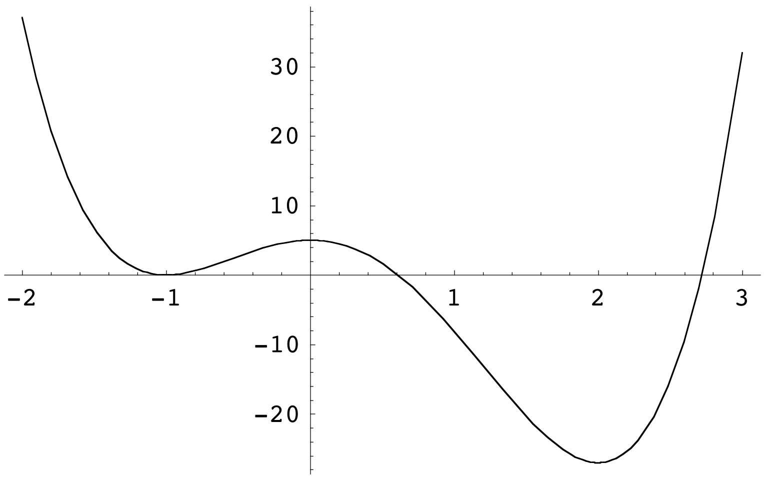
■ Máximos y mínimos relativos

Dada una funci ón f definida sobre un intervalo I ,

un **punto a$\in$ I es un máximo relativo** de f
si existe un $\varepsilon > 0$ tal que
para cualquier x que verifique $|x - a| < \varepsilon$ (es decir, $x \in]a- \varepsilon ,a+ \varepsilon[$)
se tiene que $f(x) \leq f(a)$.

Se dice que a es un mínimo relativo de f
si existe un $\varepsilon > 0$ tal que
para cualquier x que verifique $|x - a| < \varepsilon$ (es decir, $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$)
se tiene que $f(x) \geq f(a)$.

```
(*ejemplo*) f[x_] := 3 x^4 - 4 x^3 - 12 x^2 + 5
Plot[f[x], {x, -2, 3}];
```



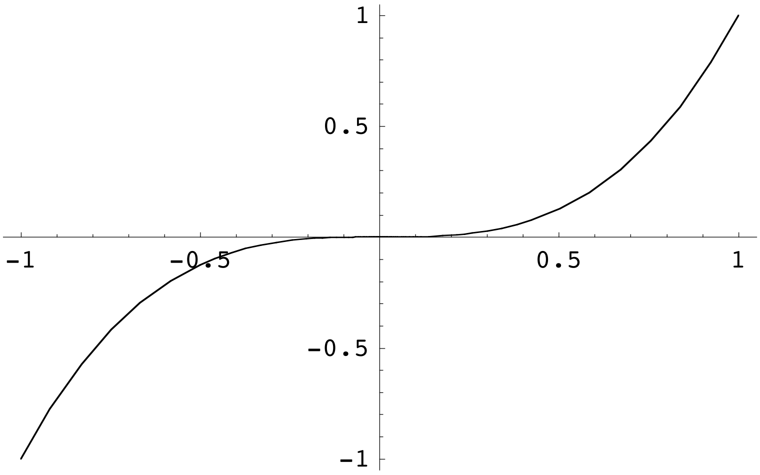
-1 y 2 son mínimos relativos, pero sólo 2 podría ser un mínimo (absoluto).
0 es un máximo relativo, pero no es un máximo (absoluto)

El mismo argumento que prueba que un máximos mínimos son punto críticos prueba que

Si a es un máximo o un minimo relativo para una función *f* , entonces a es un punto crítico de *f* (es decir, *f '* (a)=0)

Sin embargo, no todo punto crítico es máximo o mínimo relativo. Por ejemplo, consideremos la función

```
f[x_] := x^3
Plot[f[x], {x, -1, 1}, PlotRange → All];
```



Esta función tiene derivada 0 en 0 (puede apreciarse en su gráfica que la pendiente en ese punto es 0), pero 0 no es ni máximo ni mínimo relativo, pues f(x)<0=f(0) si x<0 y f(x)>0=f(0) si x>0.
Por lo tanto, una vez encontrados los puntos críticos, para saber si son máximos o mínimos relativos o no hay que ingeniárselas de algun modo. Vamos a ver algunos modos de ingeniárselas a contiuación

- Primer modo de ingeniárselas:
Estudiar el signo de f' en los intervalos entre los puntos críticos.
Veamos un ejemplo:
Encontrar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

```
Clear["@"]; f[x_] := 3 x^4 - 4 x^3 - 12 x^2 + 5;
f'[x]
Solve[f'[x] == 0]
```

$-24\,x - 12\,x^2 + 12\,x^3$

```
{{x → -1}, {x → 0}, {x → 2}}
```

Ahora calculamos *f'(x)* en un punto anterior a *-1,* en otro entre *-1* y *0,* en otro entre *0* y *2* y en otro posterior a *2*..

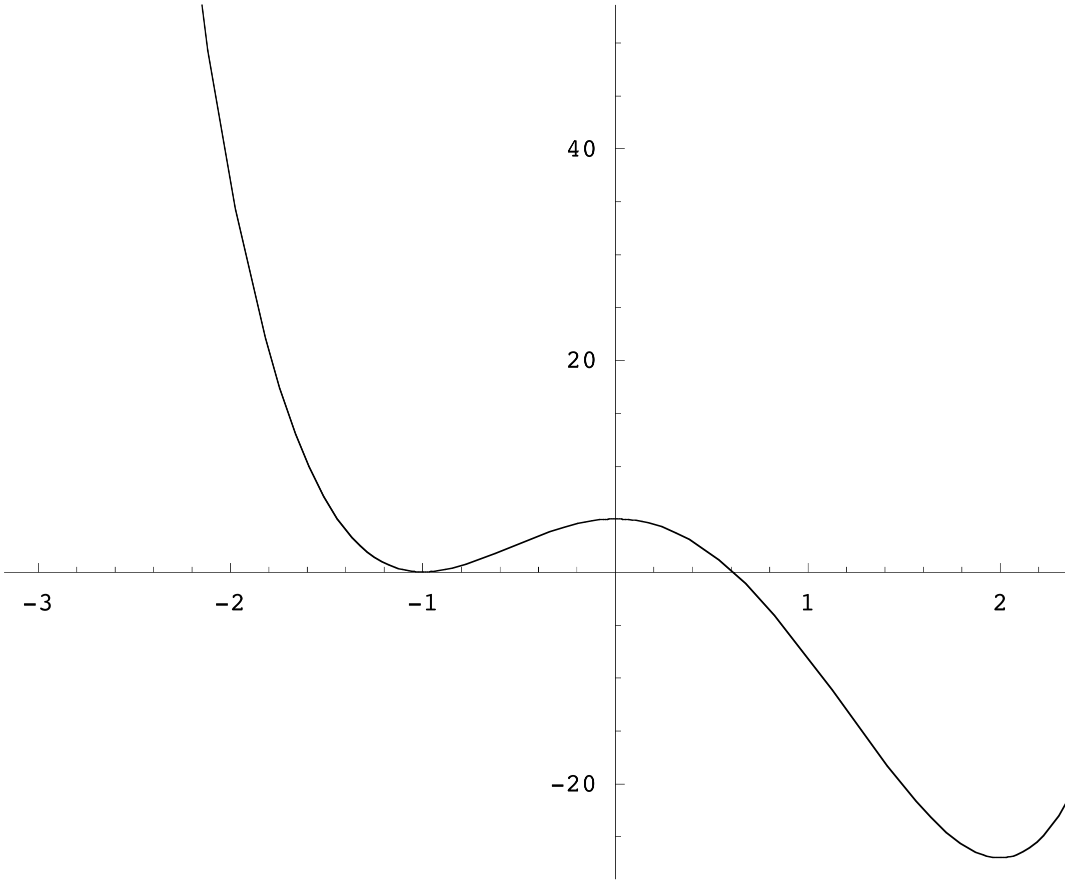
```
{f'[-2], f'[-0.5], f'[1], f'[3]}
```

```
{-96, 7.5, -24, 144}
```

se ve que *f'* pasa de negativa a positiva en -1, luego *f* pasa de decreciente a creciente en -1, luego se trata de un mínimo relativo, y, por el mismo tipo de razonamiento, 0 es un máximo relativo y 2 es un mínimo relativo (recuérdese que relativo=local). Además, hemos visto que la función *f* es decreciente en el intervalo]-∞, -1[, creciente en el intervalo]-1,0[, decreciente en

el intervalo]0,2[, y creciente en el intervalo]2,∞[.
Podemos comprobar todo esto dibujando la gráfica de la función. Para que no se nos escape ninguno de los comportamientos que hemos observado en la función, hemos de dibujar la gráfica en un intervalo que contenga, como mínimo a los tres puntos críticos. Por eso elegimos para dibujarla el intervalo [-3,4]

```
Plot[f[x], {x, -3, 4}];
```



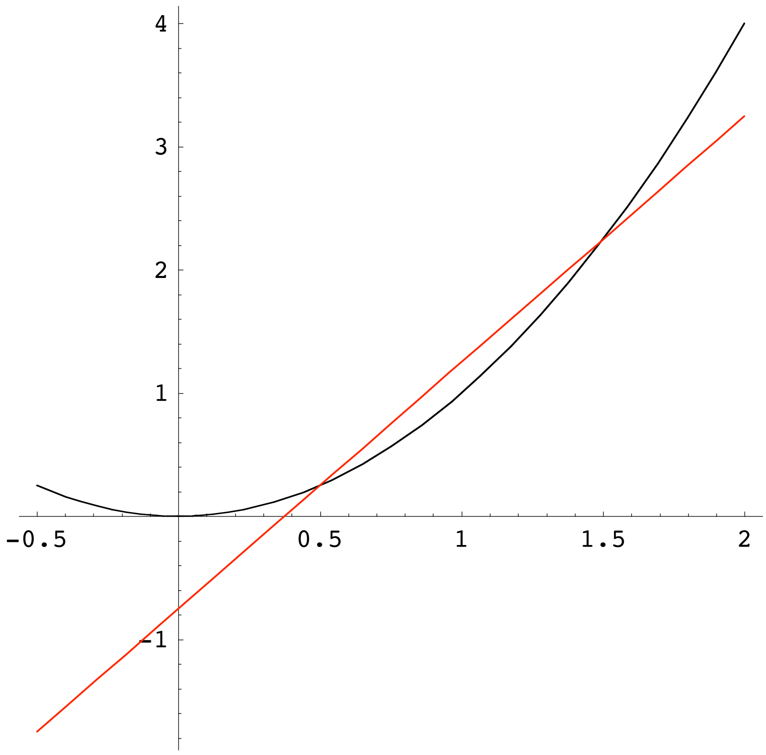
■ Segundo modo de ingeniárselas:
Estudiar lo que f'' dice sobre f:

Test de Concavidad
(a) Si $f''(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es convexa sobre ese intervalo
(a) Si $f''(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es cóncava sobre ese intervalo.

¿Qué significa convexa y cóncava?

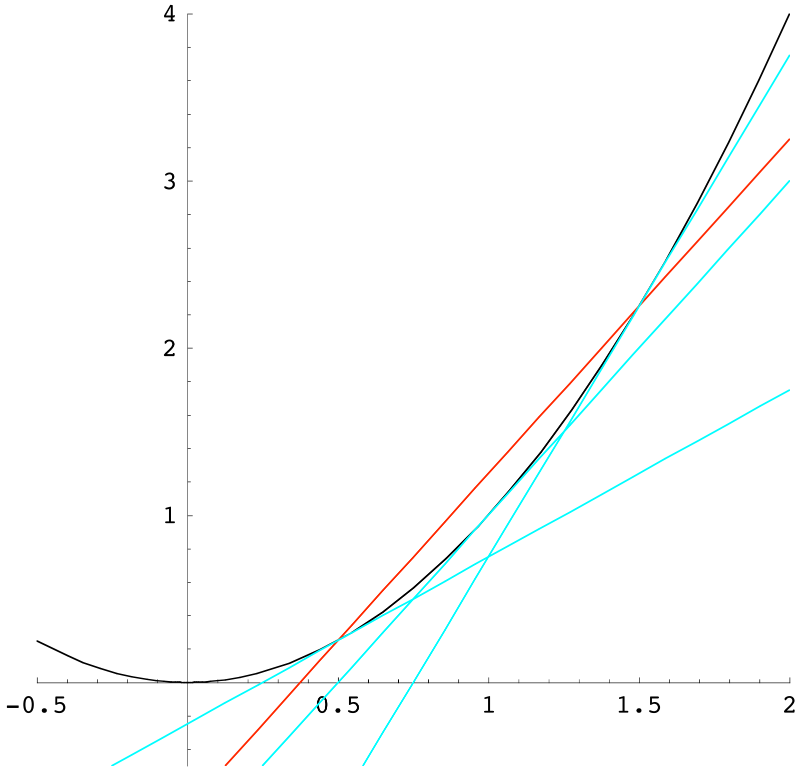
Llamaremos funcióon convexa a una funcióon que verifique que, al unir dos puntos de su gráfica por un segmento de recta, el segmento de curva de la gráfica correspondiente queda por debajo del segmento de recta.

```
(*ejemplo*)
f[x_] := x^2
(* recta que une (0.5,f (0.5)) con (1.5,f (1.5)) *)
y[x_] := -0.75 + (f[1.5] - f[0.5]) x
Plot[{f[x], y[x]}, {x, -0.5, 2},
  PlotStyle → {{}, Hue[0]}, AspectRatio → 1 / 1];
```



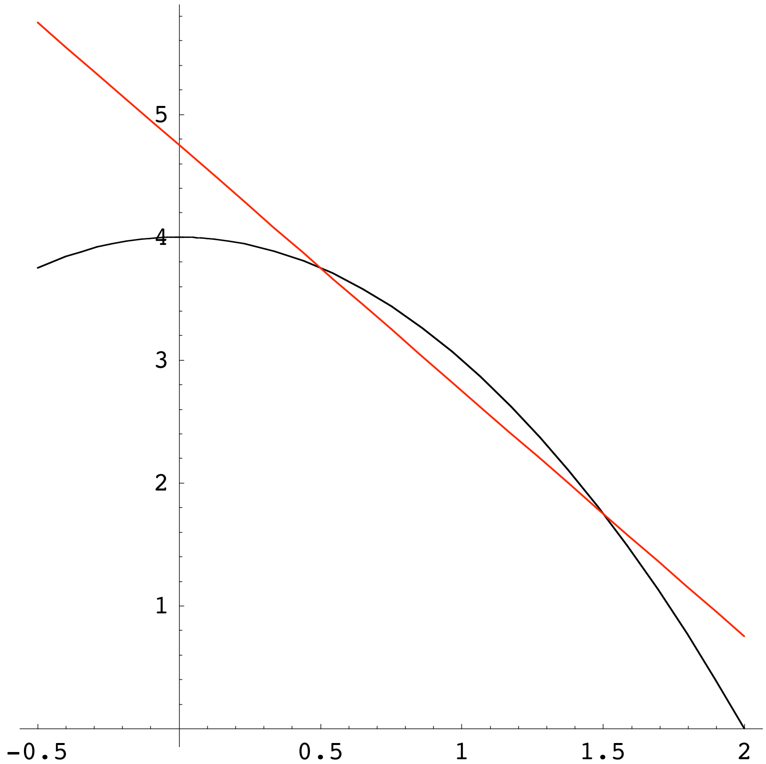
Una función verifica esta propiedad si y sólo si crece siempre más deprisa que su recta tangente (ver dibujo a continuación), luego una función es convexa si y solo si su derivada es creciente (f' es creciente), es decir,si y solo si f'' (x)>0 para todo x.

```
(*recta tangente en a *)
tan[a_, x_] := f[a] + f '[a] (x - a)
Plot[{f[x], y[x], tan[0.5, x], tan[1, x],
   tan[1.5, x]}, {x, -0.5, 2}, PlotStyle →
   {{}, Hue[0], Hue[0.5], Hue[0.5], Hue[0.5]},
  PlotRange → {{-0.5, 2}, {-0.5, 4}},
  AspectRatio → 1 / 1];
```



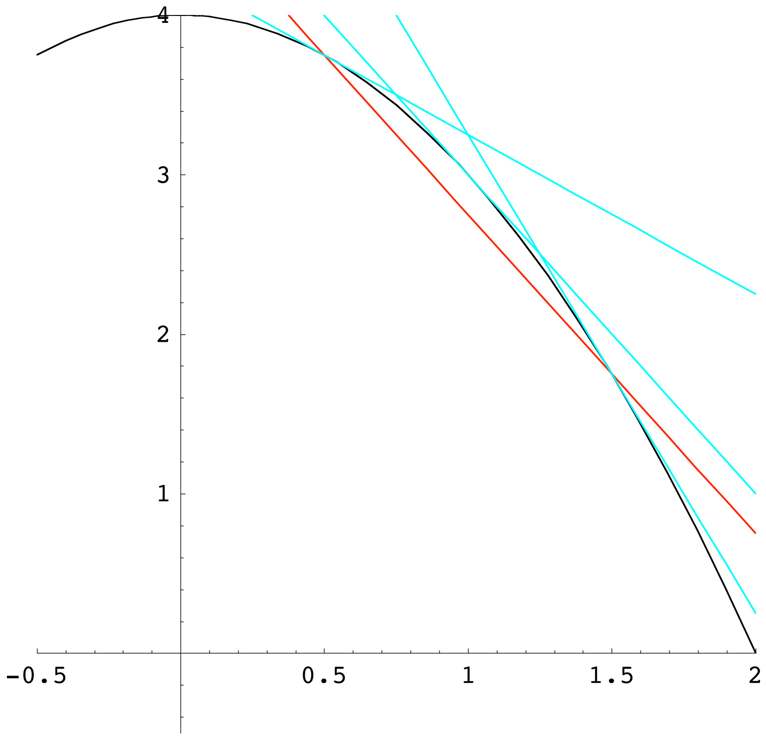
Llamaremos funcióon cóncava a una funcióon que verifique que, al unir dos puntos de su gráfica por un segmento de recta, el segmento de curva de la gráfica correspondiente queda por encima del segmento de recta.

```
(*ejemplo*)
f[x_] := 4 - x^2
(* recta que une (0.5,f (0.5)) con (1.5,f (1.5)) *)
y[x_] := 4.75 + (f[1.5] - f[0.5]) x
Plot[{f[x], y[x]}, {x, -0.5, 2},
  PlotStyle → {{}, Hue[0]}, AspectRatio → 1 / 1];
```



Una función verifica esta propiedad si y sólo si decrece siempre más deprisa que su recta tangente (ver dibujo a continuación),luego una función es convexa si y solo si su derivada es decreciente (f' es decreciente), es decir,si y solo si f'' (x)<0 para todo x.

```
(*recta tangente en a *)
tan[a_, x_] := f[a] + f'[a] (x - a)
Plot[{f[x], y[x], tan[0.5, x], tan[1, x],
   tan[1.5, x]}, {x, -0.5, 2}, PlotStyle →
   {{}, Hue[0], Hue[0.5], Hue[0.5], Hue[0.5]},
  PlotRange → {{-0.5, 2}, {-0.5, 4}},
  AspectRatio → 1 / 1];
```



De todo esto se deduce (observar espcialmente los dibujos) que:

(a) Si x es un punto crítico de f (f'(x)=0) y f es convexa en x (f '' (x) > 0), entonces x es un mínimo relativo de f.

(a) Si x es un punto crítico de f (f'(x)=0) y f es cóncava en x (f '' (x) < 0), entonces x es un máximo relativo de f.

NOTA IMPORTANTE: En muchos libros los conceptos de cóncava y convexa están dados justo al revés. Es una cuestión de convenio en la que no todos se han puesto de acuerdo.

- **Ejemplo:** Determina los máxmos y mínimos relativos de la función **$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x - 10$,** determina también en que intervalos es cóncava o convexa, y los *puntos de inflexión* (los puntos en que pasa de cóncava a convexa). Primero determinamos los puntos críticos y los puntos de inflexión

```
Clear["@"]; f[x_] := 4 x^3 - 3 x^2 - 6 x - 10;
f'[x]
Solve[f'[x] == 0]
f''[x]
Solve[f''[x] == 0]
```

$-6 - 6x + 12x^2$

$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{2}\right\}, \{x \to 1\}\right\}$

$-6 + 24x$

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{4}\right\}\right\}$

$x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$ son puntos críticos,

y en $x = \frac{1}{4}$ la función cambia de convexidad (punto de inflexión)

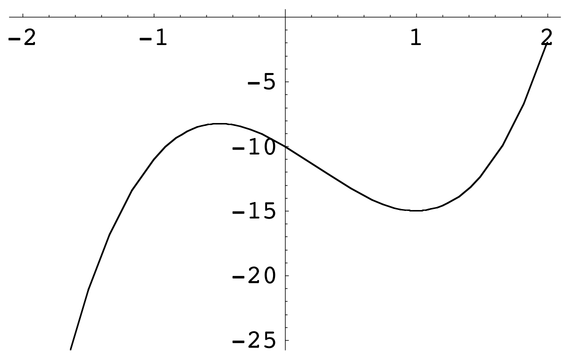
Ahora calculamos f'' antes y después de $x = \frac{1}{4}$:

```
{f''[0], f''[1]}
```

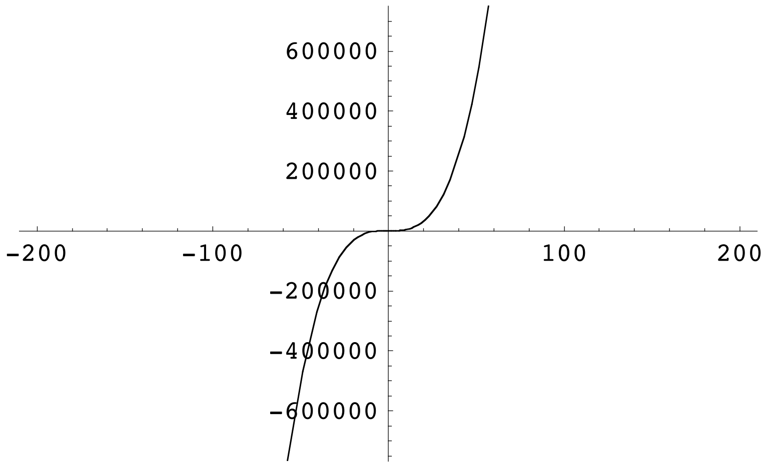
$\{-6, 18\}$

De donde se deduce que la función f es cóncava en $]-\infty, \frac{1}{4}[$, y convexa en $]\frac{1}{4}, \infty[$, tiene un punto de inflexión en 1/4, tiene un máximo relativo en $x = -\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$ y un mínimo relativo en $x=1>\frac{1}{4}$. Comprobemos el resultado dibujando la gráfica

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}];
```



```
Plot[f[x], {x, -200, 200}];
```



al ampliar el dominio de la función no se observan en la gráfica los máximos y mínimos relativos.