Funciones polinomiales de grados 3 y 4

Ahora vamos a estudiar los casos de funciones polinomiales de grados tres y cuatro.

Vamos a empezar con sus gráficas y después vamos a estudiar algunos resultados teóricos.

Definición 1

Función polinomial de tercer grado

La función polinomial de tercer grado es toda aquella función que se puede escribir de la forma:

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_3 \neq 0$.

La función polinomial de tercer grado también se conoce como función cúbica.

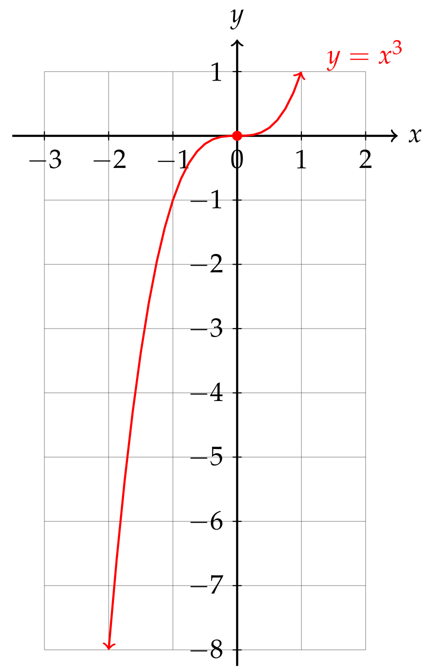
Ejemplo 1

La función polinomial de tercer grado más sencilla es:

$$y = x^3$$

Grafícala, encuentra sus raíces, dominio y contradominio.

- Empezamos calculando sus raíces.
- Para que $y = 0$ se requiere que $x^3 = 0$.
- En palabras esto nos está diciendo que debemos encontrar los números que al multiplicarlos por sí mismo tres veces obtengamos cero.
- El único número que satisface la condición anterior es $x = 0$.
- Esta es la única raíz de la función.
- Para encontrar el dominio recuerda que el dominio de cualquier función polinomial es el conjunto de los números reales. (pag. **??**)
- El contradominio se calcula de la siguiente manera:
  - ✓ Observa que cuando x es positivo, el resultado de elevarlo al cubo es positivo también.
  - ✓ Cuando x es negativo el resultado de elevarlo alcubo es negativo.
- Entonces, el contradominio también es el conjunto de los números reales, porque cuando x crece mucho los resultados de elevarlo al cubo también crece mucho.
- Esto mismo pasa con valores tanto positivos como negativos.
- La gráfica de la función está enseguida:



Observa que la función $f(x) = x^3$ puede factorizarse como $y = x \cdot x \cdot x$.

Para encontrar una raíz de la función debemos contestar a la pregunta: «*¿Qué número multiplicado por sí mismo tres veces es igual a cero?*» Y la respuesta es obvia: «*el número cero multiplicado por sí mismo nos da cero*», $(0)(0)(0) = 0$. Es decir, $x = 0$ es una raíz de la función, porque $f(0) = 0$.

Ejemplo 2

Grafica la siguiente función polinomial:

$$y = x^3 - x$$

Calcula, además, sus raíces y su dominio y contradominio.

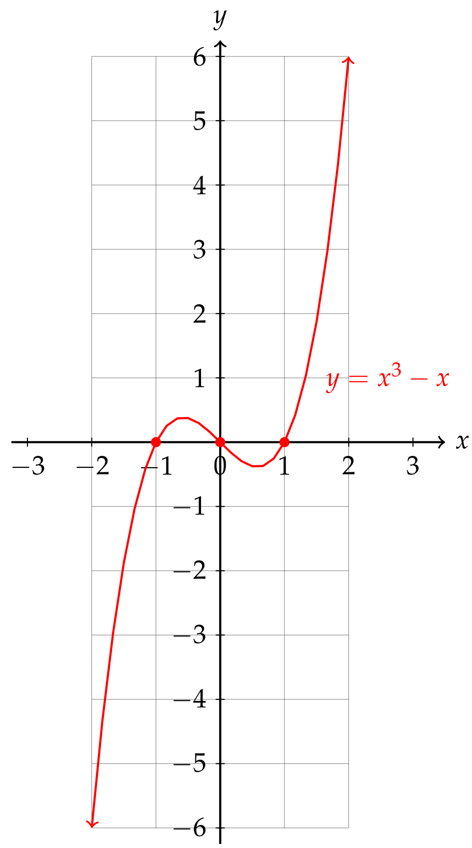
- Empezamos calculando sus raíces.
- Para eso factorizamos la expresión:

$$y = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

- De esta factorización calculamos fácilmente las raíces de la función.
- Para que el producto de los tres factores sea cero se requiere que al menos uno de ellos sea cero.
- Tenemos tres casos: $x = -1$, $x = 0$, y $x = 1$.
- Entonces, la función corta al eje x en $x = -1, x = 0$ y $x = 1$.
- De nuevo,el dominio es el conjunto de los números reales, por cerradura.
- Y el contradominio también, porque cuando los valores de x crecen $f(x)$ crece.
- Esto ocurre para valores positivos como negativos.

Profesor:
Sugiera el repaso de la factorización extra-clase en caso de ser necesario.

- La gráfica de esta función es la siguiente:



Ahora observa que la función evaluada en $x = -1$, o en $x = 0$, o en $x = 1$ hace que $f(x) = 0$, y que la factorización queda:

$$y = x^3 - x = x \cdot (x+1) \cdot (x+1)$$

Es decir, si r es una raíz de la función polinomial $y = f(x)$ de grado n, entonces podemos factorizarla como:

$$y = f(x) = (x - r) \cdot g(x)$$

Donde $g(x)$ es otra función polinomial de grado $n - 1$.

Sea $y = P_n(x)$ una función polinomial de grado n. Si r es una de sus raíces, entonces la función polinomial puede dividirse exactamente entre $x - r$. **Teorema 1**

Si la función se divide exactamente entre $x - r$ entonces se puede factorizar como:

$$y = P_n(x) = (x - r) \cdot Q_{n-1}(x)$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es otro polinomio de grado $n - 1$. Entonces,

$$P_n(r) = (r - r) \cdot Q_n(r) = 0 \cdot Q_n(r) = 0$$

Esto nos indica que r es una raíz de la función. ■

Esta demostración está incompleta. Pero después de entender el procedimiento de la división sintética y que éste es equivalente a la evaluación de un polinomio en un punto, quedará evidente la segunda parte de la demostración.

Definición 2

División sintética
La división sintética entre dos polinomios se realiza utilizando solamente los coeficientes.

El siguiente ejemplo ilustra la división sintética.

Ejemplo 3

Calcula:

$$(x^2 - 5\,x - 10) \div (x - 3) =$$

utilizando la división sintética.

- Para ilustrar la división sintética empezamos calculando la división utilizando el método «*normal*» o de la «*división larga*».
- Colocamos el dividendo y el divisor en "*la casita*":

$$
\begin{array}{r|l}
\cline{2-2}
x - 3 & x^2 - 5\,x - 10
\end{array}
$$

- Ahora buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a x^2. Esa expresión es: x.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \\
\cline{2-2}
x - 3 & x^2 - 5\,x - 10
\end{array}
$$

- Ahora, vamos a multiplicar la expresión que acabamos de encontrar por $x - 3$. Igual que con la división con números, vamos a cambiar el signo al resultado y después sumamos algebraicamente.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \\
\cline{2-2}
x - 3 & \cancel{x^2} - 5\,x - 10 \\
 & -\cancel{x^2} + 3\,x \\
\cline{2-2}
 & \quad -2\,x
\end{array}
$$

- A continuación bajamos el número -10 del divisor.
- Al igual que en el caso de la división con números, buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a: $-2\,x$
- En este caso, necesitamos: -2
- Ahora multiplicamos este número por $x - 3$ y el resultado lo escribimos debajo del último renglón...

Profesor: Sugiera a los estudiantes que comparen los dos procedimientos e identifiquen los coeficientes de uno en otro.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\cline{2-2}
x - 3 & x^2 - 5\,x - 10 \\
 & -\cancel{x^2} + 3\,x \\
\cline{2-2}
 & \quad -\cancel{2\,x} - 10 \\
 & \quad \cancel{2\,x} - \ 6 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad -16
\end{array}
$$

- Entonces,

$$\frac{x^2 - 5\,x - 10}{x - 3} = x - 2 - \frac{16}{x - 3}$$

- Ahora si, vamos a calcular el resultado usando la división sintética.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & -10 & 3 \\ & 3 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & -16 & \end{array}$$

- Para considerar un caso más general, supongamos que vamos a calcular el resultado de dividir el polinomio $a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ entre $x - k$.

- Entonces, de acuerdo al procedimiento que estamos utilizando obtenemos:

$$\begin{array}{cccc|c} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & k \\ & a_3\,k & a_3\,k^2 + a_2\,k & a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k & \\ \hline a_3 & a_3\,k + a_2 & a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1 & \boxed{a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0} & \end{array}$$

y en pasos:

✓ **Paso 1** $a_3\,k$

✓ **Paso 2** $a_3\,k + a_2$

✓ **Paso 3** $(a_3\,k + a_2) \cdot k = a_3\,k^2 + a_2\,k$

✓ **Paso 4** $a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1$

✓ **Paso 5** $\left(a_3\,k^2 + a_2\,k + a_1\right) \cdot k = a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k$

✓ **Paso 6** $a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0$

que es precisamente el resultado de evaluar la función polinomial en $x = k$.

Entonces, si el residuo de la división $(a_3\,k^3 + a_2\,k^2 + a_1\,k + a_0)$ es igual a cero, se sigue que k es una raíz de la función polinomial y además $x - k$ es un divisor del polinomio $a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Con esto queda completa la demostración del último teorema.

Observa que este resultado se cumple para funciones polinomiales de cualquier grado. No es exclusivo para las de grado 3.

Así, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema del residuo
Si el polinomio $P_n(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo de la división es igual al resultado de evaluar el polinomio en el punto $x = a$.

Teorema 2

Demuestra que $x = 6$ es una raíz de la función polinomial

$$y = x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$$

Ejemplo 4

- Por el teorema anterior, si al dividir el polinomio: $x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$ entre $x - 6$ obtenemos como residuo cero, entonces sí es una raíz de la función.

- Aquí está la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & -17 & 30 & 6 \\ & 6 & 12 & -30 & \\ \hline 1 & 2 & -5 & 0 & \end{array}$$

- Más aún, como $y = x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 30$ y sabemos que $x = 6$ es una raíz, podemos escribir:

$$y = (x - 6)(x^2 + 2\,x - 5)$$

- Usando la fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, podemos factorizar el polinomio cuadrático que está como factor en la función:

$$x^2 + 2\,x - 5 = \left(x + 1 - \sqrt{6}\right)\left(x + 1 + \sqrt{6}\right)$$

- Esto nos permite escribir la función como:

$$y = (x - 6)\left(x + 1 - \sqrt{6}\right)\left(x + 1 + \sqrt{6}\right)$$

- Se te queda como ejercicio graficar la función.

Observa que la función cuadrática: $y = x^2 + x$ puede escribirse como:

$$y = x \cdot (x + 1)$$

Y en general, cualquier función cuadrática $y = a\,x^2 + b\,x + c$ tiene a lo más dos raíces que están dadas por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Esto nos indica que una función polinomial puede expresarse como:

$$y = (x - r_1)(x - r_2)$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la función.

Del último ejemplo vemos que una función cúbica $y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ puede descomponerse como:

$$y = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

y en general, una función polinomial de grado n puede descomponerse en n factores:

$$y = P_n(x) = a_n\,(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

En otras palabras, una función polinomial de grado n, a lo más tiene n raíces.

Observa que algunas de las raíces pueden estar repetidas. En este caso, tenemos que incluirlas todas, repetidas o no.

Por ejemplo, la función polinomial:

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 2)(x + 3)$$

tiene cuatro raíces, las cuales son $1, 2, 2,$ y -3. La raíz $x = 2$ está repetida, pero debemos contarlas a las dos.

Teorema 3 **Teorema Fundamental del álgebra**
Sea $y = P_n(x)$ una función polinomial. Esta función tiene exactamente n raíces.

La función polinomial $y = P_n(x)$ tiene exactamente n raíces, algunas de las cuales pueden ser complejas conjugadas.

Ejemplo 5 Sabiendo que $x = 3$ es una raíz de la función polinomial:

$$y = x^5 - 3\,x^4 - 12\,x^3 + 36\,x^2 + 32\,x - 96$$

Calcula sus otras cuatro raíces.

- Como $x = 3$ es una raíz, podemos dividir el polinomio entre $x - 3$ y debemos obtener como cociente un polinomio de grado 4:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -3 & -12 & 36 & 32 & -96 & 3 \\ & 3 & 0 & -36 & 0 & 96 & \\ \hline 1 & 0 & -12 & 0 & 32 & 0 & \end{array}$$

- Entonces, podemos expresar la función como:

$$y = x^5 - 3\,x^4 - 12\,x^3 + 36\,x^2 + 32\,x - 96 = (x-3)(x^4 - 12\,x^2 + 32)$$

- Ahora debemos factorizar el segundo factor.
- Para esto vamos a definir $u = x^2$ para poder reescribir el polinomio como:

$$x^4 - 12\,x^2 + 32 = u^2 - 12\,u + 32$$

- Ahora debemos factorizar este polinomio cuadrático:

$$u^2 - 12\,u + 32 = (u-4)(u-8) = (x^2-4)(x^2-8)$$

- Para conocer las raíces igualamos a cero cada factor y despejamos x:

$$\begin{array}{lllll} x^2 - 4 = 0 & \Rightarrow & x^2 = 4 & \Rightarrow & x = \pm 2 \\ x^2 - 8 = 0 & \Rightarrow & x^2 = 8 & \Rightarrow & x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}$$

- Entonces, la factorización de este polinomio queda:

$$(x^2-4)(x^2-8) = (x-2)(x+2)(x-2\,\sqrt{2})(x+2\,\sqrt{2})$$

- Y la función factorizada puede escribirse como:

$$y = x^5 - 3\,x^4 - 12\,x^3 + 36\,x^2 + 32\,x - 96 = (x-3)(x-2)(x+2)(x-2\,\sqrt{2})(x+2\,\sqrt{2})$$

Profesor: Sugiera el uso de la división sintética.

- Esto nos ayuda a conocer las raíces de manera inmediata.
- Igualando cada factor a cero conocemos sus raíces: 3,2, -2, $2\,\sqrt{2}$ y $-2\,\sqrt{2}$.
- Se te queda como ejercicio:

✓ Verificar que $y(r) = P_5(r) = 0$, siendo r cada una de las raíces que se calcularon.
✓ Graficar la función.
✓ Calcular su dominio y contradominio.

En el primer ejemplo de esta sección se mencionó que para la función $y = x^3$, cuando los valores de x son positivos los valores de y son positivos y cuando los valores de x son negativos, los valores de y también lo son.

En general, para cualquier función polinomial de grado impar, para valores suficientemente grandes de x positivos, los valores de y serán del mismo signo que el coeficiente principal de la función.

Igualmente, para valores suficientemente grandes y negativos de x, los valores de y tendrán el signo opuesto al que tiene el coeficiente principal de la función.

Observa que en una dirección del eje x la función debe ser positiva y en la otra dirección debe ser negativa. Como la función es contínua, necesariamente debe cortar al eje x en algún punto.

Esto nos obliga a concluir el siguiente teorema.

Teorema 4 Cualquier función polinomial de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

Ejemplo 6 Sabiendo que $x = 4$ es una raíz de la función polinomial de tercer grado:

$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96$$

calcula sus demás raíces y grafícala.

- En este caso $x = 4$ es una raíz, así que podemos usar la división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -15 & 68 & -96 & 4 \\ & 4 & -44 & 96 & \\ \hline 1 & -11 & 24 & 0 & \end{array}$$

- Así que:
$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96 = (x-4)(x^2 - 11\,x + 24)$$

- Ahora factorizamos el último factor:
$$x^2 - 11\,x + 24 = (x-3)(x-8)$$

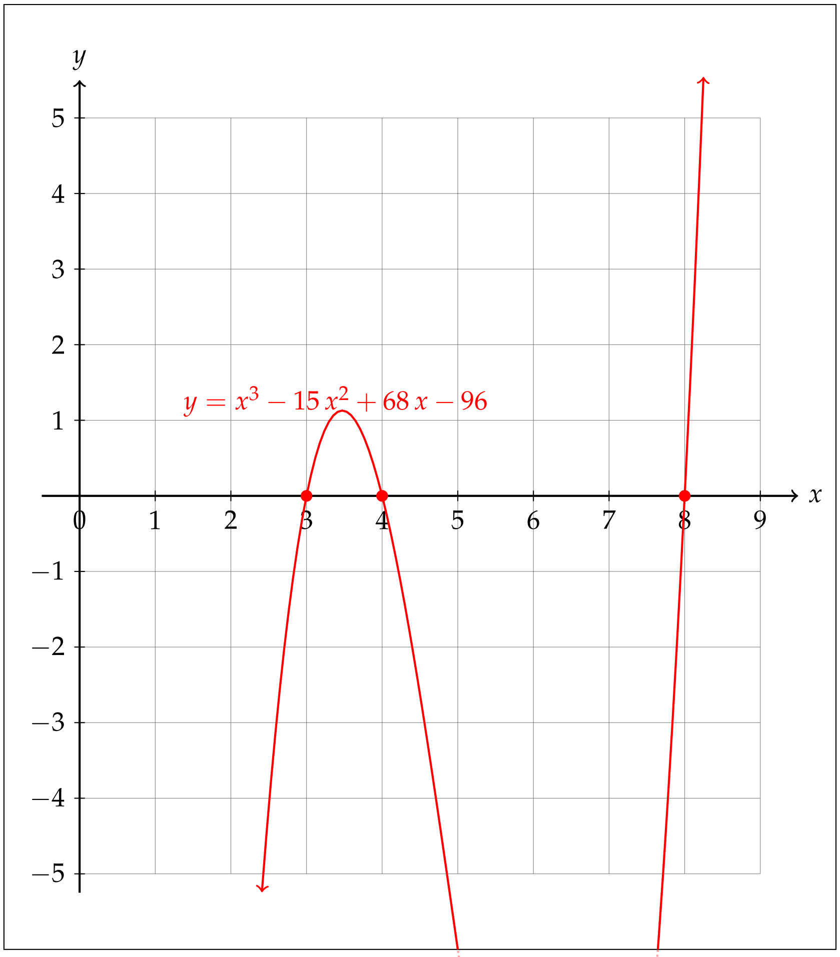
- Y finalmente, podemos reescribir la función como:
$$y = x^3 - 15\,x^2 + 68\,x - 96 = (x-4)(x-3)(x-8)$$

- De aquí vemos que las raíces de la función son: 4, 3 y 8.

- Ahora solamente falta graficarla.

- La siguiente gráfica se ha cortado a propósito por cuestiones de espacio.

- Tú ya sabes que toda función polinomial es contínua y que su dominio es el conjunto de los números reales.



Profesor:
Dependiendo de la impresión, entre el texto pueden notarse puntos tenues que siguen la curva.

Observa que el último teorema mencionado se refiere solamente a las funciones polinomiales de grado impar.

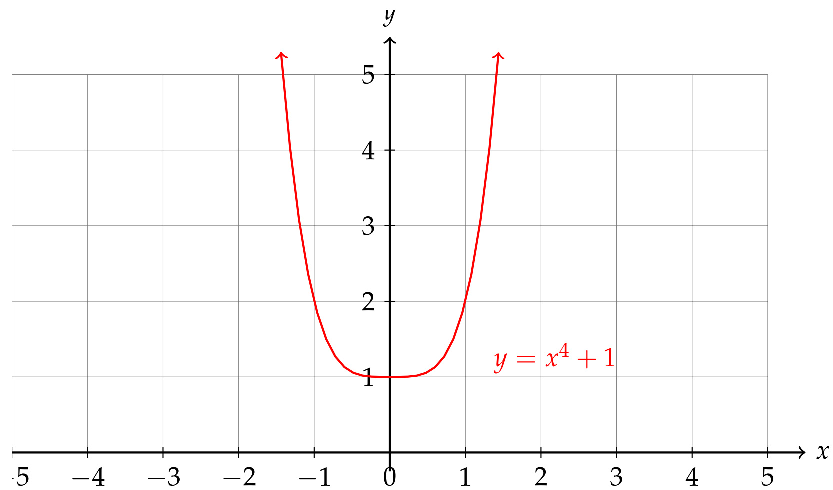
En el caso de las funciones de grado par, no necesariamente ocurre que tendrán al menos una raíz real, porque la traslación vertical puede hacer que la función no corte al eje. Para esto, basta con trasladar la gráfica de la función lo suficiente para que el mínimo o máximo de la función quede por arriba o debajo (según sea el caso) del eje x.

Ejemplo 7

Grafica la función polinomial:

$$y = x^4 + 1$$

- La gráfica de esta función es muy sencilla.
- Cuando $x = 0$, $y = 1$.
- Además, dado que el grado de la función polinomial es par, la función siempre es positiva (en este caso).
- También, el mínimo de esta función está en $x = 0$.



Profesor:
Puede mostrarse que las raíces son:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$$

- Observa que esta función no tiene raíces reales, porque al igualar a cero el polinomio que define a la función obtenemos:

$$x^4 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{-1} = \pm\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{i}$$

  donde i es la unidad imaginaria.

El ejemplo anterior sirve como un contraejemplo del último teorema aplicado a las funciones polinomiales de grado par.

En conclusión, ese teorema solamente se cumple para funciones polinomiales de grado impar.

Créditos

Albert Einstein

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 07 de agosto de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx