} = 2 + \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

de donde, $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$

Luego $A = 1$, $B = -3$, $C = 3$ y $D = 1$.

Por lo tanto

$$\frac{2x^4 + x^3 + x^2 + 4x}{x^4 + 2x^2 + 1} = 2 + \frac{x - 3}{x^2 + 1} + \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$