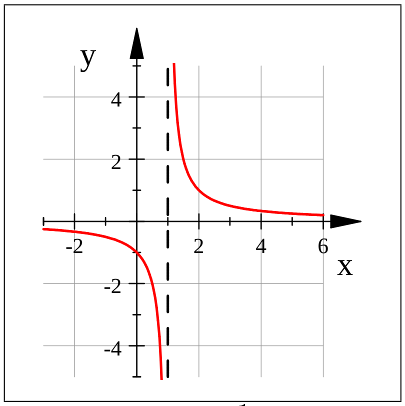
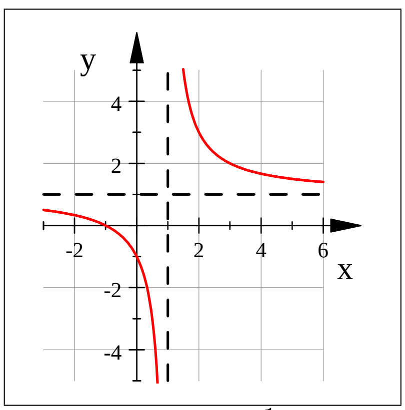
1. Representación gráfica de funciones racionales

Ejercicio 1 *Estudia y representa las siguientes* ***funciones racionales****.*



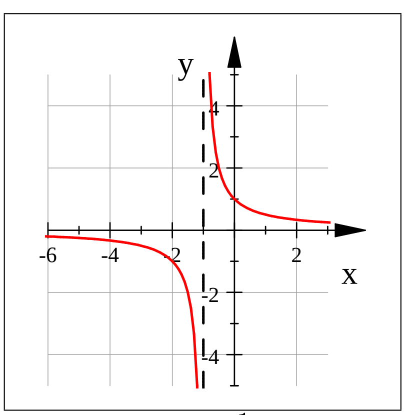
$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- A.V. $x = 1$, A.H. $y = 0$
- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, 1[\end{cases}$



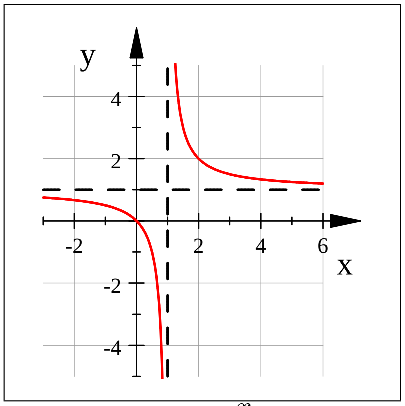
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- A.V. $x = 1$, A.H. $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, 1[\end{cases}$



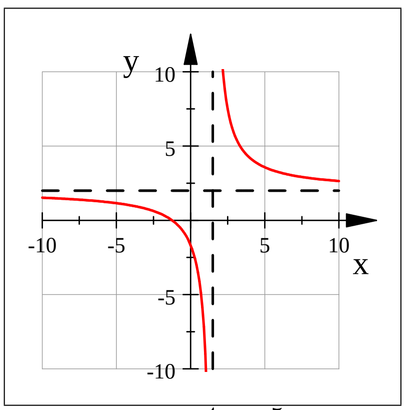
$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- A.V. $x = -1$, A.H. $y = 0$
- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, -1[\end{cases}$



$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

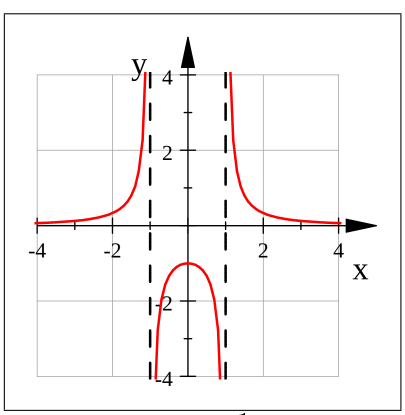
- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- A.V. $x = 1$, $\quad$ A.H. $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, 1[\end{cases}$



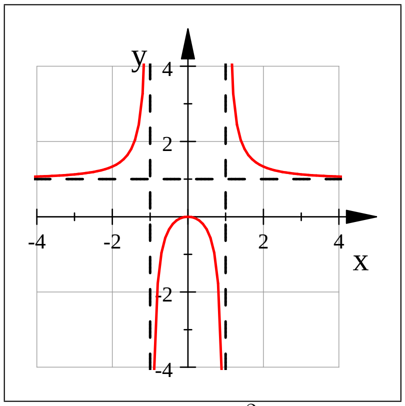
$$f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$, $\quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- A.V. $x = 3/2$, $\quad$ A.H. $y = 2$
- $f'(x) = \dfrac{-22}{(2x-3)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{88}{(2x-3)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]3/2, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, 3/2[\end{cases}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad \operatorname{rec} f =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$
- A.V. $x = 1$, $x = -1$, $\quad$ A.H. $y = 0$
- $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2\left(3x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]-\infty, -1[\cup]-1, 0[= \mathbb{R}^- \setminus \{-1\} \\ \text{Decreciente en }]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$
- Máximo relativo en $(0, -1)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-1, 1[\end{cases}$

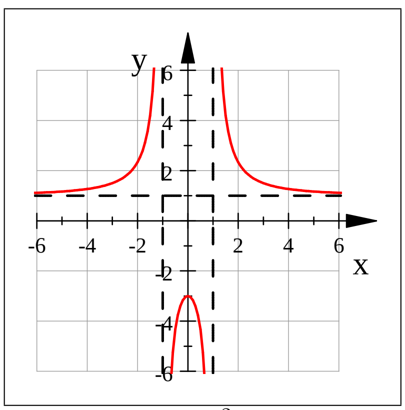


$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$



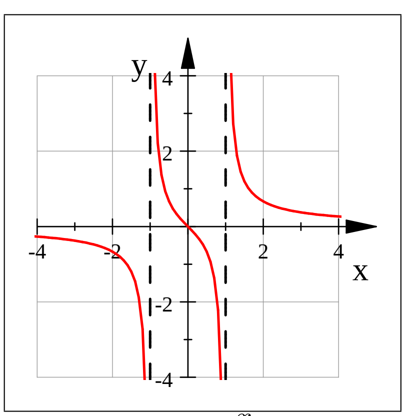
$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad \operatorname{rec} f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$
- A.V. $x = 1$, $x = -1$, $\quad$ A.H. $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2\ \left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]-\infty, -1[\cup]-1, 0[= \mathbb{R}^- \setminus \{-1\} \\ \text{Decreciente en }]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$
- Máximo relativo en $(0, 0)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-1, 1[\end{cases}$



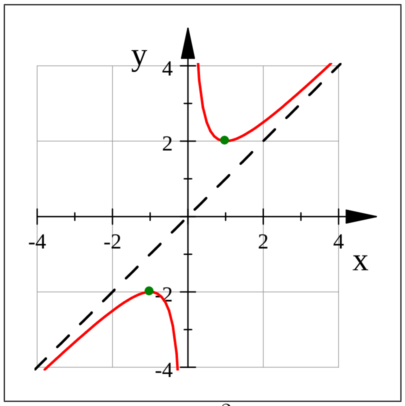
$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad \operatorname{rec} f =]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$
- A.V. $x = 1$, $x = -1$, $\quad$ A.H. $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-8x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{8\ \left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]-\infty, -1[\cup]-1, 0[= \mathbb{R}^- \setminus \{-1\} \\ \text{Decreciente en }]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{cases}$
- Máximo relativo en $(0, -3)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-1, 1[\end{cases}$



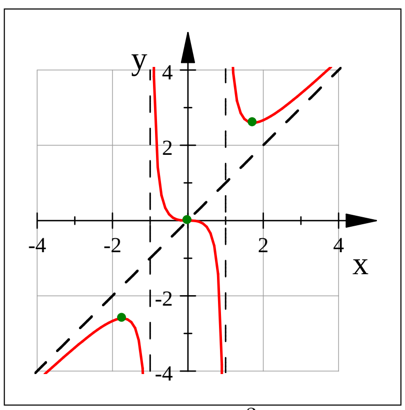
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R}$
- A.V. $x = 1$, $x = -1$, $\quad$ A.H. $y = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 1}{\left(x^2 - 1\right)^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$
- Monotonía: estrictamente decreciente
- No tiene extremos relativos
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-1, 0[\cup]1, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, -1[\cup]0, 1[\end{cases}$
- Punto de inflexión $(0, 0)$



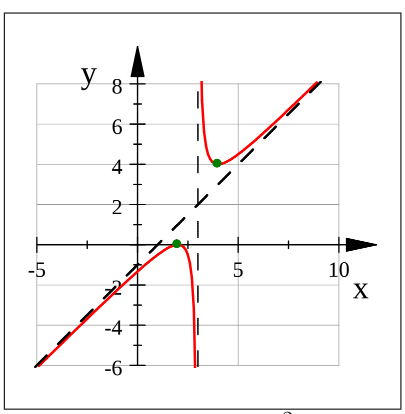
$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{rec} f = \mathbb{R} \setminus]-2,2[$
- A.V. $x = 0$, A.O. $y = x$
- $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\\ \text{Decreciente en }]-1,0[\,\cup\,]0,1[\end{cases}$
- Mínimo relativo $(1,2)$, máximo relativo $(-1,-2)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en } \mathbb{R}^+ =]0,+\infty[\\ \text{Cóncava en } \mathbb{R}^- =]-\infty,0[\end{cases}$



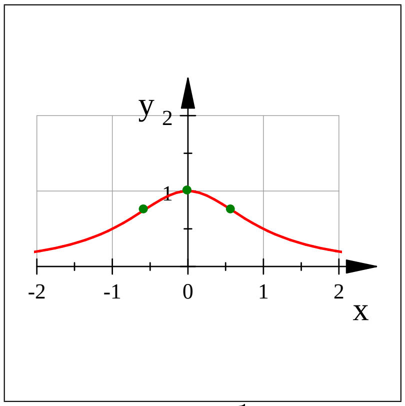
$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\operatorname{rec} f = \mathbb{R}$
- A.V. $x = 1$, $x = -1$, A.O. $y = x$
- $f'(x) = \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en } \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\,\cup\,\left]\sqrt{3},+\infty\right[\\ \text{Decreciente en } \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[\setminus \{-1,1\} \end{cases}$
- Mínimo relativo $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, máximo relativo $\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]-1,0[\,\cup\,\left]\sqrt{3},+\infty\right[\\ \text{Cóncava en } \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\,\cup\,]0,1[\end{cases}$
- Punto de inflexión $(0,0)$



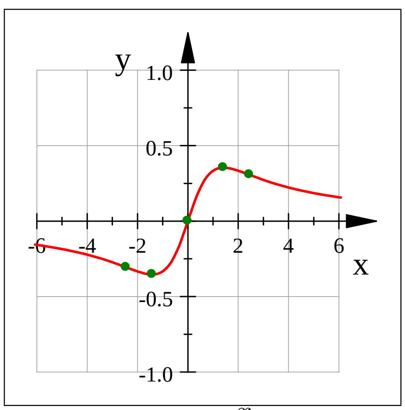
$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-3}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\operatorname{rec} f =]-\infty,0] \cup [4,+\infty[$
- A.V. $x = 3$, A.O. $y = x - 1$
- $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-3)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]-\infty,-2[\,\cup\,]4,+\infty[\\ \text{Decreciente en }]2,3[\,\cup\,]3,4[\end{cases}$
- Mínimo relativo $(4,4)$, máximo relativo $(2,0)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]3,+\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty,3[\end{cases}$



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}, \quad \text{rec } f =]0,1]$
- A.H. $y = 0$
- $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{(x^2+1)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en } \mathbb{R}^- =]-\infty, 0[\\ \text{Decreciente en } \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[\end{cases}$
- Máximo relativo $(0,1)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en }]3, +\infty[\\ \text{Cóncava en }]-\infty, 3[\end{cases}$
- Puntos de inflexión $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$

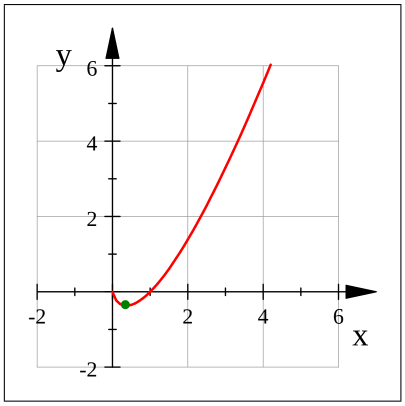


$$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}, \quad \text{rec } f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
- A.H. $y = 0$
- $f'(x) = -\dfrac{x^2-2}{(x^2+2)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-6\right)}{(x^2+2)^3}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en } \mathbb{R}^- = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\\ \text{Decreciente en } \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[\end{cases}$
- Máximo relativo $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, mínimo relativo $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
- Curvatura $\begin{cases} \text{Convexa en } \left]-\sqrt{6}, 0\right[\cup \left]\sqrt{6}, +\infty\right[\\ \text{Cóncava en } \left]-\infty, -\sqrt{6}\right[\cup \left]0, \sqrt{6}\right[\end{cases}$
- Puntos de inflexión $(0,0)$, $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$

2. Representación gráfica de funciones logarítmicas

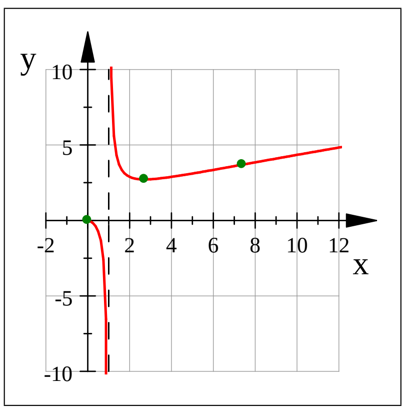
Ejercicio 2 *Estudia y representa las siguientes* ***funciones logarítmicas****.*



$f(x) = x \ln x$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^+, \quad \operatorname{rec} f = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$
- $f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \dfrac{1}{x}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]1/e, +\infty[\\ \text{Decreciente en }]0, 1/e[\end{cases}$
- Mínimo relativo $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$
- Curvatura: siempre convexa (en $]0, +\infty[$)

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^+ \diagdown \{1\}, \quad \operatorname{rec} f = \mathbb{R} \diagdown [0, e[$
- A.V. $x = 1$



$f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, \quad f''(x) = -\dfrac{\ln x - 2}{x \ln^3 x}$
- Monotonía $\begin{cases} \text{Creciente en }]e, +\infty[\\ \text{Decreciente en }]0, 1[\cup]1, e[\end{cases}$
- Mínimo relativo (e, e)
- Curvatura: $\begin{cases} \text{Convexa en }]1, e^2[\\ \text{Cóncava en }]0, 1[\cup]e^2, +\infty[\end{cases}$
- Punto de inflexión $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$