4. FUNCION LINEAL Y ECUACIÓN DE LA RECTA

El concepto de **función** es el mejor objeto que los matemáticos han podido inventar para expresar el cambio que se produce en las cosas al pasar el tiempo.

En esta unidad comenzaremos por preparar el camino para las siguientes al analizar aspectos básicos de las funciones tales como: identificar cuándo una relación entre dos conjuntos es una función, visualizar una función a través de distintos métodos, obtener información de esa representación y reconocer ciertos conjuntos asociados a las funciones tales como el dominio y la imagen.

Haremos hincapié en que una función puede representarse de diferentes modos: mediante una ecuación, con una gráfica, o con palabras.

Más adelante nos introduciremos en las funciones lineales, cuyas representaciones gráficas son las más simples: las rectas. Como caso particular observaremos las características propias de la función de proporcionalidad.

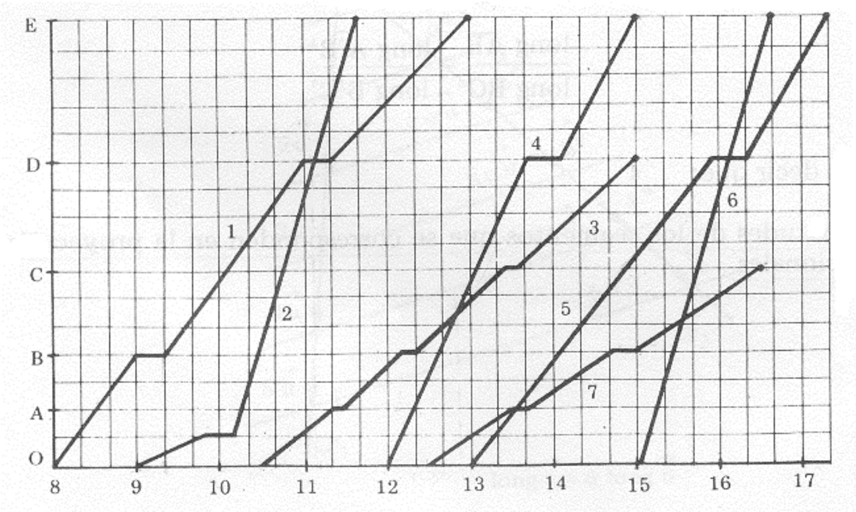
Finalmente, veremos cómo resolver problemas usando sistemas de dos ecuaciones lineales, tratando de no perder de vista el significado geométrico del problema.

4.1. Función

La construcción y lectura de gráficos son necesidades imprescindibles en el mundo actual. No es posible comprender un diario si no se tiene idea de cómo interpretar un gráfico.

Como primer acercamiento observemos el siguiente gráfico que contiene información simple de leer.

En las empresas ferroviarias se utilizan diagramas similares a estos para programar la señalización a lo largo de la vía férrea.



En el eje vertical se han marcado los puntos O, A, B, C, D, y E que son estaciones ferroviarias.

En el eje horizontal se ha representado el tiempo medido en horas.

Cada línea quebrada indica la posición del tren, cuyo número está marcado sobre la misma, en función del tiempo. Observemos que algunos trenes no llegan a la última estación y algunos no paran en ciertas estaciones.

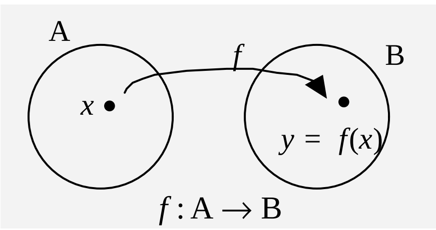
Veamos algunas preguntas que podemos hacer para interpretar el gráfico:

1) ¿A qué hora sale el tren nº 2?
2) ¿A qué hora llega a la estación *E* el tren nº 4?
3) ¿Cuánto tiempo transcurre entre la salida del tren nº 3 y el nº 4?
4) ¿Cuánto tarda el tren nº 1 en ir de la estación *O* a la estación *B*?
5) ¿Cuánto tiempo el tren nº 1 está detenido en la estación *B*?
6) ¿Cuánto tiempo transcurre en la estación *D* desde la partida del tren nº 1 hasta que pasa el tren nº 6?
7) ¿Hasta donde llega el tren nº 3?
8) ¿A qué hora y en qué lugar se cruzan los trenes nº 1 y nº 2?
9) Si un pasajero llega a la estación *O* a las 12:30 hs. y quiere llegar a la estación *E*, ¿qué opciones tiene?
10) Si un pasajero llega a la estación *O* a las 10 hs. y toma el tren nº 3, ¿cómo hace para llegar a la estación *E*?. ¿A qué hora llega?. ¿Qué le hubiera convenido hacer para llegar antes?
11) ¿Es siempre la misma la velocidad del tren nº 2?. ¿Y la del tren nº 1?. ¿En qué lugar es mayor?

Desde un punto de vista informal, una ***función*** es una regla que permite asignar a cada uno de los elementos "*x*" de un conjunto "*A*" un único elemento "*y*" de otro conjunto "*B* ". A diario tenemos ejemplos de estas asignaciones: el médico dosifica un antibiótico en *función* del peso del bebé, nos cobran el pasaje en *función* de la distancia recorrida, la distancia recorrida es *función* de la velocidad alcanzada, etc.

Función

Sean *A* y *B* dos subconjuntos de R. Cuando existe una relación entre las variables, *x* e *y*, donde *x* Î *A* e *y* Î *B*, en la que a *cada* valor de la *variable independiente x* le corresponde un *único* valor de la *variable dependiente y*, diremos que dicha relación es una *función*.



Diremos que y es la ***imagen*** de x por la función f .

En símbolos:

$$y = f(x)$$

Una forma de representar una función es mediante una gráfica en un ***sistema de coordenadas cartesianas***.

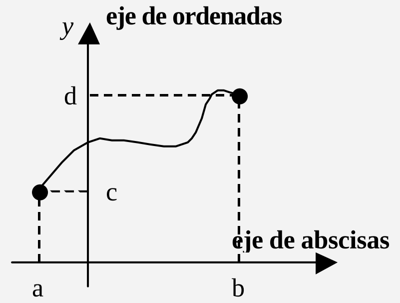
Eje de Abscisas

En el eje horizontal se representa a la variable independiente y recibe el nombre de *eje de abscisas* o *eje x*.

Eje de Ordenadas

En el eje vertical se ubica la variable dependiente y recibe el nombre de *eje de ordenadas* o *eje y*.

Gráficamente



Al representar una función $y = f(x)$ en un sistema de coordenadas cartesiano, sobre el eje de abscisas se ubica la variable independiente x, mientras que sobre el eje de ordenadas se ubica la variable dependiente y.

Dominio

Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente x lo denominamos *dominio* de la función y lo denotamos *Dom f*.

En el gráfico anterior podemos leer

$$\text{Dom } f = [\, a , b \,]$$

Imagen

Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente y tales que $y = f(x)$ para algún x Î A, lo denominamos *imagen* de la función y lo denotamos *Im f*.

En el gráfico anterior podemos leer

$$\text{Im } f = [\, c , d \,]$$

Para una función $f : A \to B$, se tiene que $A = \text{Dom } f$ e $\text{Im } f \subseteq B$

No todo lo que parece es una función. Es importante aprender a reconocer cuándo una relación entre dos conjuntos es o no una función.

Analicemos los siguientes gráficos, que muestran relaciones desde un conjunto A hacia un conjunto B, donde $A = [\, 1 , 5 \,]$ y $B = [\, 0 , 5 \,]$

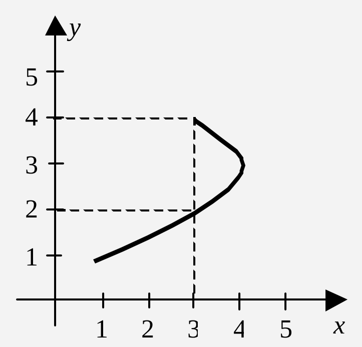


Gráfico 1

El Gráfico 1 **no** representa una función pues hay elementos del dominio que tienen más de una imagen.

Ejemplo:

$$f(3) = 2 \quad \text{y} \quad f(3) = 4.$$

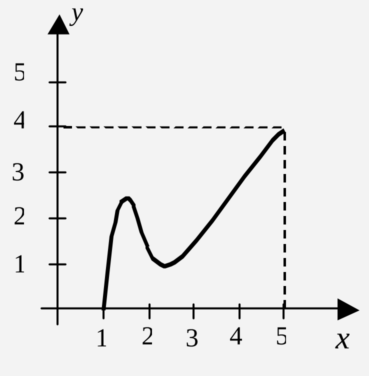


Gráfico 2

El Gráfico 2 corresponde a una función puesto que todos los elementos de *A* tienen una única imagen en *B*.

En este caso podemos observar que

$$\text{Dom } f = [\,1\,,5\,] \qquad \text{e} \qquad \text{Im } f = [\,0\,,4\,]$$

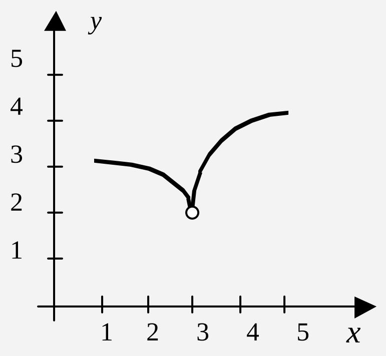


Gráfico 3

El Gráfico 3 **no** representa una función pues hay elementos del conjunto *A* que no tienen imagen.

Por ejemplo, el punto (3,1) se ha marcado con un pequeño círculo vacío para indicar que $f\,(3)$ 1. Por otro lado, los elementos que pertenecen al intervalo (4,5] no poseen imagen.

Mayor dominio de definición

Cuando la función viene dada por una fórmula del tipo $y = f\,(x)$, el *mayor dominio de definición* es el conjunto de los valores de x para los cuales se puede calcular $f\,(x)$.

Para pensar...

a) Si $f\,(x) = 2x$,

¿para qué valores de x es posible calcular $2x$?.

Observemos que...

claramente es posible calcular $2\,x$ para cualquier número real *x*.
Luego, Dom f = R

b) Si $f\,(x) = \dfrac{2}{x-1}$,

¿es siempre posible calcular este cociente?.

Observemos que...

como la división por 0 no está definida debe ser $x - 1 \neq 0$, o sea $x \neq 1$.
Luego, Dom$f$ = R - {1}

Ayuda
Recuerda cuándo es posible calcular la raíz cuadrada de un número real.

c) Si $f(x) = \sqrt{x+2}$, Dom f = [-2 , +∞).

¿Por qué?

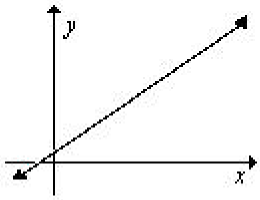
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1)

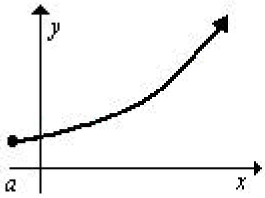
a) Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justificar.

b) Hallar el dominio y la imagen de los que corresponden a función.

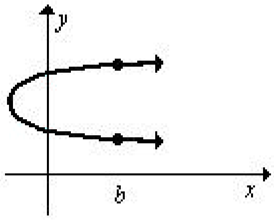
i)



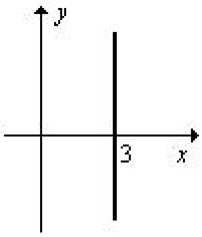
ii)



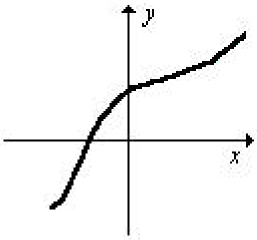
iii)



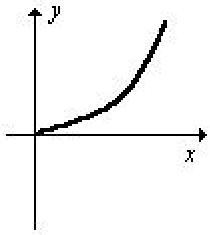
iv)



v)

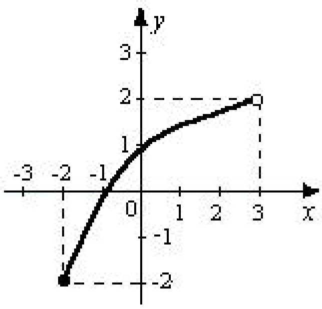


vi)

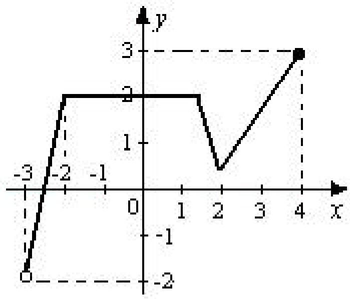


2) Dados los siguientes gráficos correspondientes a funciones, determinar los conjuntos dominio e imagen de cada una de ellas:

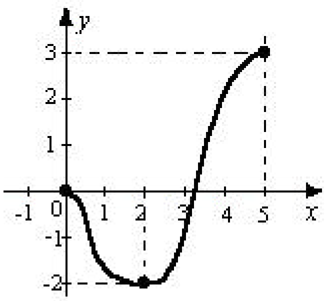
i)



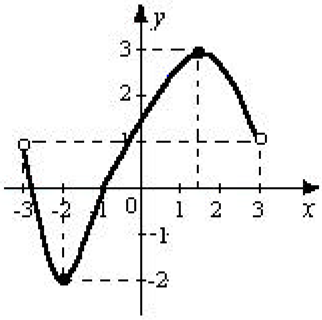
ii)



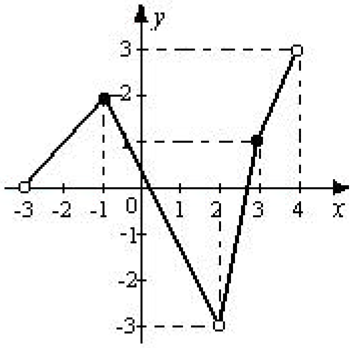
iii)



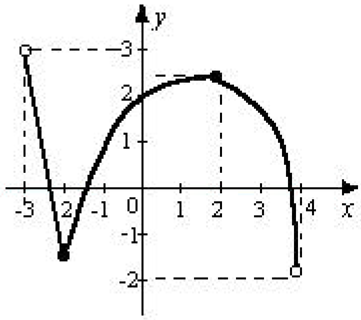
iv)



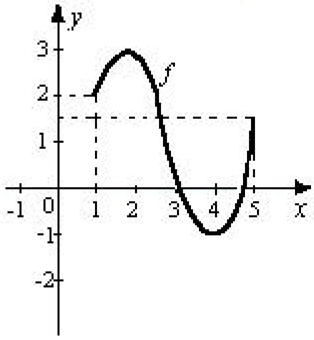
v)

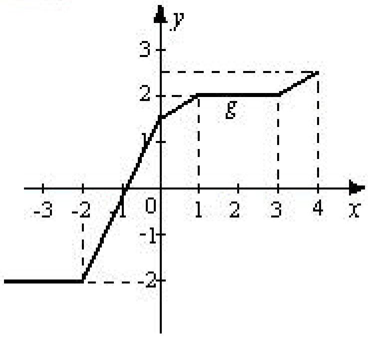


vi)



3) Para las funciones representadas, estimar, a partir de su gráfico, los valores que se indican.





a) $f(1)$; $f(2)$; $f(2,5)$; $f(4)$; $f(5)$.

b) Los valores de x tales que $f(x) = 0$.

c) $g(-1,5)$; $g(-0,5)$; $g(0)$; $g(0,5)$; $g(4)$.

d) Los valores de x tales que $g(x) = 2$.

e) Los valores de x tales que $g(x) = -2$.

4) En los siguientes casos, ¿ y es una función de x ?, ¿ x es una función de y ?. Según sea la respuesta, indicar dominio e imagen:

a) x representa un número natural e y, el resto de dividir ese número natural por 4.
b) x representa una persona e y, su número de teléfono.

5) Calcular el máximo dominio de las funciones dadas por:

a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ f) $f(x) = 1/\sqrt{x}$

6) En cada caso, calcular, si es posible, $f(0)$, $f(-0,8)$, $f(0,8)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-4,25)$, $f(4,25)$ y decir cuál es el dominio de la función f :

a) $f(x) = -3x + 2$ b) $f(x) = -4$ c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 4$ e) $f(x) = \dfrac{5}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

7) Para una experiencia de Biología, se midió el largo y el ancho de las hojas de una rama y se obtuvieron los datos que aparecen en la tabla. Tener en cuenta que el largo y el ancho de las hojas de una rama cualquiera siempre guardan el mismo tipo de relación.

Largo (cm)	**Ancho** (cm)
6,5	5
6,2	4,8
5,6	4,1
5,1	3,9
4,5	3,5

a) Representar los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.
b) Dibujar una curva que los aproxime.

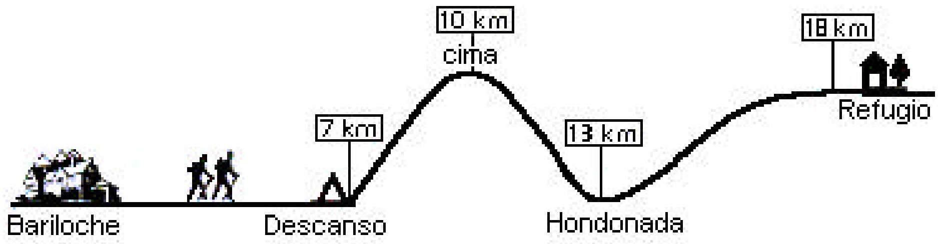
8) Los siguientes gráficos corresponden al producto bruto interno de cierto país; uno de ellos figura en un diario oficialista y, el otro, en uno opositor.
a) ¿Los dos gráficos presentan la misma información?
b) ¿Representan la misma función?
c) ¿A qué diario corresponde cada gráfico? Justificar la elección.

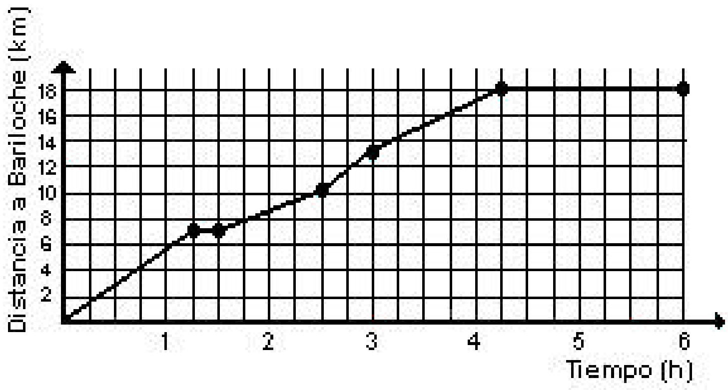
i)

ii)

9) Dos excursionistas proyectan realizar una caminata desde San Carlos de Bariloche (Río Negro) hasta un refugio en la montaña, que se encuentra a 18 km de la ciudad.
Para orientarse, cuentan con un perfil del trayecto y un gráfico distancia - tiempo confeccionado por un grupo que realizó esa caminata el mes anterior. Responder las siguientes preguntas a partir de la información dada por dichas representaciones:

a) ¿Cuántos km recorrieron aproximadamente hasta llegar al primer descanso?. ¿A qué hora llegaron?. ¿Cuánto tiempo se detuvieron?.
b) ¿Cuántos km recorrieron desde ese lugar hasta alcanzar la primera cima y cuánto tiempo tardaron en subirla?.
c) ¿Cuántos km hicieron de bajada?. ¿Les llevó menos tiempo?.
d) Comparar el trayecto desde la cima hasta la hondonada, marcado en el perfil, con la parte del gráfico que lo representa.
e) Al llegar a la hondonada, ¿cuántos km. les faltaba para llegar al refugio?. ¿A qué hora llegaron?. ¿Cuánto tiempo descansaron?.





4.2. Función lineal y ecuación de la recta

Observemos que...

- ✓ *La longitud que un resorte se alarga es proporcional a la fuerza que se hace para alargarlo, es decir, a doble fuerza, doble estiramiento.*
- ✓ *El dinero que se debe pagar por un crédito en un banco es proporcional a la cantidad de dinero que el banco ha prestado, y también es proporcional al tiempo durante el cual lo ha prestado.*
- ✓ *Las dosis de muchas medicinas son proporcionales al peso del enfermo.*

En la naturaleza y en la vida diaria hay gran cantidad de fenómenos que se comportan de esta misma manera. Esto explica el interés por el estudio matemático de la función de proporcionalidad, caso particular de la función lineal, y por su representación gráfica**, la recta.**

4.2.1. Función lineal

Función Lineal

Toda función de la forma

$$y = f(x) = m\,x + b \qquad \text{con} \quad m \in R,\ b \in R,$$

recibe la denominación de *función lineal.*

Son ejemplos de funciones lineales:

$y = 2x$ $\quad$ $y = x - 4$

$y = 0{,}5x + 2$ $\quad$ $y = 2$

En esta fórmula x representa la *variable independiente* e y la *variable dependiente*.

Pendiente

Denominaremos *pendiente* a la constante *m*.

Ordenada al origen

Denominaremos *ordenada al origen* a la constante *b*.

El dominio de la función lineal f es todo el conjunto R de los números reales.

Ayuda

Observa una recta paralela al eje y recordando la definición de función.

Para pensar….

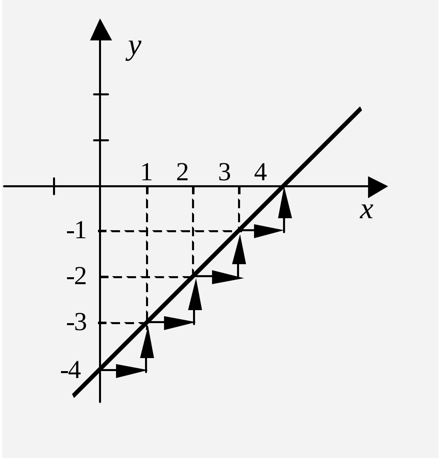
El gráfico de una función lineal es siempre una recta que no puede ser paralela al eje y. ¿Por qué?

4.2.2. Pendiente de una recta

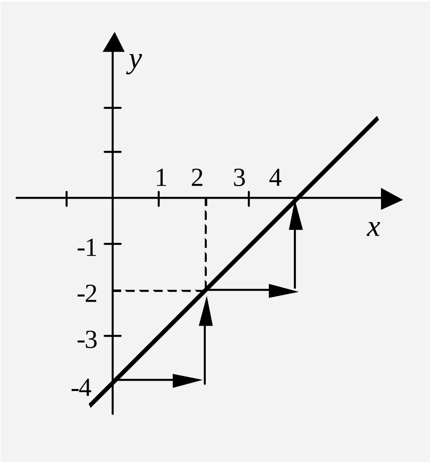
Vamos a estudiar más detenidamente a la función lineal. Representemos en el plano de coordenadas cartesianas algunas funciones.

Ejemplos:

a) $y = x - 4$



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada también aumenta 1 unidad.



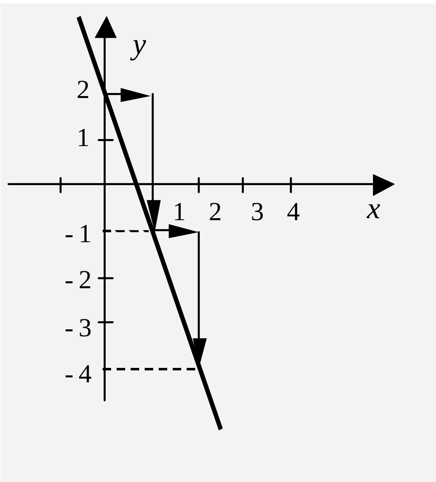
Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada aumenta 2 unidades.

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 = m$$

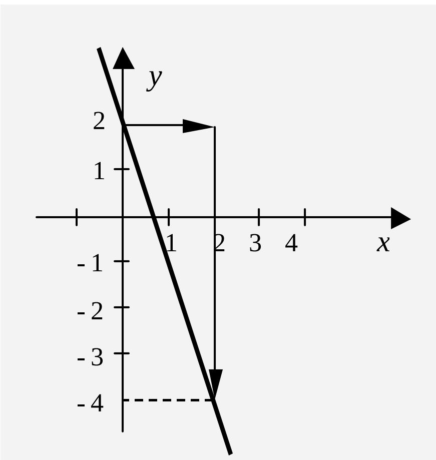
Observemos que...

los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

b) y = - 3 x +2



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada disminuye 3 unidades.

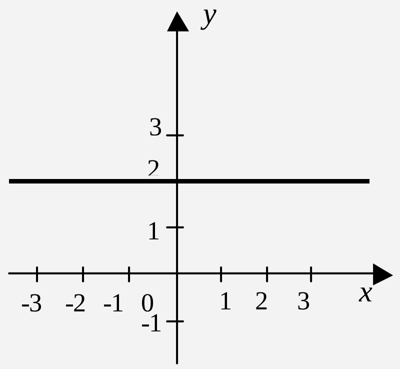


Si la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada disminuye 6 unidades.

$$\frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = \cdots -3 = m$$

Nuevamente observamos que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

c) $y = 2$



Cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada no aumenta ni disminuye.

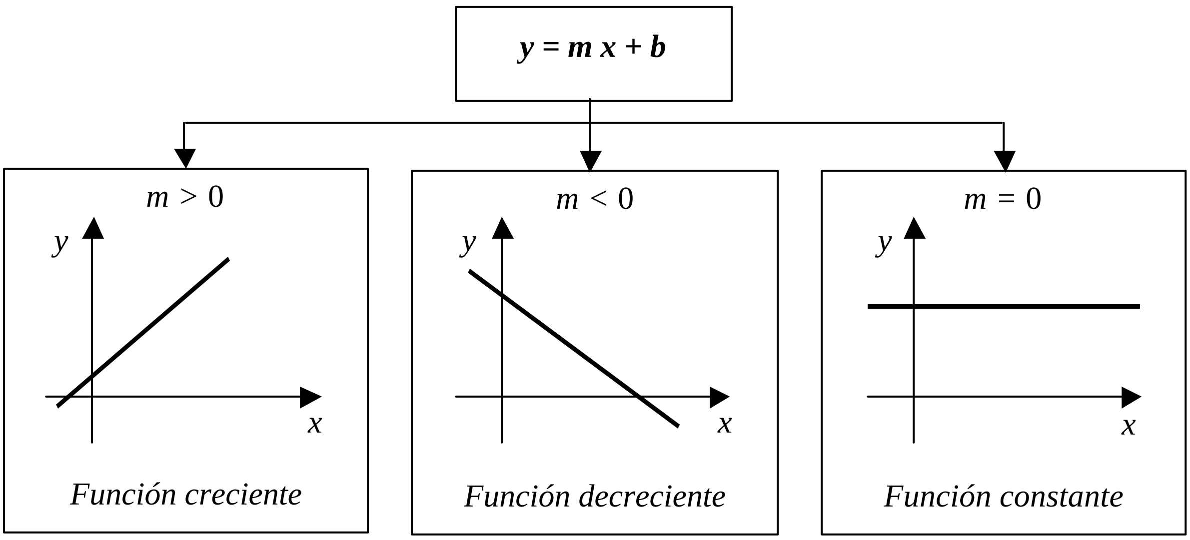
Lo mismo ocurre cuando la abscisa aumenta 2, 3, o más unidades.

$$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = m$$

En este ejemplo resulta que los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa son constantes e iguales a 0, el valor de la pendiente m.

Atención
Habrás observado que la inclinación de cada recta está directamente relacionada con el signo de su pendiente.

En el siguiente cuadro se clasifican las funciones lineales según el valor de la pendiente:



Resumiendo

- ✓ La ***pendiente*** está determinada por el cociente entre la *variación* de y y la *variación* de x.

- ✓ La ***pendiente*** m mide la inclinación de la recta respecto del eje x. Podemos hallar entonces, a partir de la pendiente, el ángulo α que forma dicha recta con el eje x teniendo en cuenta que:

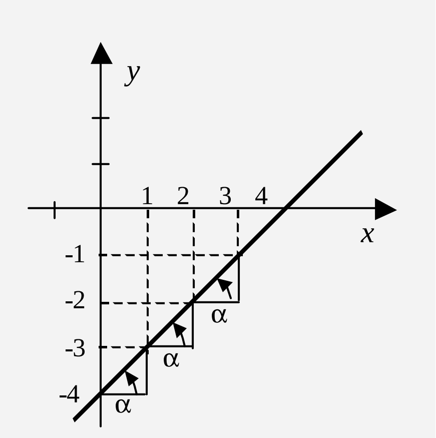
$$m = \text{tg}\ \alpha.$$

La función tangente, utilizada en la expresión: $m = tg\ \alpha$, se estudiará junto con las demás funciones trigonométricas, con más detalle en una próxima unidad.

Recordemos que...

el ángulo de inclinación α , se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x.

Retomando los ejemplos anteriores:



$y = x - 4$

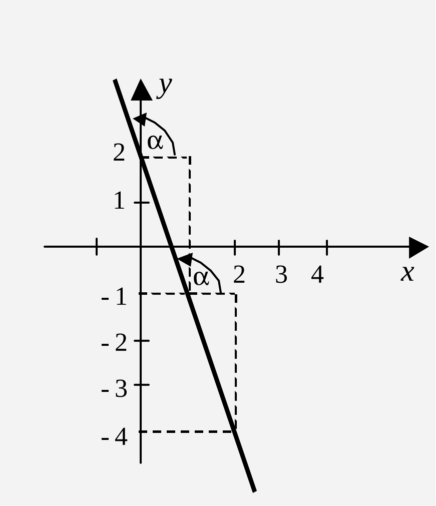
a) $y = x - 4$

En este ejemplo

$$m = \frac{1}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

Entonces

$$\alpha = 45^{o}$$



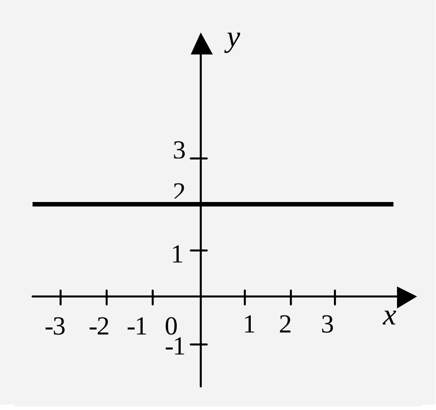
$y = -3\,x + 2$

b) $y = -3\,x + 2$

$$m = \frac{-3}{1} = \operatorname{tg} \alpha$$

entonces

$$\alpha = 108^{o}\ 26'\ 5{,}82''$$



c) $y = 2$

$$m = \frac{0}{2} = \operatorname{tg} \alpha$$

entonces

$$\alpha = 0^{o}$$

4.2.3. Función de proporcionalidad

Recordemos que...

en la ecuación $y = mx + b$
a la constante b se la denomina
ordenada al origen.

La *ordenada al origen* es el punto de intersección entre la recta y el eje y, es decir, es el valor de la ordenada para $x = 0$, o sea la imagen de cero.

Función de proporcionalidad directa

Si la ordenada al origen es 0, resulta

$$y = mx.$$

Este caso particular se llama *función de proporcionalidad directa* y su gráfica es una recta que pasa por el origen.

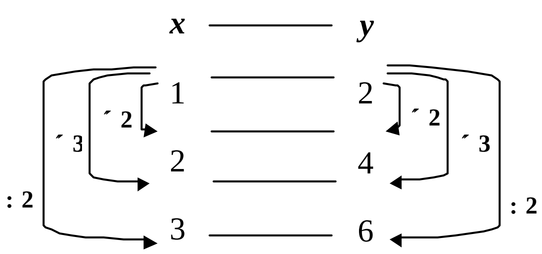
Observemos en la función $y = 2\ x$ la relación entre los valores de la variable x y los valores que se obtiene de la variable y.

Es decir, si se calcula...

el doble de 1, su imagen resulta el doble de 2.

el triple de 1, su imagen resulta el triple de 2.

la mitad de 1, su imagen resulta la mitad de 2.
.....



$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \ldots = 2 = m$$

En este caso los cocientes entre la *variación* de la ordenada y la *variación* de la abscisa nos dan nuevamente el valor de la pendiente.

La pendiente de la función de proporcionalidad se denomina *constante de proporcionalidad.*

4.2.4. Ecuación de la recta

Veamos qué formas puede tomar la ecuación de una recta.

Ecuación de la recta

Para $m, n \in \mathbb{R}$ constantes, podemos interpretar una función lineal

$$y = mx + n$$

como una ecuación lineal con dos incógnitas x e y que denominaremos *ecuación de la recta.*

Forma explícita de la ecuación de la recta

A la expresión

$$y = mx + n,$$

donde $m, n \in \mathbb{R}$ son constantes, la denominamos *forma explícita* de la ecuación de la recta.

Ejemplo:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

Forma implícita de la ecuación de la recta

Diremos que para $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes,

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

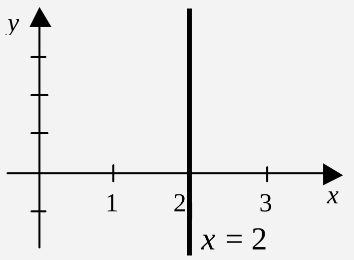
es la *forma implícita* de la ecuación de la recta.

Ejemplo:

La misma recta del ejemplo anterior se puede escribir como

$$2\,x - 3\,y + 8 = 0.$$

$x = 2$
es la ecuación de la recta vertical cuyo gráfico es:



Observemos que...

si $b = 0$ y $a \neq 0$,

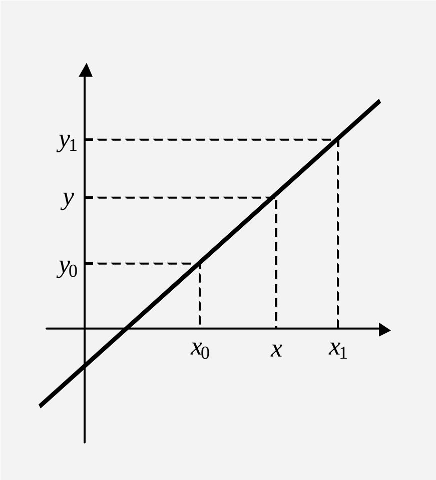
la ecuación implícita de la recta se reduce a

$$a\,x + c = 0,$$

que representa a la recta paralela al eje y,

$$x = -\frac{c}{a}$$

la cual, como vimos anteriormente **no** representa una función $y = f(x)$.



Si tenemos como datos dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) pertenecientes a una recta, podemos construir la ecuación de la misma.

Observemos que...

su pendiente es $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Así,

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

es la *ecuación de la recta que pasa por los dos puntos*

(x_0, y_0), (x_1, y_1)

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

10) Dadas las siguientes expresiones, señalar con una cruz las ecuaciones asociadas a una función lineal de una variable:

a) ☐ $10\,x + 8\,y - 30 = 0$

b) ☐ $2\,x + 3\,y - z = x + y$

c) ☐ $4\,(h + 3) - 5\,t + 8\,(t - h) = 4$

d) ☐ $x^2 + y^2 = 4$

e) ☐ $2\,t^2 - 5\,t = 0$

f) ☐ $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1$

11) Representar gráficamente las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y = -4\,x + 1$

b) $y = -5$

c) $x + y = 0$

d) $\dfrac{x}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{\frac{3}{4}} = 1$

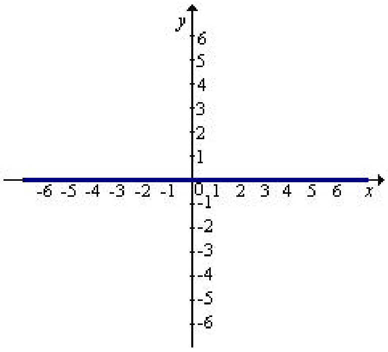
e) $3\,x - 2\,y + 1 = 0$

f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-3} = 1$

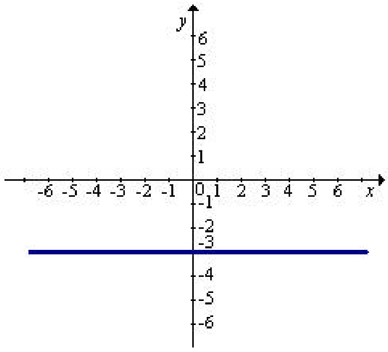
g) $x = -3$

12) Dar la expresión en forma explícita de las rectas graficadas a continuación, luego indicar en qué casos se trata de un función de proporcionalidad directa:

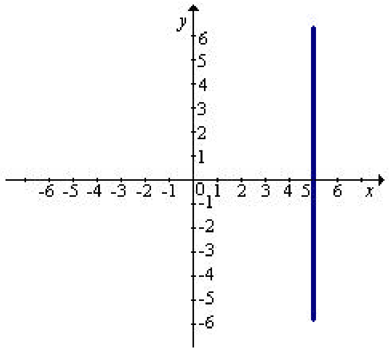
a)



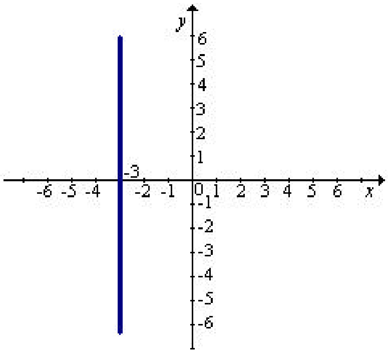
b)



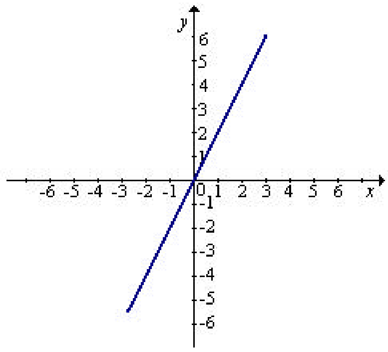
c)



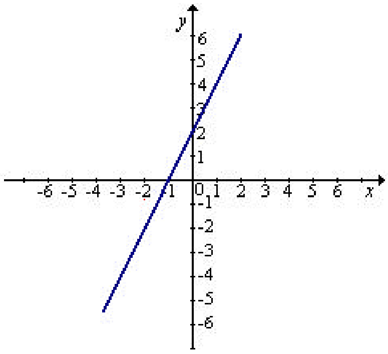
d)



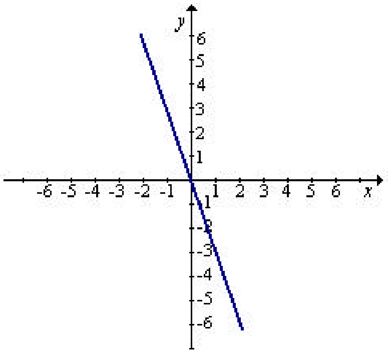
e)



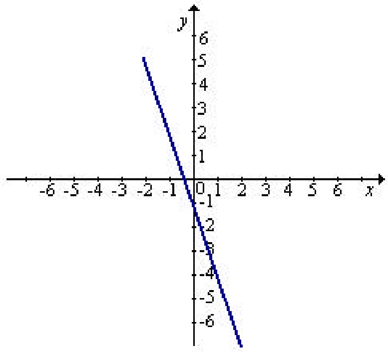
f)



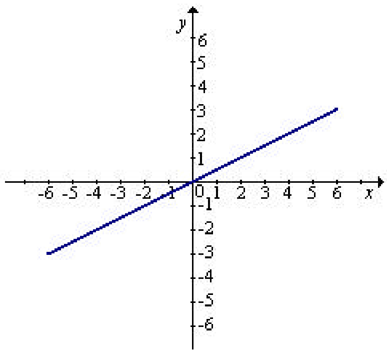
g)



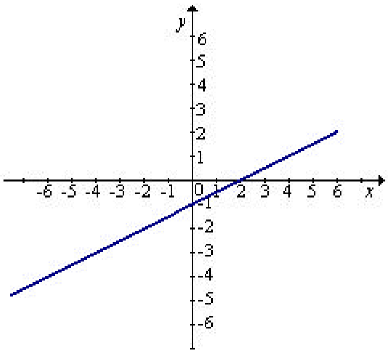
h)



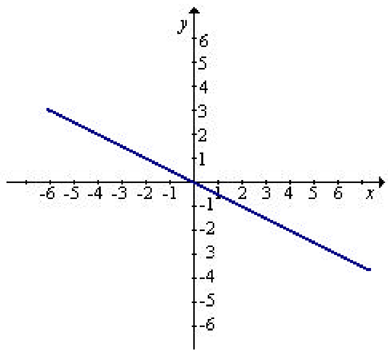
i)



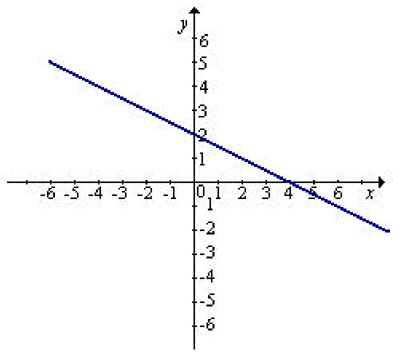
j)



k)



l)



13) Hallar el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas:

a) $3x - y + 2 = 0$ b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$ c) $2y - 3 = 0$

14) Hallar la ecuación de la recta que corta al eje x en el punto de abscisa 3 y forma con él un ángulo de 60º.

15) Hallar el valor de k en las siguientes ecuaciones a fin de que cada recta pase por el punto indicado:

a) $4x + 3y - k = 0$ A (1 , -2) b) $-kx + \frac{y}{2} - 1 = 0$ B (3 , 0)

16) ¿Cuánto debe valer un número real k para que el punto (-1 , 2) se encuentre en la recta $kx + 7y - 7 = 0$?. Graficar.

17) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) (-2 , -1) y (-4 , -3) b) (3 , 5) y (7 , -2)
c) (6 , -1) y (-2 , 4) d) (1 , -5) y (10 , 11)

18) Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente 5 y -1. Graficar.

19) Averiguar si los puntos (0 , 2) , (1 , -1) y (-1 , 5) están alineados**.**

20)

a) Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente 5 y pasa por el punto P (-1 , -2).
b) Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y pasa por el punto P (-4 , 7).
c) Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{4}$ y pasa por el punto P$\left(\frac{1}{3} , \frac{3}{5} \right)$.

21) Una recta que pasa por P(3 , -2) , forma un ángulo de 60º con el semieje positivo del eje x . Encontrar su ecuación y graficar.

22)

a) Indicar cuáles de las siguientes rectas cortan al eje de las ordenadas en el mismo punto que $y = 3x + 2$
b) ¿Cuáles son paralelas a ella?.

i. $y = 3x - \frac{1}{3}$ *ii.* $y = 8\left(x + \frac{1}{4}\right)$
iii. $y = 3(x + 2)$ *iv.* $y = 7x + 2$
v. $y = 4x + 2$ *vi.* $y = 3x + 4$

23) Un kilogramo de papas cuesta \$0,65. Escribir y representar la función que define el valor de las papas en función de los kilogramos comprados.

24) Cada una de las siguientes tablas corresponde a una función. Para cada una de ellas:

a) Completar la tabla de tal forma que la función represente una función de proporcionalidad directa.

b) Escribir una fórmula que relacione los elementos de la primera fila con los de la segunda.

c) Representar los datos de la tabla en un sistema de coordenadas cartesianas.

Tiempo de marcha (en horas)	1	2	3			
Espacio recorrido (en km.)	80			400	800	50

Capital invertido (en pesos)	1000	500	250		
Interés percibido (en pesos)	100			12.5	75

Masa del aluminio (en gramos)	2,7				13,5
Volumen del aluminio (en cm^3)	1	2	3		

25) El estudio de cierta tabla permite establecer que:

$f(3) = 7$ $\qquad f(8) = 16{,}2$ $\qquad f(11) = 26$

¿Representa dicha tabla una función de proporcionalidad directa?. Justificar.

26) La siguiente tabla representa la relación existente entre el valor de los lados y el perímetro de tres cuadrados:

Lado (*l*)	**Perímetro (*p*)**
1	4
2	8
3	12

Responder:

a) ¿Se trata de una función de proporcionalidad directa?.

b) ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad?.

c) Expresar la función mediante una fórmula y representar gráficamente.

27) Para distintos trozos de un mismo material, el peso es directamente proporcional al volumen.

a) Completar los cuadros y las fórmulas para cada uno de los materiales indicados.

Madera de pino:

Volumen (en dm^3)	1	5	10	20
Peso (en kg.)			9	

P = ... V

Corcho sintético:

Volumen (en dm^3)	1	5	10	20
Peso (en kg.)				

P = 0,2.V

Granito:

Volumen (en dm^3)		5	10	
Peso (en kg.)	60		30	3

P = ... V

b) Representar en un mismo gráfico las tres situaciones.

c) Observar en la gráfica:

i. ¿Qué pesa más?; ¿3,5 decímetros cúbicos de madera o 3,5 decímetros cúbicos de granito?.

ii. Si se tienen 7 kg. de corcho sintético y 7 kg. de madera, ¿cuál es el material que más volumen tiene?.

d) Si se dispone de un recipiente cuya capacidad es de 6 decímetros cúbicos, ¿4 kg. de qué material

(corcho - madera - granito) molido, puede guardar en dicho recipiente?.

En cada caso la constante de proporcionalidad representa la densidad del material (peso por unidad de volumen); gráficamente, la misma, es la pendiente de la recta.

28) Una empresa de transportes establece sus tarifas de este modo: $ 0,10 por km recorrido y $ 5 por paquete o maleta. ¿Cuánto costará trasladarse con una maleta a 100 km?. ¿Y a 200 km?.

a) Completar la siguiente tabla considerando que se lleva una maleta:

Distancia (en km.)	100	150	200	250	300
Precio (en pesos)					

b) Expresar por fórmula la función que relaciona número de km y precio del traslado.

c) Analizar la misma situación pero trasladándose con dos maletas.

d) Representar en un mismo gráfico las dos situaciones (viajar con una maleta - viajar con dos maletas). Interpretar.

e) Proponer cómo viajar de tal forma que la función que relacione número de km. y precio del traslado sea de proporcionalidad.

Incluir en la gráfica anterior su representación e indicar su fórmula.

Otras empresas de la competencia tienen las siguientes tarifas :

	Precio por km	**Precio por maleta**	**Ecuación sin maletas**	**Ecuación con una maleta**
Empresa A	0,15	2,5	$y = 0,15\,x$	$y = 0,15\,x + 2,5$
Empresa B	0,06	7		

Representar gráficamente; decidir qué empresa contratar para gastar lo menos posible.

4.3. Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección analizaremos los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y sus soluciones, en forma algebraica y geométrica.

La ecuación

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

tiene entre otras las siguientes soluciones:

$$x = 0 \quad , \quad y = \frac{8}{3}$$

$$x = 1 \quad , \quad y = \frac{10}{3}$$

$$x = -1 \quad , \quad y = 2$$

....

Entonces los puntos de coordenadas

$$\left(0, \frac{8}{3}\right); \left(1, \frac{10}{3}\right); (-1, 2); ...$$

pertenecen a la recta dada.

Hemos visto en la unidad anterior, que una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, pues esa ecuación se verifica para infinitas parejas de números.

Es decir, la resolución algebraica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale geométricamente a estudiar las posiciones relativas de las dos rectas en el plano.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es representado geométricamente por dos rectas.

Resolverlo equivale a hallar los puntos del plano comunes a las dos rectas.

Ejemplos:

a) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 8x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Resolvemos aplicando el método de sustitución:

De la ecuación

$$3x + y - 5 = 0$$

se tiene que

$$y = -3x + 5$$

sustituyendo y en la ecuación

$$8x - 3y - 2 = 0$$

se obtiene

$$8x - 3(-3x + 5) - 2 = 0$$

despejando x, resulta

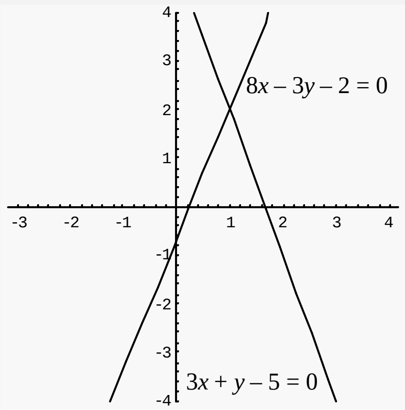
$$x = 1$$

Reemplazando el valor de x obtenido, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, resulta

$$y = 2.$$

El sistema tiene una ***única solución*** $x = 1$, $y = 2$

Gráficamente, vemos que las dos rectas se cortan en un único punto *P* de coordenadas (1 , 2)



En este caso diremos que las rectas son ***secantes***.

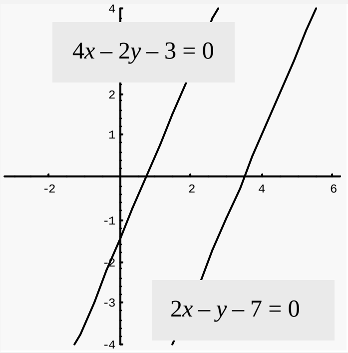
$$\frac{3}{8} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-5}{-2}$$

Observemos que...

en el sistema $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 8x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

no hay ninguna relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales.

Gráficamente, vemos que las rectas no tienen ningún punto en común.



b) $\begin{cases} 4x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

Resolvemos aplicando el método de sustitución:

De la ecuación

$$2\,x - y - 7 = 0$$

se tiene que

$$y = 2\,x - 7;$$

sustituyendo y en la ecuación

$$4x - 2\,y - 3 = 0,$$

se obtiene

$$4\,x - 2\,.\,(\,2\,x - 7\,) - 3 = 0,$$

resolviendo resulta

$$0\,x = -11.$$

Observemos que...

no existe ningún número real x

que multiplicado por 0 de -11.

En este caso diremos que las rectas son ***paralelas no coincidentes***..

En consecuencia, el sistema ***no tiene solución***, pues no existen valores reales de x e y que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones.

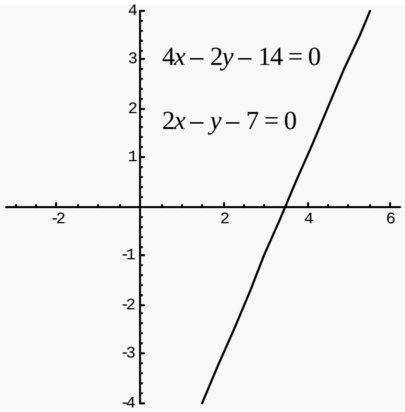
$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{-3}{-7}$$

Observemos que...

en el sistema $\begin{cases} 4x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales, pero que dicha relación **no** se conserva entre los términos independientes.

c) $\begin{cases} 4x - 2y - 14 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$



Resolvemos aplicando el método de sustitución:

De la ecuación

$$2x - y - 7 = 0$$

se tiene que

$$y = 2x - 7;$$

sustituyendo y en la ecuación

$$4x - 2y - 14 = 0,$$

se obtiene

$$4x - 2 \,.\, (2x - 7) - 14 = 0,$$

resolviendo resulta

$$0x = 0$$

Observemos que...

cualquier número real x multiplicado por 0 da 0.
Es decir, existen infinitos valores de x e y
que verifican ambas ecuaciones.

La representación gráfica del sistema son dos rectas ***paralelas coincidentes***.

En el sistema las dos ecuaciones son ***proporcionales***, pues la primera ecuación es el doble de la segunda, por lo que el sistema se reduce a un sola ecuación y, tiene por lo tanto ***infinitas soluciones.***

$$\frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{-14}{-7}$$

Observemos que...

en el sistema $\begin{cases} 4x - 2y - 14 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

existe una relación de proporcionalidad entre los coeficientes de los términos lineales y los términos independientes.

Podemos conocer la posición de dos rectas r y s (cuyas ecuaciones están dadas en forma explícita o en forma implícita), sin necesidad de resolver el sistema que forman, teniendo en cuenta el siguiente cuadro:

	Forma explícita	**Forma implícita**
	r: $y = mx + n$ s: $y = m'x + n'$	r: $ax + by + c = 0$ s: $a'x + b'y + c' = 0$
r y s secantes	$m \neq m'$	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
r y s paralelas no coincidentes	$m = m'$; $n \neq n'$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, $c \neq 0$, $c' \neq 0$
r y s paralelas coincidentes	$m = m'$; $n = n'$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, $c \neq 0$, $c' \neq 0$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

29) La recta $3\,x + n\,y - 7 = 0$ pasa por el punto A(3 , 2) y es paralela a la recta $m\,x + 2\,y = 13$. Calcular m y n.

30) Determinar el valor de a para que las rectas r y s sean paralelas, siendo r: $x + 3\,y = 6$ y s: $a\,x - y = 5$.

31) La recta $2\,x - a\,y = 7$ pasa por el punto A(2 , 1) y es paralela a la recta $b\,x - y + 2 = 0$. Calcular a y b.

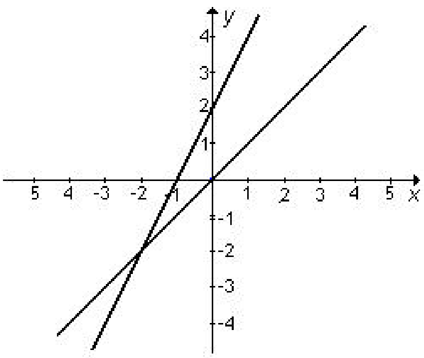
32) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-3 , 1) y es paralela a la recta determinada por los puntos $P_1(0 , -2)$ y $P_2(5 , 2)$.

33) La recta $y + 2 = m\,(x + 3)$ pasa por el punto de intersección de las rectas $2\,x + 3\,y + 5 = 0$ y $5\,x - 2\,y - 16 = 0$. Calcular m.

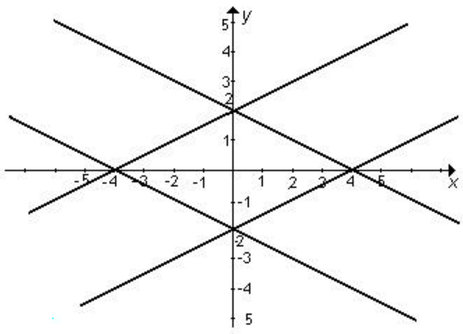
34) Hallar la ecuación de la recta de pendiente - 4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas: $y = -\,2\,x + 8$ e $y = \dfrac{3}{2}\,x + \dfrac{9}{2}$.

35) Expresar los sistemas de dos ecuaciones lineales que se pueden determinar con las siguientes gráficas, luego indicar la solución de los mismos.

a)



b)



36) Hallar los valores de a para que (4000 , 3000) sea la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = 0{,}75x \\ y = ax + 500 \end{cases}$$

37) Dado el sistema $\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2q + 4y = 0 \end{cases}$ indicar los valores de p y q para que el sistema tenga:

a) única solución. b) ninguna solución. c) infinitas soluciones

38)

a) Agregar al sistema una ecuación para que la solución sea $x = 2$; $y = -3$

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

b) La ecuación agregada en el inciso anterior ¿es la única que cumple con la condición pedida?. Justificar.

39) Dadas las siguientes ecuaciones de rectas: $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ y = ax + b \end{cases}$. Decir para qué valores de a y de b las rectas tienen:
b) un punto en común, b) ningún punto en común, c) todos sus puntos en común.

40) Un ciclista que circula por una senda rectilínea a una velocidad constante de 4 m/s, pasa, en un cierto momento, por un puesto de control. Otro ciclista que circula por la misma senda, pero en sentido contrario, a una velocidad constante de 3m/s, pasa por el mismo puesto 20 segundos después.

a) Hallar las ecuaciones de los movimientos de ambos ciclistas.
b) Determinar el instante en que se encuentran y a qué distancia del puesto lo hacen.
c) Verificar gráficamente los resultados obtenidos.

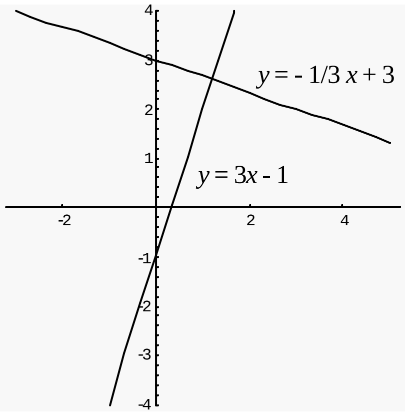
41) Una empresa tiene un ingreso mensual de $30 por unidad vendida de cierto producto. Por otra parte, el costo fijo mensual es de $4800 y el costo variable de $22 por unidad. ¿Cuántas unidades es necesario vender por mes para que el ingreso sea igual al costo total, y cuál es ese valor?.

42) Hace cinco años, la población de una pequeña comunidad indígena era de 500 personas. Como consecuencia de su integración con otras comunidades, la población ascendió a 4000 personas. Suponiendo que la población crece en forma lineal:

a) expresar mediante una fórmula la cantidad de habitantes en función del tiempo;
b) indicar aproximadamente cuándo llegará la población a 10000 habitantes;
c) realizar un gráfico cartesiano de la situación.

4.4. Rectas perpendiculares

Existe una relación importante que permite hallar la pendiente m' de una recta conociendo la pendiente m de otra recta perpendicular a ella.



***Ejemplo*:**

En la gráfica se observa que las rectas

$$y = 3x - 1 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{3}x + 3$$

son perpendiculares.

Las pendientes de dichas rectas son:

$$m = 3 \quad \text{y} \quad m' = -\frac{1}{3} \ .$$

Rectas perpendiculares

Diremos que dos rectas de pendientes m y m' que verifiquen la relación $m' = -\frac{1}{m}$, son rectas *perpendiculares.*

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

43) Dada la recta $y = \frac{1}{5}x + 3$, hallar las funciones cuyas representaciones son las rectas:

a) paralela a la misma y de ordenada al origen igual a la de la recta $2x + y = 8$.
b) perpendicular a la misma y de ordenada al origen -2.
c) paralela a la misma y que pase por el punto Q (1, ½).
d) perpendicular a la misma y que pase por el origen.
e) perpendicular a la misma y de proporcionalidad.

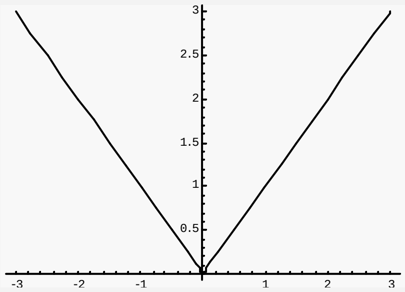
44) Las rectas de ecuaciones $a\,x - y = 4$; $x + b = y$ son perpendiculares y cortan al eje de las abscisas en dos puntos distantes cinco unidades. Hallar a y b.

45) Dada la recta de ecuación $a\,x + b\,y = 1$, determinar a y b sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta de ecuación $2x + 4y = 11$ y que pasa por el punto $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

4.5. Función valor absoluto

Ya hemos visto en la primera unidad cómo calcular el valor absoluto de un número real. Como cada número real posee un solo valor absoluto, podemos pensar esta relación como una función.
Para graficar la función valor absoluto haremos uso de las rectas que hemos estado estudiando hasta ahora.

Gráficamente.



Si consideramos la función donde a cada número real le corresponde su valor absoluto, es decir

$f\,(2) = 2,$

$f\,(-2) = 2,$

$f\,(0) = 0\ \ ,$

etc.

observamos que los puntos que determinan su gráfica son

- puntos que pertenecen a la recta $y = x$ para los $x \geq 0$ y
- puntos que pertenecen a la recta $y = -x$ para los $x < 0$.

Función Valor Absoluto

Definimos la *función valor absoluto* mediante la fórmula:

$$f(x) = ú\ xú = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Para pensar...

El dominio de esta función es R. ¿Cuál es el conjunto imagen?