LECCIÓN CONDENSADA

12.1 Razones trigonométricas

En esta lección

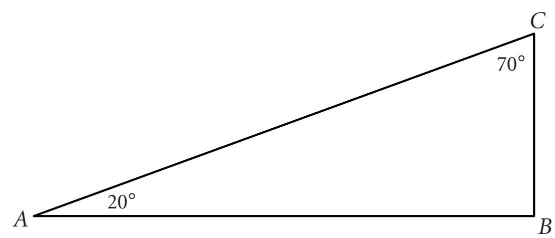
- Conocerás las razones trigonométricas **seno, coseno** y **tangente**
- Usarás las razones trigonométricas para **encontrar las longitudes laterales desconocidas** en triángulos rectángulos
- Usarás las **funciones trigonométricas inversas** para **encontrar las medidas desconocidas de ángulos** en triángulos rectángulos

Lee hasta el Ejemplo A de tu libro. En tu libro se explica que en cualquier triángulo rectángulo con un ángulo agudo de una medida dada, la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud del cateto adyacente al ángulo es igual. La razón se llama la **tangente** del ángulo. En el Ejemplo A se usa el hecho de que $\tan 31° \approx \frac{3}{5}$ para resolver un problema. Lee el ejemplo atentamente.

Además de la tangente, los matemáticos han dado nombre a otras cinco razones relacionadas con las longitudes laterales de los triángulos rectángulos. En este libro, trabajarás con tres razones: el **seno,** el **coseno** y la **tangente,** abreviados sin, cos y tan. Estas razones se definen en las páginas 641–642 de tu libro.

Investigación: Tablas trigonométricas

Mide las longitudes laterales de $\triangle ABC$, redondeando al milímetro más cercano. Después usa las longitudes laterales y las definiciones de seno, coseno y tangente para llenar la fila "Primer $\triangle$" de la tabla. Expresa las razones como decimales, redondeando a la milésima más cercana.



	$m\angle A$	sin *A*	cos *A*	tan *A*	$m\angle C$	sin *C*	cos *C*	tan *C*
Primer $\triangle$	20°				70°			
Segundo $\triangle$	20°				70°			
Promedio	—				—			

Ahora usa tu transportador para dibujar un triángulo rectángulo diferente *ABC*, con $m\angle A = 20°$ y $m\angle C = 70°$. Mide los lados redondeando a la milésima más cercana y llena la fila "Segundo $\triangle$" de la tabla.

Calcula el promedio de cada razón y anota los resultados en la última fila de la tabla. Busca patrones en tu tabla. Debes encontrar que $\sin 20° = \cos 70°$ y $\sin 70° = \cos 20°$. También observa que $\tan 20° = \frac{1}{\tan 70°}$ y $\tan 70° = \frac{1}{\tan 20°}$. Usa las definiciones de seno, coseno y tangente para explicar por qué existen estas relaciones.

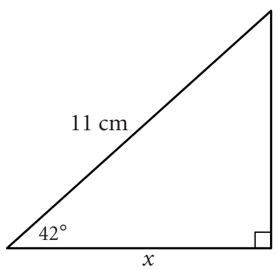
Puedes usar tu calculadora para encontrar el seno, coseno o tangente de cualquier ángulo. Experimenta con tu calculadora hasta que lo logres. Después usa tu calculadora para encontrar sin 20°, cos 20°, tan 20°, sin 70°, cos 70° y tan 70°. Compara los resultados con las razones que encontraste midiendo los lados.

(continúa)

Lección 12.1 • Razones trigonométricas (continuación)

Puedes usar las razones trigonométricas para encontrar longitudes laterales desconocidas de un triángulo rectángulo, dadas las medidas de cualquier lado y cualquier ángulo agudo. Lee el Ejemplo B de tu libro y después lee el Ejemplo A a continuación.

EJEMPLO A Encuentra el valor de x.



Solución Necesitas encontrar la longitud del cateto adyacente al ángulo de 42°. Se te da la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que relaciona el cateto adyacente con la hipotenusa es la razón coseno.

$$\cos 42° = \frac{x}{11}$$

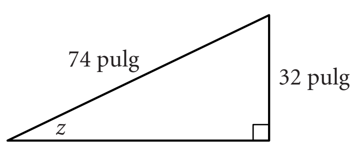
$$11 \cdot \cos 42° = x \qquad \text{Multiplica ambos lados por 11.}$$

$$8.17 \approx x \qquad \text{Usa tu calculadora para encontrar } \cos 42° \text{ y multiplica el resultado por 11.}$$

El valor de x es aproximadamente 8.2 cm.

Si conoces las longitudes de cualesquier dos lados de un triángulo rectángulo, puedes usar las *funciones trigonométricas inversas* para encontrar las medidas de los ángulos. En el Ejemplo C de tu libro se muestra cómo usar la función tangente inversa, o $\tan^{-1}$. En el ejemplo siguiente se usa la función seno inverso, o $\sin^{-1}$.

EJEMPLO B Encuentra la medida del ángulo opuesto al cateto de 32 pulgadas.



Solución Se te dan las longitudes del cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. La razón que relaciona estas longitudes es la razón seno.

$$\sin z = \frac{32}{74}$$

$$\sin^{-1}(\sin z) = \sin^{-1}\left(\frac{32}{74}\right) \qquad \text{Saca el seno inverso de ambos lados.}$$

$$z = \sin^{-1}\left(\frac{32}{74}\right) \qquad \text{La función inversa del seno revierte la función del seno.}$$

$$z \approx 25.6° \qquad \text{Usa tu calculadora para encontrar } \sin^{-1}\left(\tfrac{32}{74}\right).$$

La medida del ángulo opuesto al lado de 32 pulgadas es aproximadamente 26°.

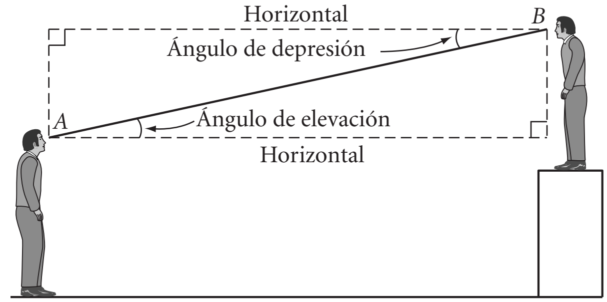
LECCIÓN CONDENSADA

12.2 Resolución de problemas con triángulos rectángulos

En esta lección

- Usarás la trigonometría para **resolver problemas que incluyen triángulos rectángulos**

La trigonometría de los triángulos rectangulos se utiliza frecuentemente para encontrar la altura de un objeto alto de manera indirecta. Para resolver un problema de este tipo, mide el ángulo desde la horizontal hasta tu recta de visión, cuando veas la parte superior o inferior del objeto.

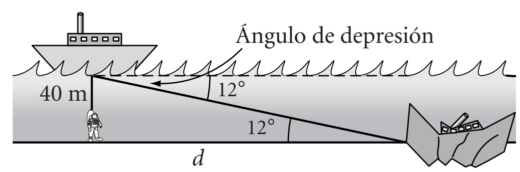


Si miras hacia arriba, medirás el **ángulo de elevación.** Si miras hacia abajo, medirás el **ángulo de depresión.**

En el ejemplo de tu libro se usa el ángulo de elevación para encontrar una distancia de manera indirecta. Lee el ejemplo atentamente. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución. Después trata de resolver los problemas de los ejemplos siguientes. El Ejemplo A es el Ejercicio 13 en tu libro y tiene que ver con un ángulo de depresión.

EJEMPLO A El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?

▶ ***Solución*** Haz un dibujo para ilustrar la situación. Observa que como el fondo del mar es paralelo a la superficie del agua, el ángulo de elevación desde los restos del naufragio hasta el barco es igual al ángulo de depresión desde el barco hasta los restos del naufragio (según la conjetura AIA).



La distancia que el buzo es bajado (40 m) es la longitud del cateto opuesto al ángulo de 12°. La distancia que el buzo necesita avanzar es la longitud del cateto adyacente al ángulo de 12°. Establece la razón tangente.

$$\tan 12° = \frac{40}{d}$$

$$d\tan 12° = 40$$

$$d = \frac{40}{\tan 12°}$$

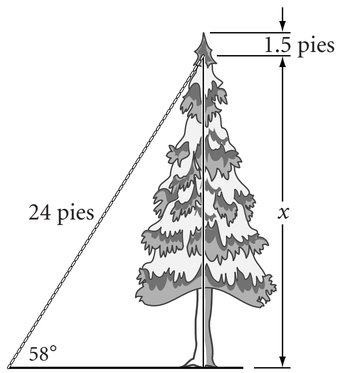
$$d \approx 188.19$$

El buzo necesita avanzar aproximadamente 188 metros para llegar a los restos del naufragio.

(continúa)

EJEMPLO B Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de 58° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

▶ ***Solución*** Haz un dibujo para ilustrar la situación.



La longitud de la hipotenusa está dada, y la distancia desconocida es la longitud del lado opuesto al ángulo de 58°. Establece la razón seno.

$$\sin 58° = \frac{x}{24}$$

$$24 \cdot \sin 58° = x$$

$$20.4 \approx x$$

La distancia desde el suelo hasta el punto donde el alambre se sujeta al árbol es aproximadamente 20.4 pies. Como el alambre se sujeta a 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol, la altura es aproximadamente 20.4 + 1.5, ó 21.9 pies.

LECCIÓN
CONDENSADA
12.3

La Ley de los senos

En esta lección

- Encontrarás el **área de un triángulo** cuando conoces las longitudes de dos lados y la medida del ángulo incluido
- Derivarás la **Ley de los senos,** que relaciona las longitudes laterales de un triángulo con los senos de las medidas de los ángulos
- **Usarás la Ley de los senos para encontrar una longitud lateral desconocida** de un triángulo cuando conoces las medidas de dos ángulos y un lado, **o para encontrar una medida desconocida de un ángulo *agudo*,** cuando conoces las medidas de dos lados y un ángulo

Has usado la trigonometría para resolver problemas que tienen que ver con los triángulos rectángulos. En las siguientes dos lecciones verás que puedes usar la trigonometría con *cualquier* triángulo.

En el Ejemplo A de tu libro, se dan las longitudes de dos lados de un triángulo y la medida del ángulo incluido, y se muestra cómo encontrar el área. Lee el ejemplo atentamente. En la siguiente investigación generalizarás el método usado en el ejemplo.

Investigación 1: Área de un triángulo

En el Paso 1 se dan tres triángulos con las longitudes de dos lados y la medida del ángulo incluido rotulada. Usa el Ejemplo A como guía para encontrar el área de cada triángulo. He aquí una solución de la parte b.

b. Primero encuentra h.

$$\sin 72° = \frac{h}{21}$$

$$21 \cdot \sin 72° = h$$

Ahora encuentra el área.

$$A = 0.5bh$$

$$A = 0.5(38.5)(21 \cdot \sin 72°)$$

$$A \approx 384.46$$

El área es aproximadamente 384 cm^2.

Después usa el triángulo que se muestra en el Paso 2 para derivar una fórmula general. La conjetura siguiente resume los resultados.

Conjetura SAS del área de un triángulo El área de un triángulo está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}ab \sin C$, donde a y b son las longitudes de dos lados y C es el ángulo entre ellos. **C-100**

(continúa)

Puedes usar lo que has aprendido para derivar la propiedad que se llama la Ley de los senos.

Investigación 2: La Ley de los senos

Completa los Pasos 1–3 de tu libro. A continuación se muestran los resultados que debes encontrar.

Paso 1 $\sin B = \frac{h}{a}$, de manera que $h = a \sin B$

Paso 2 $\sin A = \frac{h}{b}$, de manera que $h = b \sin A$

Paso 3 Como ambos $b \sin A$ y $a \sin B$ son iguales a h, puedes igualarlos.

$$b \sin A = a \sin B$$

$$\frac{b \sin A}{ab} = \frac{a \sin B}{ab} \qquad \text{Divide ambos lados entre } ab.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \qquad \text{Simplifica.}$$

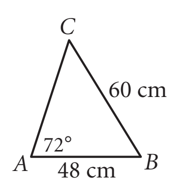
Ahora completa los Pasos 4–6. Combina los Pasos 3 y 6 para obtener esta conjetura.

Ley de los senos Dado un triángulo con ángulos A, B y C y lados de longitudes a, b y c (a opuesto a A, b opuesto a B y c opuesto a C), $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$. **C-101**

El Ejemplo B de tu libro muestra cómo usar la Ley de los senos para encontrar las longitudes laterales de un triángulo cuando conoces la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

Lee el texto anterior al Ejemplo C, donde se explica que puedes usar la Ley de los senos para encontrar la medida de un ángulo faltante *solamente si* sabes si el ángulo es agudo u obtuso. Sólo se te pedirá que encuentres medidas de ángulos agudos. En el Ejemplo C se muestra cómo hacer esto. He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO Encuentra la medida del ángulo agudo C.



▶ ***Solución*** Usa la Ley de los senos.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{48 \sin 72°}{60}$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{48 \sin 72°}{60}\right)$$

$$C \approx 49.54$$

La medida de $\angle C$ es aproximadamente 50°.

LECCIÓN CONDENSADA

12.4 La Ley de los cosenos

En esta lección

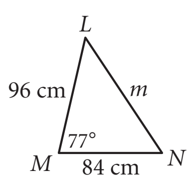
- Usarás la **Ley de los cosenos** para encontrar las longitudes laterales y las medidas de los ángulos en un triángulo

Has resuelto muchos problemas usando el Teorema de Pitágoras. El Teorema de Pitágoras es una herramienta muy poderosa para resolver problemas, pero está limitada a los triángulos rectángulos. Hay una relación más general que se aplica a todos los triángulos.

Piensa en un ángulo recto formado por una bisagra con dos catetos de longitud fija como lados. ¿Qué le ocurre a la longitud del tercer lado (la hipotenusa cuando el ángulo mide 90º) y a la relación pitagórica a medida que la bisagra se cierra hasta ser menor que un ángulo rectángulo o se abre más que un ángulo rectángulo? Para explorar esta pregunta, observa los triángulos en la parte superior de la página 661 y lee los siguientes párrafos, incluyendo la Ley de los cosenos. Agrega la Ley de los cosenos a tu lista de conjeturas.

La Ley de los cosenos funciona para los triángulos agudos y obtusos. Lee la derivación de la Ley de los cosenos para los triángulos agudos en la página 662 de tu libro. En el Ejemplo A, la Ley de los cosenos se usa para hallar la longitud del tercer lado de un triángulo cuando se te dan las longitudes de dos lados y la medida de su ángulo incluido. Lee el Ejemplo A de tu libro. Luego completa los pasos del Ejemplo A siguiente.

EJEMPLO A Encuentra m, la longitud del lado $\overline{NL}$ en el $\triangle LMN$ acutángulo.



▶ ***Solución*** Usa la Ley de los cosenos y resuelve para m.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ La Ley de los cosenos.

$m^2 = 96^2 + 84^2 - 2(96)(84)(\cos 77°)$ Sustituye c por m, a por 96, b por 84 y C por 77°.

$m = \sqrt{96^2 + 84^2 - 2(96)(84)(\cos 77°)}$ Saca la raíz cuadrada positiva de ambos lados.

$m \approx 112.45$ Halla el valor numérico.

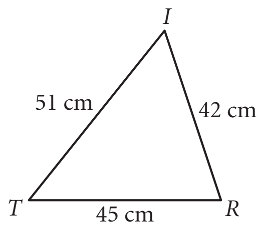
La longitud del lado $\overline{NL}$ es aproximadamente 112 cm.

(continúa)

Lección 12.4 • La Ley de los cosenos (continuación)

En el Ejemplo B de tu libro se usa la Ley de los cosenos para encontrar una medida de ángulo. He aquí otro ejemplo. Resuelve el problema por tu cuenta antes de leer la solución.

EJEMPLO B Encuentra la medida de $\angle I$ en $\triangle TRI$.



Solución Usa la Ley de los cosenos y resuelve para I.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$	La Ley de los cosenos.
$45^2 = 51^2 + 42^2 - 2(51)(42)(\cos I)$	Sustituye c por 45, a por 51, b por 42 y C por I.
$\cos I = \dfrac{45^2 - 51^2 - 42^2}{-2(51)(42)}$	Resuelve para $\cos I$.
$I = \cos^{-1}\left(\dfrac{45^2 - 51^2 - 42^2}{-2(51)(42)}\right)$	Saca el coseno inverso de ambos lados.
$I \approx 56.89$	Halla el valor numérico.

La medida de $\angle I$ es aproximadamente 57°.

LECCIÓN CONDENSADA

12.5 Resolución de problemas con trigonometría

En esta lección

- Usarás la trigonometría para resolver problemas, incluso aquellos que tienen que ver con los **vectores**

Algunas de las aplicaciones prácticas de la trigonometría tienen que ver con los vectores. En actividades vectoriales previas, usaste una regla y un transportador para medir el tamaño del vector resultante y el ángulo entre los vectores. Ahora podrás calcular los vectores resultantes usando la Ley de los senos y la Ley de los cosenos.

En el ejemplo de tu libro, se usa la Ley de los cosenos para encontrar la longitud de un vector resultante y la Ley de los senos para encontrar su dirección. Lee el ejemplo y asegúrate de que comprendes cada paso.

El ejemplo siguiente es el Ejercicio 5 de tu libro. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

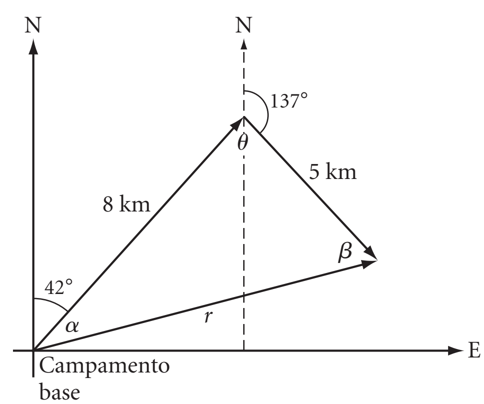
EJEMPLO Annie y Sashi están acampando en la Sierra Nevada. Caminan 8 km desde su campamento base, con un rumbo de 42°. Después del almuerzo, cambian de dirección con un rumbo de 137° y caminan otros 5 km.

a. ¿A qué distancia están Annie y Sashi de su campamento base?

b. ¿Con qué rumbo deben caminar Sashi y Annie para regresar a su campamento base?

▶ ***Solución***

a. Dibuja un diagrama para ilustrar la situación. (Recuerda que un rumbo se mide en el sentido de las manecillas del reloj, desde el norte.) Aquí la distancia desde el campamento base es r. Para encontrar r, puedes encontrar el valor de θ y luego usar la Ley de los cosenos.



Considera θ como formada por dos partes, la parte a la izquierda de la vertical y la parte a la derecha. Usando la conjetura AIA, la parte a la izquierda tiene una medida de 42°. Como la parte a la derecha y el ángulo de 137° son un par lineal, la parte a la derecha tiene una medida de 43°. Por lo tanto, la medida de θ es 42° + 43°, u 85°. Ahora usa la Ley de los cosenos.

$$r^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)(\cos 85°)$$

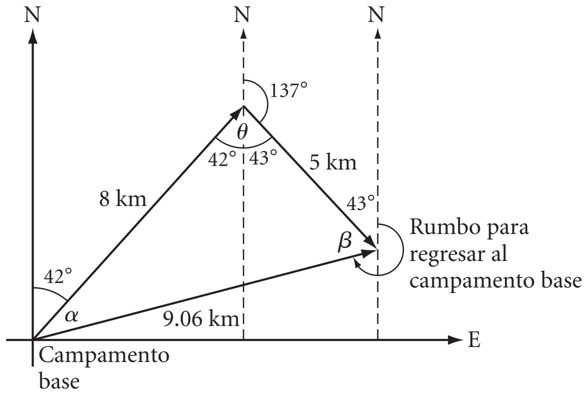
$$r = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2(8)(5)(\cos 85°)}$$

$$r \approx 9.06$$

Sashi y Annie están aproximadamente a 9.1 km de su campamento base.

(continúa)

b. Añade al diagrama la información que encontraste en la parte a.



El diagrama indica que el rumbo que Sashi y Annie deben tomar para regresar al campamento base es $360° - (43° + \beta)$. Para encontrar β, usa la Ley de los senos.

$$\frac{\sin\beta}{8} \approx \frac{\sin 85°}{9.06}$$

$$\sin\beta \approx \frac{8\sin 85°}{9.06}$$

$$\beta \approx \sin^{-1}\left(\frac{8\sin 85°}{9.06}\right)$$

$$\beta \approx 61.6$$

β es aproximadamente 62°, así que el rumbo es aproximadamente $360° - (43° + 62°)$, ó 255°.