



El puente de Occidente, erigido por el ingeniero antioqueño Jose Maria Villa, no solamente es un trabajo original en su concepción sino que es orgullo de la ingeniería del país y es considerado monumento nacional por ley de la República.

Presentación

En el capítulo 3 presentamos la relación existente entre la integral definida y las llamadas sumas de Riemann. Vimos además la relación que establece el segundo teorema fundamental del cálculo entre la integral definida y la primitiva o antiderivada de la función y de la cual se dijo la importancia que tendría en las aplicaciones de la integral definida.

En este capítulo veremos cómo todos estos conceptos pueden usarse para el cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de sólidos, longitudes de arcos de curvas planas, momentos y centros de masa, etc. Todas estas medidas son límites de las sumas de Riemann para cada caso, transformadas luego en integrales y solucionadas usando el segundo teorema fundamental del cálculo.

Capítulo 4

Aplicaciones de la integral definida

Contenido breve

Módulo 18

Área de una región plana

Módulo 19

Volúmenes de sólidos por secciones transversales

Módulo 20

Volúmenes de sólidos de revolución

Módulo 21

Longitud de arco de una curva plana y área de superficie de revolución

Módulo 22

Momentos y centros de masa

Módulo 23

Los teoremas de Pappus

Módulo 24

Trabajo mecánico

Módulo 25

Presión de líquidos

Ejercicios

Módulos 18 al 25

Módulo 18

Área de una región plana

Contenidos del módulo

18.1 Área entre curvas

18.2 Ejemplos resueltos de áreas entre curvas

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones geométricas. En particular, determinar el área bajo una función positiva y definida en un intervalo $[a, b]$.
2. Generalizar el objetivo anterior en determinar el área entre dos o más curvas en el plano cartesiano.

Preguntas básicas

1. El valor medio de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ viene dado por

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \text{ Calcule el valor medio de } f(x) = x^2 \text{ en el intervalo } [0, 3] \text{ y}$$

pruebe que el área comprendida entre $y = M$ e $y = f(x)$ es igual al área comprendida entre $y = M$ y el eje x .

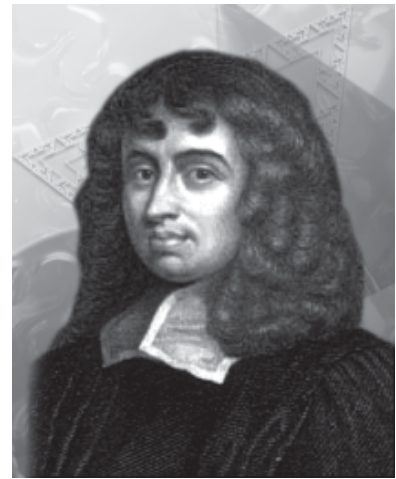
2. Sea R la región entre las curvas $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x+1}$ y a la derecha de la recta $x = 1$. ¿El área de R es finita o infinita? Si es finita, calcule su valor.
3. Sea R la región entre las curvas $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ y a la derecha de la recta $x = 1$. ¿El área de R es finita o infinita? Si es finita, calcule su valor.

Introducción

En el módulo 13 del capítulo 3 se introdujo la integral definida para calcular el área bajo una curva. En particular, cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ considerábamos una

aproximación para el área A la igualdad $A \approx \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$, y como valor real del área el límite de las sumas de Riemann cuando el número de rectángulos aumentaba

indefinidamente, es decir, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$.



Isaac Barrow

El teólogo y matemático inglés Isaac Barrow nació en Londres en 1630 y murió allí mismo el 4 de mayo de 1677. Barrow es considerado por muchos como uno de los matemáticos más relevantes de su tiempo (sobre todo en geometría), pero históricamente se le ha dado poco mérito al papel que desempeñó en el desarrollo del cálculo a pesar de que los métodos que empleaba eran muy próximos a los que se usan actualmente en esta rama de las matemáticas.

Barrow empezó su formación académica en el colegio Charterhouse de Londres (donde era tan agresivo y combativo que se cuenta que su padre rezaba a Dios para pedirle que si algún día tenía que llevarse a alguno de sus hijos, se llevara a primero a Isaac) y completó su educación en el Trinity College de la Universidad de Cambridge. Fue muy estudioso y sobresalió especialmente en matemáticas. Tras graduarse en 1648 residió unos cuantos años en Cambridge, luego viajó por Francia, Italia e incluso Constantinopla, y tras varias aventuras regresó a Inglaterra en 1659. Fue ordenado al año siguiente, así como nombrado profesor de griego en Cambridge. En 1662 ocupó el cargo de profesor de geometría en el colegio Gresham y un año más tarde fue elegido para ocupar la cátedra Lucasiana en Cambridge. Mientras desempeñaba esta cátedra publicó dos trabajos matemáticos de gran importancia, el primero de ellos en geometría y el segundo en óptica. En 1669 dejó la cátedra en favor de su alumno Isaac Newton, quien fue considerado durante mucho tiempo el único matemático inglés que le ha superado. Durante este tiempo también escribió, entre otras obras, *Exposiciones del credo*, *Decálogo* y *Sacramentos*. El resto de su vida fue muy devota pues se dedicó al estudio de la teología. En 1672 fue director del Trinity

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

College, donde fundó una biblioteca que regentó hasta su muerte, a la temprana edad de 47 años.

Además de los trabajos ya mencionados, escribió importantes tratados en matemáticas: *Lecciones de matemáticas* (que hablan en su mayoría de fundamentos de metafísica para verdades matemáticas), *Elementos de Euclides*, *Datos de Euclides*, *Lecciones de geometría* y *Lecciones de óptica*. De esta última se dice en el prefacio que el propio Newton las revisó y corrigió personalmente, añadiendo ideas propias. Como hombre, Barrow fue en todos los aspectos digno de sus grandes talentos, aunque tuvo una gran vena excéntrica. Ha sido descrito como «bajo de estatura, flaco y de pálido aspecto», despreocupado en sus vestimentas y empedernido fumador. Fueron notorias su fuerza y valentía, y se cuenta que una vez cuando viajaba hacia el Este logró esquivar el ataque de unos piratas gracias a su destreza. Su predisposición e ingenio le hicieron favorito del rey Carlos II, quien indujo a sus cortesanos a respetarle aunque no le mostraran aprecio.

En este módulo extenderemos la noción para dos funciones f y g continuas y tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$. Para ello se considerarán rectángulos de área

$[f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$, los cuales, al efectuar las sumas de Riemann y el paso al límite, proporcionan el valor real del área entre las curvas como la igualdad

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

18.1 Área entre curvas

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$.

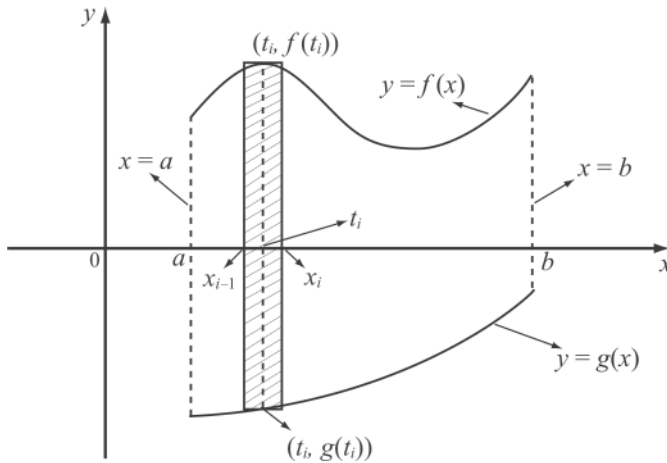


Figura 18.1

Nos proponemos encontrar el valor del área A de la región R comprendida por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Realicemos una partición P de $[a, b]$ así: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. El intervalo i -ésimo será $[x_{i-1}, x_i]$, el cual tiene como longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Tomemos un punto t_i en $[x_{i-1}, x_i]$ y un elemento rectangular que tenga como altura $h = f(t_i) - g(t_i)$ y ancho Δx_i .

Su área será entonces:

$$\Delta A_i = [f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i.$$

Por tanto, una buena aproximación para el área A de la región R será:

$$\sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i.$$

Si $\|P\|$ tiende a cero, la sumatoria anterior converge a un valor A que llamaremos el área de la región R . Esto es:

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \quad (1)$$



Vea la animación *Área entre curvas* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*



Vea el módulo 18 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

La existencia del límite anterior está garantizada por ser f y g continuas en $[a, b]$.

Observaciones

- i. En la definición anterior, si $g(x) = 0$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ será el valor del área de la región comprendida por la función $f(x) \geq 0$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x .
- ii. Si se quiere calcular el área encerrada por el eje x , las rectas $x = a$, $x = b$ y una curva $g(x)$ situada por debajo del eje x basta hacer $f(x) = 0$ en la fórmula (1) y se obtiene:

$$A = -\int_a^b g(x) dx. \tag{2}$$

Nótese que como $g(x) < 0$, entonces $\int_b^a g(x) dx < 0$ (propiedad *iii*, teorema 1 del módulo 14) y, en consecuencia, $A > 0$.

18.2 Ejemplos resueltos de áreas entre curvas

Ejemplo 1

Encuentre el área de la región limitada por la recta $y = x + 2$, la parábola $y = x^2 - 4x$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución

La figura 18.2 ilustra la región definida.

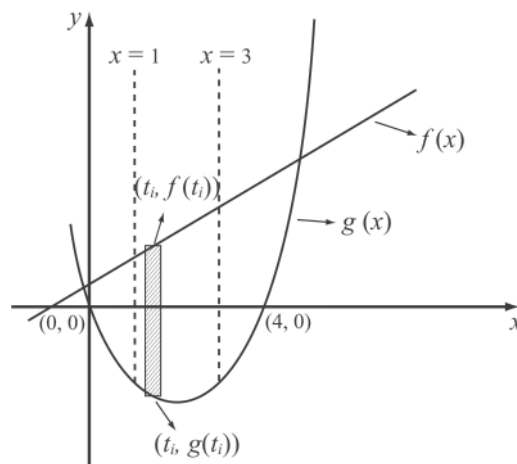


Figura 18.2

Tomemos el rectángulo i -ésimo de altura $[f(t_i) - g(t_i)]$ y ancho Δx_i .

Un valor aproximado del área A pedida estará dado por

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i.$$

Luego

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$$

y por tanto

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_1^3 [x + 2 - (x^2 - 4x)] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_1^3 = \frac{46}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre el área de la región comprendida entre la curva $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje x .

Solución

La región se ilustra en la figura 18.3. Puesto que la función es positiva en el subintervalo $[-2, 0]$ y negativa en $[0, 3]$, es necesario dividir la región en dos subregiones R_1 y R_2 .

Llamaremos A_1 al área de R_1 y A_2 al área de R_2 . Entonces,

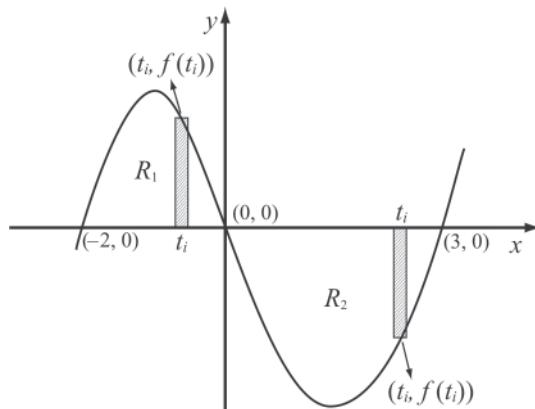


Figura 18.3

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \int_{-2}^0 f(x) dx \\
 &= \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right] = \frac{16}{3},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(t_i)] \Delta x_i = - \int_0^3 f(x) dx \\
 &= - \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\
 &= -\frac{81}{4} + 9 + 27 = \frac{63}{4}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$.

Ejemplo 3

Encuentre el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2 - 6x$, las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje x .

Solución

La figura 18.4 corresponde a la gráfica de una parábola que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$ y tiene vértice en $(3, -9)$.

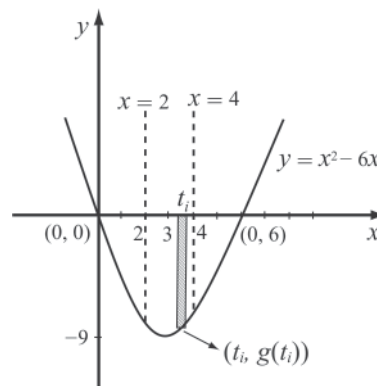


Figura 18.4

En el intervalo $[2, 4]$, $g(x) = x^2 - 6x < 0$. Luego, para encontrar el valor del área de la región señalada, se procede de acuerdo con la observación *ii*, y por tanto:

$$A = -\int_2^4 (x^2 - 6x) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_2^4 = \frac{52}{3}.$$

Ejemplo 4

Encuentre el área de la región comprendida entre las parábolas $y = -x^2$ e $y = x^2 - 6x$.

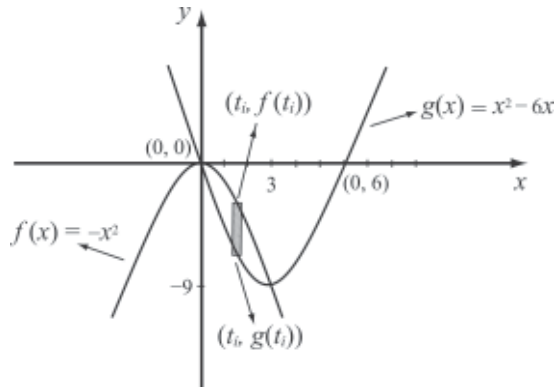


Figura 18.5

Solución

La región se ilustra en la figura 18.5. Para encontrar los puntos de intersección de las dos curvas, resolvemos simultáneamente las ecuaciones que las representan; esto es, $y = -x^2$ e $y = x^2 - 6x$, cuyas soluciones son $(0, 0)$ y $(3, -9)$.

El área de un elemento rectangular como el que se muestra en la figura está dada por

$$\Delta A_i = [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i,$$

y el área de la región por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^3 [-x^2 - (x^2 - 6x)] dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9. \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encuentre el área de la región comprendida entre la parábola $y^2 = x - 3$ y la recta $y = x - 5$.

Solución

La región se ilustra en la figura 18.6. La gráfica corresponde a una parábola con vértice en $(3,0)$, abierta hacia la derecha, y la recta que pasa por los puntos $(5,0)$ y $(0,-5)$.

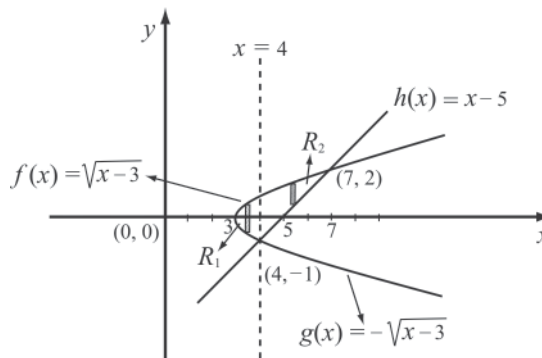


Figura 18.6

Para encontrar los puntos de intersección de las curvas se resuelven simultáneamente las ecuaciones $y^2 = x-3$ e $y = x-5$ cuyas soluciones son $(4,-1)$ y $(7,2)$.

Si se analizan los rectángulos verticales de la figura 18.6, encontramos lo siguiente: los situados en la región R_1 (a la izquierda de la recta $x = 4$) están limitados por las dos ramas de la parábola; en cambio, en la región R_2 (a la derecha de la recta $x = 4$), están limitados por la rama superior de la parábola y la recta.

Cuando esta situación se presenta es necesario dividir la región en subregiones y resolver un problema de área para cada una de ellas. En nuestro caso, sea $f(x) = \sqrt{x-3}$ la rama superior de la parábola, y $g(x) = -\sqrt{x-3}$ la rama inferior. En la región R_1 el rectángulo i -ésimo (figura 18.7) tendrá un área ΔA_i dada por $\Delta A_i = [f(t_i) - g_1(t_i)] \Delta x_i$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_3^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_3^4 [\sqrt{x-3} - (-\sqrt{x-3})] dx \\
 &= 2 \int_3^4 \sqrt{x-3} dx = \left[\frac{4}{3} (x-3)^{3/2} \right]_3^4 = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

En la región R_2 el rectángulo i -ésimo (figura 18.8) tendrá un área

$$\Delta A_i = [f(t_i) - h(t_i)] \Delta x_i \text{ con } f(x) = \sqrt{x-3} \text{ y } h(x) = x-5.$$

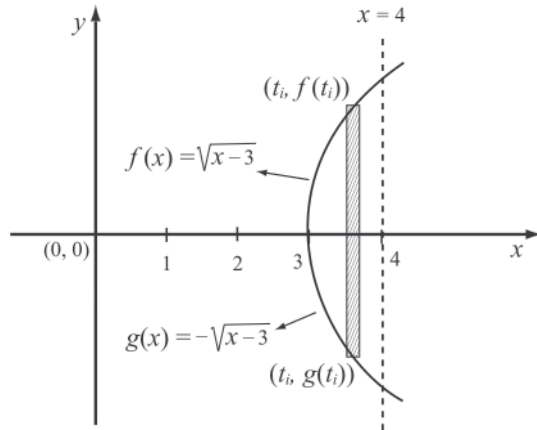


Figura 18.7

Luego

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_4^7 [\sqrt{x-3} - (x-5)] dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-3)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_4^7 \\ &= \left[\frac{2}{3}(7-3)^{3/2} - \frac{49}{2} + 35 \right] - \left[\frac{2}{3}(4-3)^{3/2} - \frac{16}{2} + 20 \right] = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

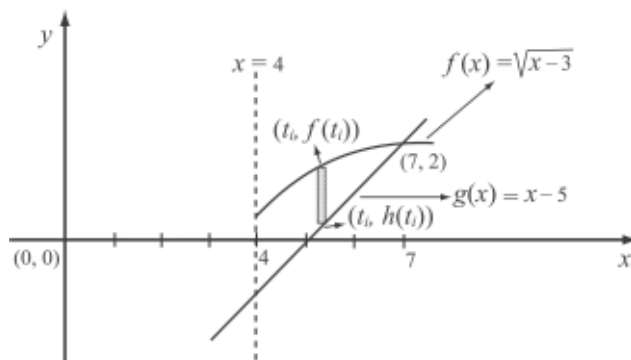


Figura 18.8

El valor del área pedida es por tanto $A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}$.

Ejemplo 6

Resuelva el ejemplo anterior utilizando elementos horizontales de área.

Solución

En la figura 18.9 se presenta la región cuya área se quiere calcular. Para resolver un problema de área por elementos horizontales, se deben conocer las ecuaciones de las curvas que limitan la región, en la forma $x = f(y)$, esto es, la x como variable dependiente y la y como independiente.

En nuestro caso tenemos:

$$x = f(y) = y + 5 \quad \text{y} \quad x = g(y) = y^2 + 3.$$

En la figura se observa que cualquier elemento horizontal de área está siempre limitado por la recta y la parábola; por tanto, no es necesario subdividir la región.

El área del i -ésimo elemento (figura 18.9) será:

$$\Delta A_i = [f(t_i) - g(t_i)] \Delta y_i = [(t_i + 5) - (t_i^2 + 3)] \Delta y_i$$

Luego el área será:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [(t_i + 5) - (t_i^2 + 3)] \Delta y_i = \int_{-1}^2 [(y + 5) - (y^2 + 3)] dy \\ &= \left[\left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

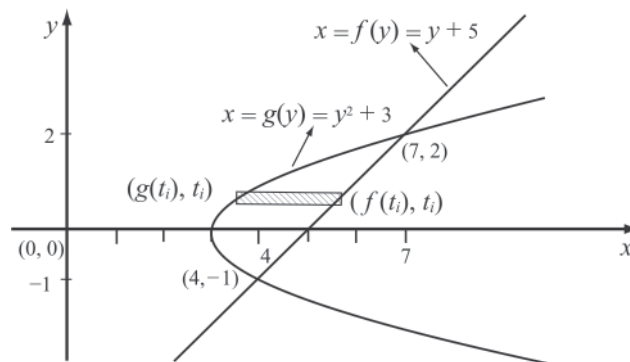


Figura 18.9

Observaciones

Un procedimiento práctico para calcular la medida del área de una región plana determinada se tiene desarrollando los siguientes pasos:

- i. Graficar las funciones hallando los puntos de intersección y determinando la región cuya área se quiere calcular.

- ii. Se debe tener en cuenta que cualquier elemento rectangular esté limitado siempre por el mismo par de curvas. Si esto no se cumple, se divide la región en subregiones apropiadas.
- iii. Determinar los límites de integración correspondientes a la región o subregiones y evaluar las integrales resultantes.

En lo sucesivo, en muchas aplicaciones adoptaremos, para simplificar, el siguiente método informal. Tomaremos:

dA en lugar de ΔA_i .

dx o dy en lugar de Δx_i o Δy_i .

Ejemplo 7

Encuentre el área limitada por las curvas $y = 2^{-x}$, $y = e^{x+1}$, el eje x y la recta $x = 1$.

Solución

Puesto que

$$2^{-x} = e^{-x \ln 2} \text{ y } x+1 > -x \ln 2 \text{ cuando } x \geq 0,$$

entonces por ser la función exponencial de base e creciente,

$$e^{x+1} > e^{-x \ln 2} \Leftrightarrow e^{x+1} > 2^{-x} \text{ cuando } x \geq 0 \text{ (figura 18.10).}$$

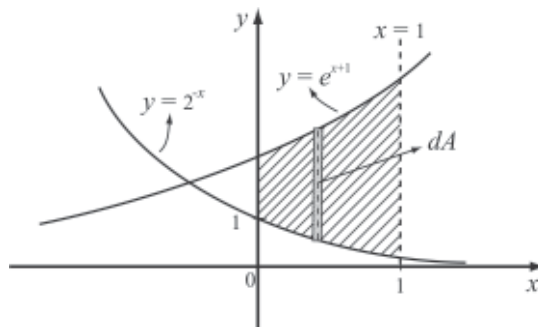


Figura 18.10

El área del elemento diferencial que aparece en la figura viene dado por:

$$\begin{aligned} dA &= (y_1 - y_2) dx = (e^{x+1} - 2^{-x}) dx \Rightarrow A = \int_0^1 (e^{x+1} - 2^{-x}) dx \\ &= \left[e^{x+1} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^1 = e(e-1) - \frac{1}{\ln 4}. \end{aligned}$$

En el módulo 14 del texto *Elementos básicos de cálculo diferencial* las preguntas básicas estaban encaminadas a establecer una primera analogía entre las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas. Si aún no ha dado la respuesta a ellas, aquí está la solución. Las funciones $x = \cosh t$ y $y = \sinh t$ se identifican con los puntos (x, y) de la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ (figura 18.11).

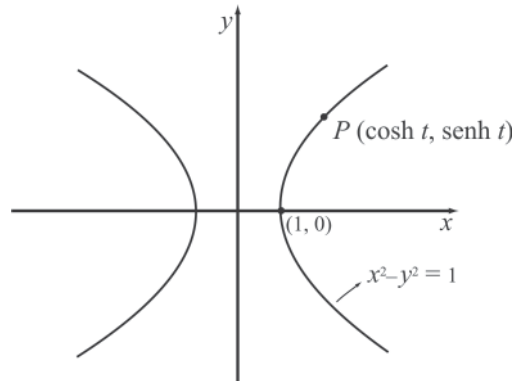


Figura 18.11

Otra analogía importante que nos proponemos demostrar es la que establece que la variable t en ambos casos está relacionada con el área A por la fórmula $t = 2A$.

Ejemplo 8

Demuestre que el área sombreada R de la figura 18.12a viene dada por $R = \frac{t}{2}$.

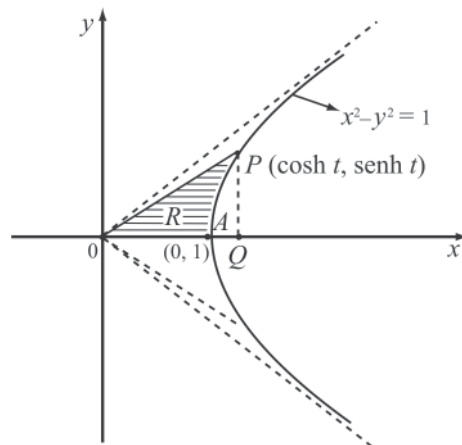


Figura 18.12

Solución

De acuerdo con la figura 18.12 se tiene:

$$R_{\text{sombreada}} = A_{\triangle OPQ} - A_{\text{sector } APQ}$$

Pero,

$$A_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t, \text{ y } A_{\text{sector } APQ} = \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$$

De esta forma,

$$R_{\text{sombreada}} = \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx.$$

La integral $\int \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx$ se resuelve haciendo la sustitución $x = \sec \theta$ y $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$, y en la cual después de simplificar se obtiene:

$$\int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \right]_1^{\cosh t}.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} R_{\text{sombreada}} &= \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t - \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \right]_1^{\cosh t} \\ &= \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t - \left[\frac{\cosh t}{2} \sqrt{\cosh^2 t - 1} - \frac{1}{2} \ln |\cosh t + \sqrt{\cosh^2 t - 1}| - 0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t - \frac{1}{2} \sinh t \cdot \cosh t + \frac{1}{2} \ln |\cosh t + \sinh t| = \frac{1}{2} \ln |e^t| \\ &= \frac{1}{2} \ln e^t = \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

En las últimas igualdades se han utilizado las identidades con funciones hiperbólicas presentadas en el teorema 4 del módulo 14 del texto *Elementos básicos de cálculo diferencial*.

Ejemplo 9

Usando integración, demuestre que el área de un sector circular de radio a y ángulo central α ($0 < \alpha \leq 2\pi$) viene dada por

$$A = \frac{1}{2} a^2 \alpha.$$

Solución

En la figura 18.13 hemos indicado el sector circular determinado por la porción del círculo de radio a , $x^2 + y^2 = a^2$ y la recta $y = (\tan \alpha)x$ que pasa por el origen formando un ángulo α con el eje x .

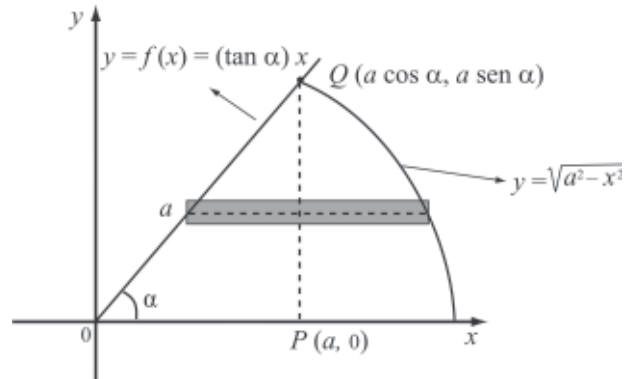


Figura 18.13

En primer lugar, las coordenadas (x, y) del punto Q vienen dadas por

$$x = a \cos \alpha,$$

$$y = a \operatorname{sen} \alpha.$$

Ahora

$$dA = [x_C - x_R] dy \tag{1}$$

Donde

x_R : es el x en términos de y , de la recta .

Esto es,

$$x_R = (\cot \alpha) y,$$

x_C : es el x en términos de y , de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

Esto es,

$$x_C = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Sustituyendo en (1) estos dos valores, se tiene:

$$dA = \left[\sqrt{a^2 - y^2} - (\cot \alpha) y \right] dy \Rightarrow A = \int_0^{a \operatorname{sen} \alpha} \left[\sqrt{a^2 - y^2} - (\cot \alpha) y \right] dy.$$

Pero,

$$\int_0^{a \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{a^2}{2} [\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] \quad (\text{verifique haciendo la sustitución } y = a \operatorname{sen} \alpha)$$

También,

$$\begin{aligned} \int_0^{a \operatorname{sen} \alpha} (\cot \alpha) y dy &= (\cot \alpha) \frac{y^2}{2} \Big|_0^{a \operatorname{sen} \alpha} \\ &= \frac{1}{2} (\cot \alpha) \cdot (a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$A = \frac{a^2}{2} [\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] - \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{a^2}{2} \alpha.$$

Esto es,

$$A = \frac{1}{2} a^2 \alpha.$$

Módulo 19

Volúmenes de sólidos por secciones transversales



Francesco Bonaventura Cavalieri

El matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri nació en 1598 en Milán y falleció el 30 de noviembre de 1647 en Bolonia. Cuando aún era muy joven ingresó a la orden jesuita en Milán y luego fue a Pisa a continuar su formación religiosa. Su interés por las matemáticas fue estimulado por los trabajos de Euclides; pocos años después fue discípulo del famoso astrónomo Galileo.

Cavalieri debe su celebridad a su teoría de los «indivisibles», que llegó a ser un factor importante en el desarrollo del cálculo integral. Esta teoría, expuesta en su principal obra *Geometría de los indivisibles* (1635), estudia las magnitudes geométricas como compuestas de un número infinito de elementos, o indivisibles, que son los últimos términos de la descomposición que se puede hacer. La medida de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes se convierte entonces en la suma de la infinidad de indivisibles, o sea que es el principio del cálculo de una integral definida.

Cavalieri fue el primer matemático italiano que apreció en todo su valor los logaritmos y figuró entre los primeros que enseñaron la teoría copernicana de los planetas. Otros trabajos suyos dignos de renombre son el desarrollo dado a la trigonometría esférica, así como el descubrimiento de las fórmulas relativas a los focos de los espejos y de las lentes. También describió la reflexión del telescopio y trabajó sobre muchos otros problemas de movimiento. Uno de sus varios libros sobre astronomía es *Tratado de la ruta planetaria perpetua*, publicado en 1646.

Contenidos del módulo

19.1 Volumen de un sólido con secciones planas paralelas conocidas

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones geométricas. En particular, usar el principio de Cavalieri para determinar el volumen de un sólido que tiene secciones planas de área conocida, usando el método de rebanadas.

Preguntas básicas

1. Sea A un cilindro circular recto de radio a y altura h (figura 1a). Sea B un cilindro circular inclinado de radio a y altura h (figura 1b). ¿Tienen A y B el mismo volumen? Explique su respuesta.

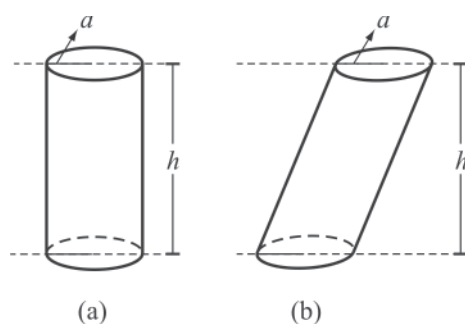


Figura 1

2. ¿Cuál es el volumen de un octante de la región común a dos cilindros circulares rectos de radio 1 y cuyos ejes se intersecan en ángulo recto? (figura 2)

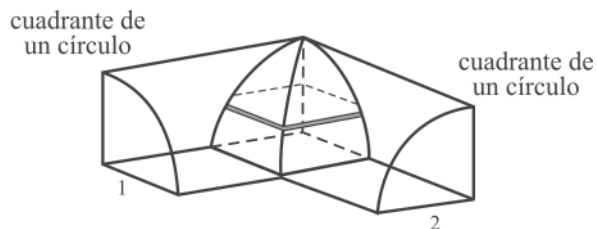


Figura 2

Introducción

En este módulo se definirá el volumen de un sólido cuyas secciones transversales son planos paralelos entre sí.

Existe un método conocido como el principio de Cavalieri para calcular volúmenes de sólidos. Supongamos que tenemos un cuerpo sólido como el de la figura 19.1 y denotemos por $A(x)$ el área de su sección transversal medida a una distancia x de un plano de referencia. De acuerdo con el principio de Cavalieri, el volumen V del sólido está dado por $V = \int_a^b A(x) dx$, donde a y b son las distancias mínima y máxima a partir del plano de referencia. Estas ideas son las que nos proponemos presentar de manera intuitiva en la primera sección de este módulo.

19.1 Volumen de un sólido con secciones planas paralelas conocidas

En esta sección estudiaremos el cálculo de volúmenes de sólidos para los cuales es posible expresar el área de cualquier sección plana, perpendicular a una recta fija, en términos de la distancia de la sección plana a un punto fijo de dicha recta.

En la figura 19.1 se muestra un sólido cuyas secciones perpendiculares al eje x tiene un área conocida $A(t_i)$ (parte sombreada), en donde $A(t)$ es una función integrable en $[a, b]$, t_i es un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es el espesor del i -ésimo elemento de volumen.

Si reemplazamos cada elemento de volumen por un «cilindro» de base $A(t_i)$ y altura Δx_i , su volumen será $A(t_i) \Delta x_i$ y su suma $\sum_{i=1}^n \Delta v_i$ tendrá un valor aproximado al volumen real V del sólido, aproximación que mejora al disminuir la norma de la partición.

Entonces,

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(t_i) \Delta x_i = \int_a^b A(x) dx.$$

$$\Delta v_i = A(t_i) \Delta x_i$$

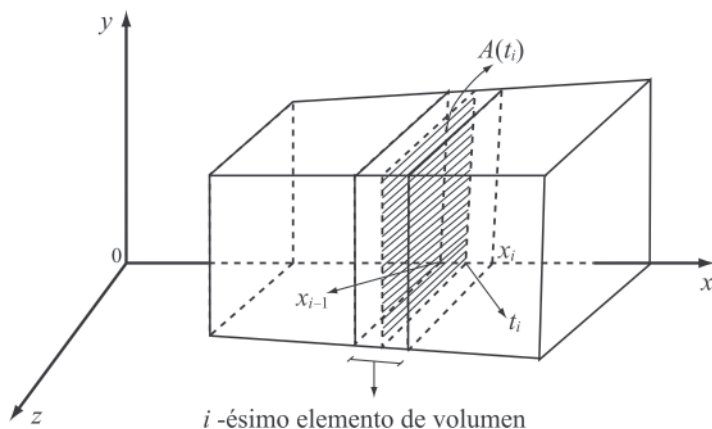


Figura 19.1

Observación

El volumen de un sólido de revolución que se presentará en el próximo módulo se puede obtener como caso particular de la fórmula anterior si $A(x)$ se cambia por el área de un círculo o de un anillo circular, según el caso.



Vea el módulo 19 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*



Vea la animación *Volúmenes de sólidos por secciones planas* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Ejemplo 1

Calcule el volumen de la cuña determinada por un cilindro recto de radio r , un plano perpendicular al eje del cilindro y otro intersectando al primero con un ángulo α a lo largo de un diámetro de la sección plana circular (figura 19.2).

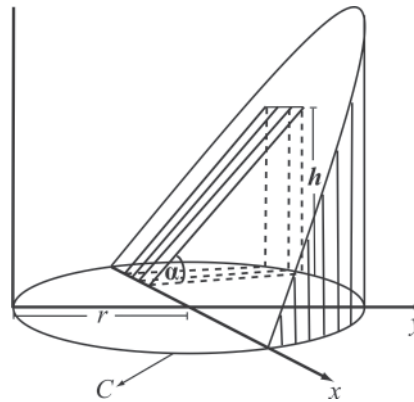


Figura 19.2

Solución

Tomemos el plano xy perpendicular al eje del cilindro y el origen O sobre este eje. La ecuación de la circunferencia C , que resulta de intersectar el cilindro con el plano perpendicular a su eje, tiene como ecuación

Toda sección plana del sólido perpendicular al eje x y formando un ángulo α en la abscisa x es un triángulo rectángulo de base $y_i = \sqrt{r^2 - t_i^2}$ y altura $h_i = y_i \tan \alpha = \sqrt{r^2 - t_i^2} \tan \alpha$.

Por tanto su área será:

$$\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - t_i^2} \cdot \sqrt{r^2 - t_i^2} \tan \alpha$$

y en consecuencia su volumen estará dado por:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - t_i^2} \cdot \sqrt{r^2 - t_i^2} \tan \alpha \right) \Delta x_i \\ &= \frac{1}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \tan \alpha \, dx = \left(\frac{1}{2} \tan \alpha \right) \cdot 2 \int_0^r (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \tan \alpha \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{2}{3} r^3 \tan \alpha. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Halle el volumen de una pirámide recta de altura h y una base cuadrada de lado a .

Solución

Tomemos el plano xy perpendicular al plano de la base y pasando por el eje principal de la pirámide (figura 19.3).

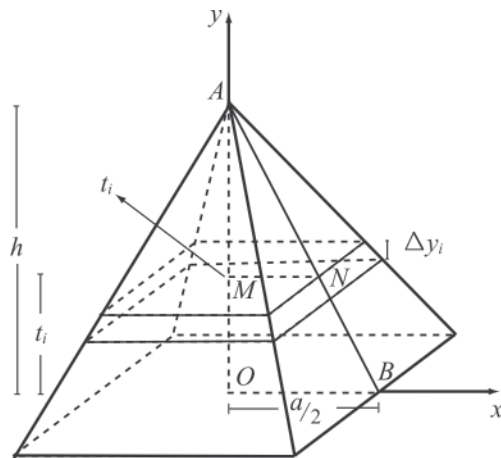


Figura 19.3

Toda sección plana perpendicular al eje y es un cuadrado. Para calcular su lado, consideramos los triángulos semejantes AMN y AOB . Tenemos entonces,

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} \tag{1}$$

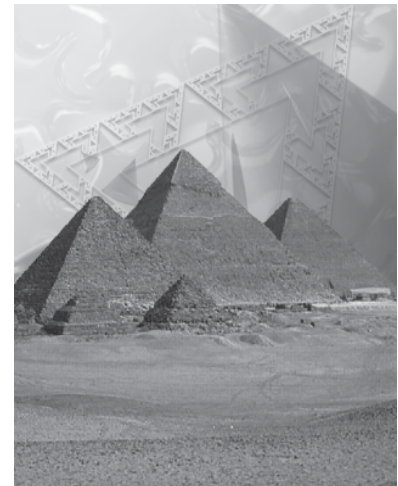
Pero $\overline{OB} = \frac{a}{2}$, $\overline{AO} = h$ y $\overline{AM} = \overline{AO} - \overline{MO} = h - t_i$.

Reemplazando en (1) y despejando \overline{MN} obtenemos: $\overline{MN} = \frac{(h-t_i)a}{2h}$.

Por tanto el lado del cuadrado que estamos buscando será $2\overline{MN} = \frac{(h-t_i)a}{h}$ y el

volumen se escribirá así:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(h-t_i)a}{h} \right]^2 \cdot \Delta y_i = \int_0^h \left[\frac{(h-y)a}{h} \right]^2 dy \\ &= \left(\frac{a^2}{h^2} \right) \int_0^h (h^2 - 2hy + y^2) dy = \frac{1}{3} a^2 h. \end{aligned}$$



Pirámides de Gizeh

Una pirámide es un poliedro limitado por una base que puede ser un polígono cualquiera (es decir, un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.), y cuyas caras, tantas en número como los lados de aquél, son triángulos que se juntan en un solo punto o vértice. Las pirámides de Gizeh, cerca de El Cairo (Egipto), tienen base cuadrada y fueron construidas para albergar la tumba de los faraones Keops, Kefrén y Mikerinos.

Módulo 20

Volúmenes de sólidos de revolución

Contenidos del módulo

- 20.1 Método de las arandelas
- 20.2 Método de la corteza (cascarones) cilíndrica

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones geométricas. En particular, usarla para determinar el volumen de un sólido de revolución.
2. Diferenciar entre el método del disco (secciones perpendiculares al eje de giro) y el método de la corteza cilíndrica (secciones paralelas al eje de giro) para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Preguntas básicas

1. ¿Es posible que una región plana con área infinita genere un sólido con volumen finito? Explique su respuesta.
2. En una esfera sólida de radio b se perfora un hoyo redondo de radio a ($a < b$) pasando por el centro. Determine el volumen que queda del sólido.

Introducción

Vamos a extender el procedimiento visto en el módulo 18 para el cálculo del área al cálculo del volumen de un sólido de revolución. El sólido de revolución se obtiene al rotar una región del plano alrededor de una recta de ese mismo plano, pero situada de tal manera que la región cae enteramente en uno de los dos semiplanos en que dicha recta divide al plano en donde está situada (figura 1).

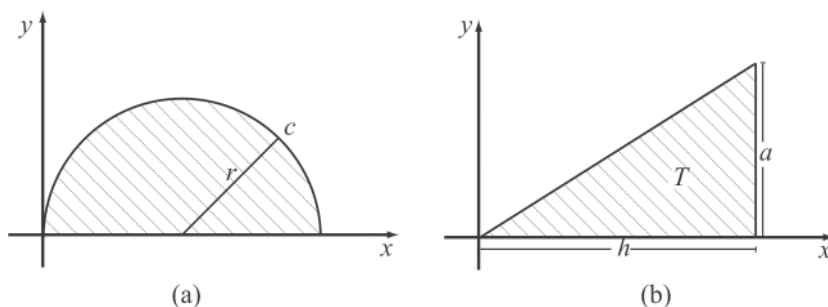
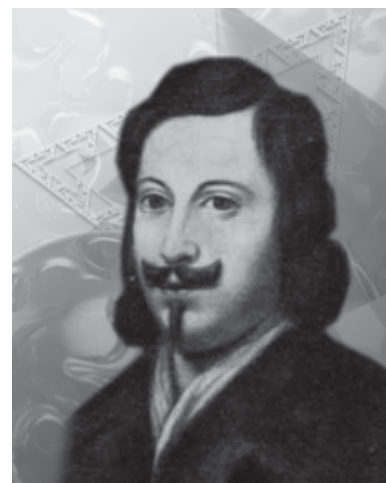


Figura 1



Evangelista Torricelli

El físico y matemático italiano Evangelista Torricelli nació el 15 de octubre de 1608 en Faenza y falleció en Florencia el 25 de octubre de 1647. Sus padres notaron el talento que tenía, pero como no disponían de recursos para educarlo lo enviaron a estudiar con su tío, un monje camaldulense, a un colegio jesuita en Faenza. Su tío dispuso que estudiara bajo la tutela del monje Benedetto Castelli, que enseñaba en la Universidad de Sapienza, en Roma, y de quien se convirtió en ayudante hasta 1632.

El 11 de septiembre de 1632 Castelli escribió a Galileo una carta en la que informaba sobre los notables progresos científicos de Torricelli. Galileo le contestó a Castelli, pero como éste no estaba en Roma, el mismo Torricelli aprovechó para contestar la carta de Galileo y explicarle directamente sobre sus trabajos matemáticos. A partir de entonces se hizo amigo del gran astrónomo y más tarde se convirtió en su asistente y discípulo. Torricelli permaneció viviendo al lado de su maestro, cuidándolo hasta el día de su muerte en enero de 1642. Un año más tarde lo sucedió en el cargo de matemático de la corte del Gran Duque Fernando II de Toscana.

Para 1641 Torricelli había completado gran parte de su *Opera geometrica* (Obra geométrica), trabajo que iba a publicar en tres partes, la segunda de las cuales, *De motu gravium*, es un tratado sobre el movimiento parabólico de los proyectiles.

Torricelli fue la primera persona en crear un vacío sustentable. Su nombre se asocia a la invención del barómetro de mercurio en 1644 para la medición de la presión atmosférica. Este experimento, además de la importancia de sus aplicaciones prácticas, permitía demostrar la inconsistencia de las afirmaciones de los que aún seguían las teorías aristotélicas sobre la imposibilidad

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

de la existencia de vacío, ya que por encima de la columna de mercurio de su barómetro se producía dicho vacío (una unidad de medida, el torr, utilizada en física para indicar la presión barométrica cuando se trabaja en condiciones cercanas al vacío, se denomina así en su honor). En *De motu gravium* también probó que la velocidad de salida de un líquido a través de un pequeño orificio en la pared delgada de un recipiente es proporcional a la raíz cuadrada de la altura entre el orificio y la base del recipiente, enunciado que ahora es conocido como «teorema de Torricelli». Algunos lo consideran el fundador de la hidrodinámica. En esa publicación estudió el movimiento de un proyectil, desarrolló las ideas de Galileo sobre la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado horizontalmente y dio una teoría sobre los proyectiles disparados en cualquier ángulo. Por otra parte, construyó los mejores anteojos de la época. También construyó telescopios y microscopios. Aparentemente aprendió estas técnicas mientras vivió con Galileo. Torricelli ganó mucho dinero por sus habilidades en la construcción de lentes durante la última parte de su vida en Florencia y recibió muchos regalos del Gran Duque Fernando II.

Otra contribución de Torricelli fue la resolución del problema de Fermat, que dice: «Dados tres puntos en un plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias a los tres dados sea la menor posible» (dicho punto es conocido como el centro *isogónico*).

Toricelli también determinó la longitud del arco de una cicloide (curva plana descrita por un punto dado de una circunferencia cuando ésta rueda por una línea recta). El tema de la cicloide surgió de una disputa con el matemático Roberval. En una carta fechada en octubre de 1643, Torricelli le informó a Roberval sobre sus puntos de vista y resultados sobre el centro de gravedad de la parábola, la superficie de la cicloide y su historia, el sólido de revolución generado por una cónica y un sólido hiperbólico. No hay duda de que ambos matemáticos llegaron a descubrimientos similares sobre la cicloide pero ninguno influyó sobre las ideas del otro.

En 1647 Torricelli contrajo fiebre tifoidea y murió a los 39 años. Como hombre de ciencia había abierto el camino para conocer el océano de aire o atmósfera en que vivimos.

Por ejemplo, si rotamos el semicírculo C de la figura 1 alrededor del eje de las x , el sólido resultante es una esfera de radio r , y si giramos también alrededor del eje x el triángulo T , el sólido resultante será un cono de altura h y base circular de radio a .

Para definir el volumen V de un sólido de revolución empezamos por aceptar como medida del volumen de un disco o cilindro circular recto al producto $\pi r^2 h$, en donde r es la medida del radio y h la de la altura.

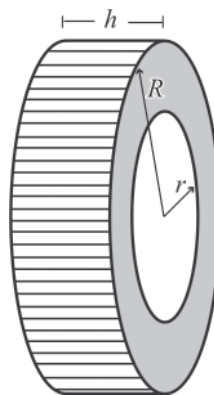


Figura 2

Si el cilindro es hueco (se tiene una arandela), R y r son los radios externo e interno, respectivamente, y h es la medida de la altura (figura 2), aceptaremos como medida del volumen de la arandela el siguiente producto:

$$\delta (R^2 - r^2)h. \quad (1)$$

Estos elementos geométricos son los que usaremos en el desarrollo de los módulos siguientes.

20.1 Método de las arandelas

Supongamos ahora que se va a rotar alrededor del eje x la región B del plano encerrada por las curvas $f(x)$ y $g(x)$, que supondremos continuas en el intervalo $[a, b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 20.1).

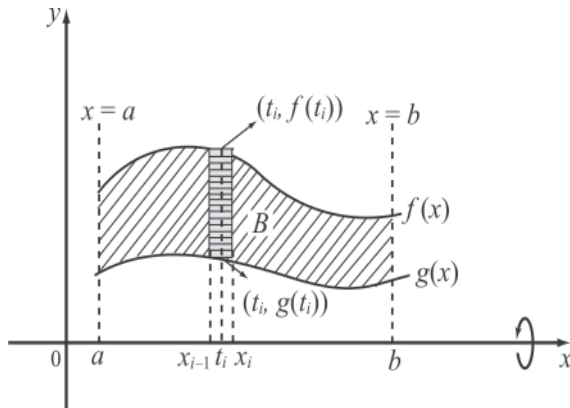


Figura 20.1

El sólido resultante se muestra en la figura 20.2.

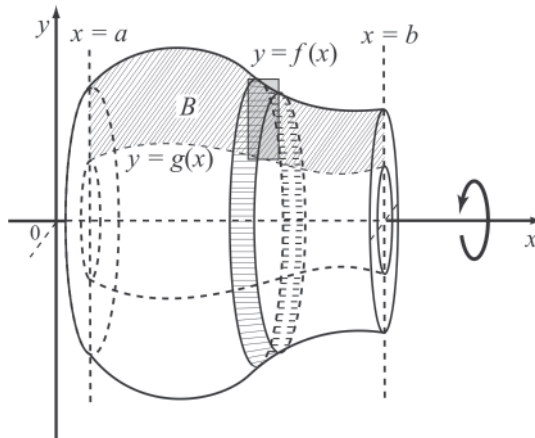


Figura 20.2

Supongamos además que $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$.

Realicemos una partición P de $[a, b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

donde el i -ésimo intervalo tiene longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Vea el módulo 20 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*



Vea la animación *Método de las arandelas para volúmenes* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Escojamos un punto cualquiera t_i de $[x_{i-1}, x_i]$. Al girar la región B alrededor del eje x , el i -ésimo rectángulo forma una arandela o cilindro hueco como el de la figura 2 de la «Introducción» con radio exterior $R = f(t_i)$, con radio interior $r = g(t_i)$, y $h = \Delta x_i$. El volumen Δv_i de este disco, según la fórmula (1) de la «Introducción», está dado por

La suma de los volúmenes de los n discos huecos que resultan será entonces

$$\sum_{i=1}^n \Delta v_i = \sum_{i=1}^n \pi \left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2 \right) \Delta x_i. \quad (2)$$

El volumen V del sólido resultante lo podemos definir como el límite de la suma (2), cuando $\|P\|$ se aproxima a cero.

Este límite existe ya que f^2 y g^2 son continuas en $[a, b]$, al ser producto de funciones continuas en el mismo intervalo.

La fórmula (2) puede utilizarse para encontrar un valor aproximado del volumen, aproximación que mejora a medida que $\|P\|$ se hace más pequeña.

Definición 1

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ o $f(x) \leq g(x) \leq 0$ para todo x de $[a, b]$. Entonces el volumen V del sólido de revolución generado al rotar sobre el eje x la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ estará dado por la expresión:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2 \right) \Delta x_i \\ &= \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Observaciones

- i. Si el eje de rotación no es el eje x , la integral de la fórmula (3) debe modificarse en forma apropiada así: $f(x)$ debe cambiarse por el radio exterior de los discos huecos, $g(x)$ por su radio interior y dx por la diferencial de la variable independiente (ejemplo 3).
- ii. Si la región B que se va a rotar alrededor del eje x está limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 20.3), el radio exterior sigue siendo $f(x)$ pero el interior es $g(x) = 0$.

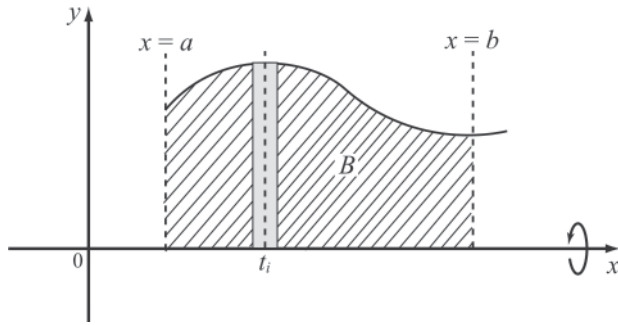


Figura 20.3

Los discos que resultan al girar el i -ésimo rectángulo ya no son huecos y el volumen V total se puede obtener de nuevo a partir de (3) cambiando $g(x)$ por cero.

Luego

$$V = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{4}$$

Ejemplo 1

Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la región comprendida por la parábola $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ (figura 20.4).

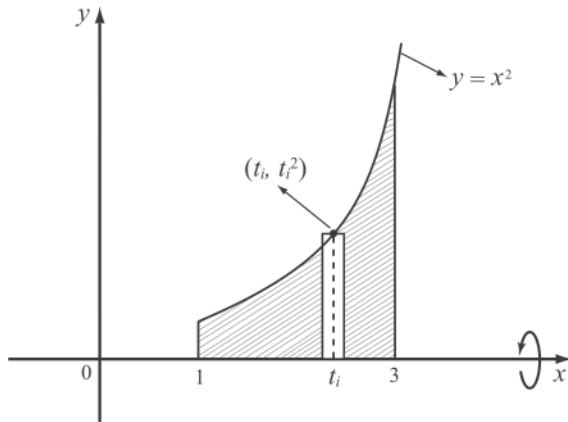


Figura 20.4

Solución

El volumen del disco que resulta al rotar el i -ésimo rectángulo estará dado por

$$\Delta v_i = \pi [t_i^2]^2 \Delta x_i.$$



Vea la animación *La paradoja de la trompeta de Gabriel* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Luego, de (4):

$$V = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi t_i^4 \Delta x_i = \pi \int_1^3 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^3 = \frac{242\pi}{5}.$$

Ejemplo 2

Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar sobre el eje x la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = \frac{x}{2}$, $x = 1$ y $x = 2$ (figuras 20.5 y 20.6).

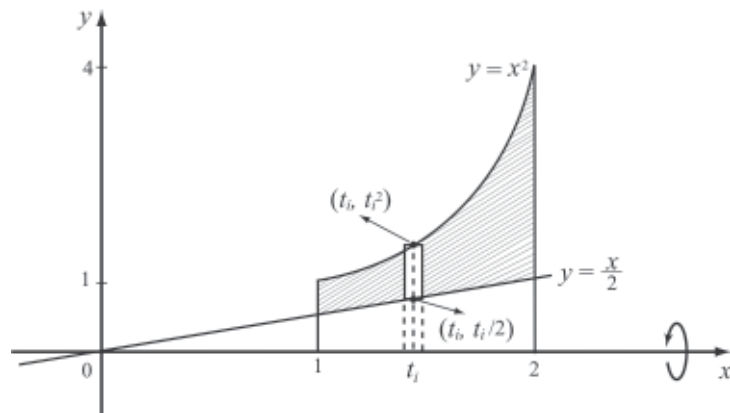


Figura 20.5

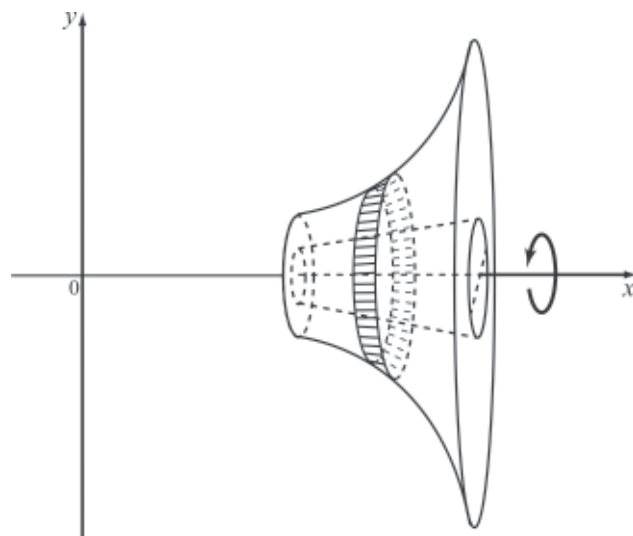


Figura 20.6

Solución

Al rotar el i -ésimo rectángulo resulta un disco hueco con radio exterior t_i^2 , radio interior $\frac{t_i}{2}$, altura Δx_i y volumen . El volumen V del sólido resultante estará dado, según la expresión (3), por

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \left[t_i^4 - \frac{t_i^2}{4} \right] \Delta x_i \\ &= \pi \int_1^2 \left(x^4 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{12} \right]_1^2 \\ &= \frac{31}{5} - \frac{7}{12} = \frac{337}{60}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Halle el volumen del sólido generado al rotar sobre el eje $x = -1$ la región encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 2y$ (figuras 20.7 y 20.8).

$$\Delta v_i = \pi \left[(t_i^2)^2 - \left(\frac{t_i}{2} \right)^2 \right] \Delta x_i$$

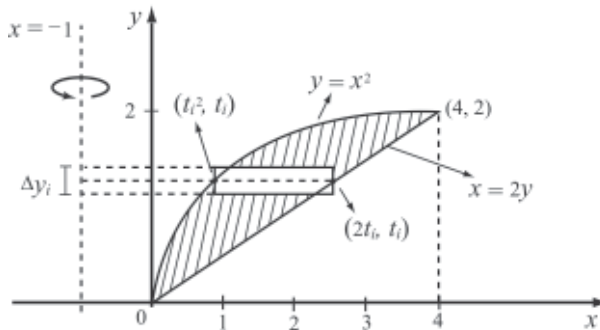


Figura 20.7

Solución

Comencemos por hallar los puntos de intersección entre la parábola y la recta, para lo cual resolvemos simultáneamente $y^2 = x$ y $x = 2y$.

Los puntos de intersección son entonces $(0, 0)$ y $(4, 2)$.

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Al rotar el i -ésimo rectángulo alrededor de la recta $x = -1$, el disco hueco que genera tiene por radio exterior $(2t_i + 1)$, por radio interior $(t_i^2 + 1)$ y por altura Δy_i .

Su volumen será $\pi [(2t_i + 1)^2 - (t_i^2 + 1)^2] \Delta y_i$ y el volumen del sólido de revolución generado estará dado por:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [(2t_i + 1)^2 - (t_i^2 + 1)^2] \Delta y_i \\ &= \pi \int_0^2 [(2y + 1)^2 - (y^2 + 1)^2] dy = \pi \int_0^2 (-y^4 + 2y^2 + 4y) dy \\ &= \pi \left[-\frac{y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{104\pi}{15}. \end{aligned}$$

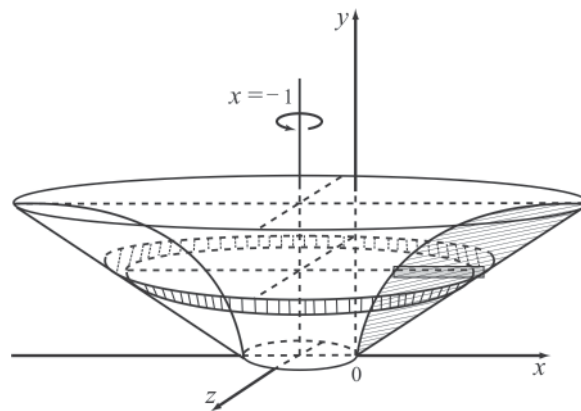


Figura 20.8

Ejemplo 4

Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región del plano limitada por las curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

Solución

En la figura 20.9 aparece sombreada la región que se va a rotar y el elemento rectangular de área apropiado.

Al rotar dicho rectángulo alrededor del eje x se genera un disco cuyo radio exterior es $\cos t_i$ y radio interior $\sin t_i$.

El volumen V del sólido resultante estará dado por :

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [\cos^2 t_i - \sin^2 t_i] \Delta x_i$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}.$$

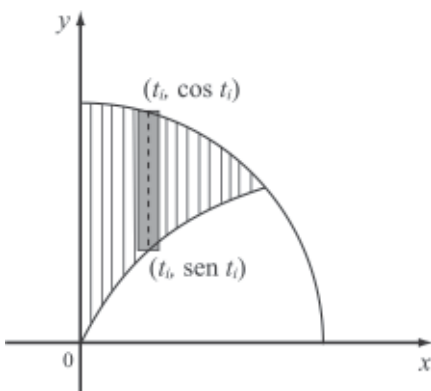


Figura 20.9

Ejemplo 5

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ la función definida en $[1, +\infty)$. Determine si es posible asignar un valor real al volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región comprendida entre la curva, el eje x y la recta $x = 1$ (figura 20.10).

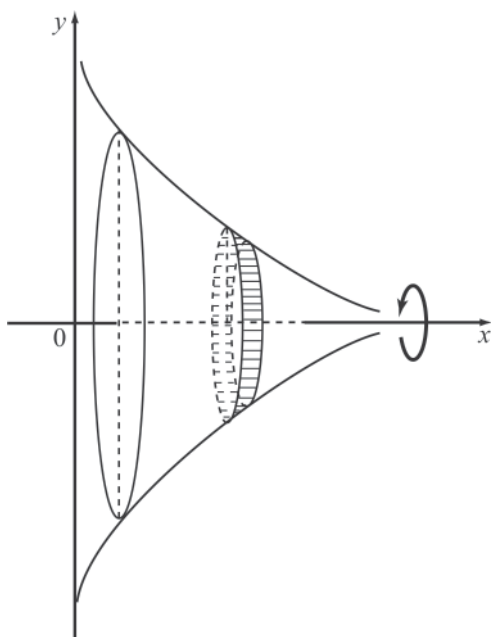


Figura 20.10

La trompeta de Gabriel

La trompeta de Gabriel (también llamada trompeta de Torricelli) es una figura ideada por el físico y matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), que tiene la característica de poseer una superficie infinita pero un volumen finito.



Cuando la curva $y = 1/x$ en $[1, +\infty)$ se hace girar alrededor del eje x (ejemplo 5) se genera un sólido de revolución denominado trompeta de Gabriel, del cual se puede afirmar que:

1. Su volumen V es finito.
2. Su área A es infinita.

Al poner estos resultados en la práctica parecen decir que la trompeta puede llenarse con una cantidad finita de pintura, y que aun así no hay suficiente pintura para cubrir la región que generó el sólido. De allí surge la paradoja.

La trompeta de Gabriel se llama así en alusión al arcángel Gabriel, que según el Nuevo Testamento anunció a María que ella iba a ser la madre de Jesús. La escena de la anunciación ha sido representada por pintores tan famosos como los italianos Fra Angelico, Leonardo da Vinci y Sandro Botticelli, y por el alemán Matthias Grünewald, y en ella se muestra a Gabriel portando un lirio, una flor o la *trompeta* que sonará para anunciar la segunda venida de Cristo. (1Ts 4:16)

Solución

De ser posible asignar un volumen V al sólido resultante, éste debe ser el valor de la integral impropia:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi[f(x)]^2 dx, \text{ siempre y cuando sea convergente.}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \pi[f(x)]^2 dx &= \int_1^{+\infty} \pi \cdot \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \int_1^{\epsilon} \pi \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\epsilon} \\ &= \pi \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{\epsilon} \right] = \pi. \end{aligned}$$

Como la integral impropia converge al real π , se sigue entonces que el volumen V del sólido resultante es $V = \pi$.

20.2 Método de la corteza (cascarones) cilíndrica

Para el cálculo del volumen de un sólido de revolución se tomaron, en la sección anterior, elementos rectangulares de área perpendiculares al eje de revolución, lo cual dio origen a elementos de volumen en forma de anillo circular o disco. En esta sección se tomarán elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución, los cuales al rotar generan un elemento de volumen que llamaremos *corteza cilíndrica* (figura 20.11), que se puede asociar con la parte sólida de un tubo.

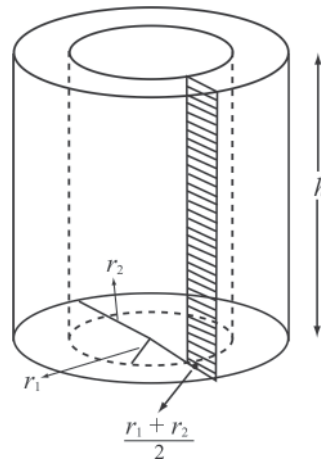
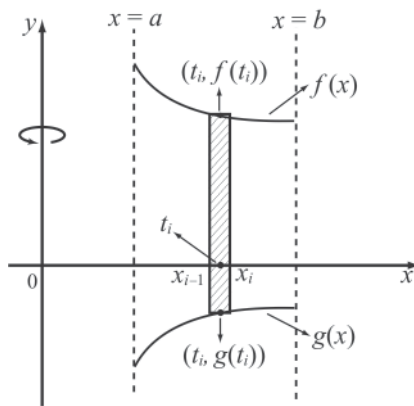


Figura 20.11

A dicha corteza corresponde un radio interior r_1 , un radio externo r_2 y una altura h . Si denotamos por V_c el volumen de la corteza, entonces $V_c = \text{volumen del cilindro externo menos el volumen del cilindro interno, o sea}$

$$(1)$$

Analicemos ahora una forma para calcular por medio de cortezas cilíndricas el volumen del sólido de revolución, generado al rotar alrededor del eje y la región R comprendida por las funciones f y g continuas en $[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, con $x \geq 0$ (figuras 20.12 y 20.13).



$$V_c = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h.$$

Figura 20.12

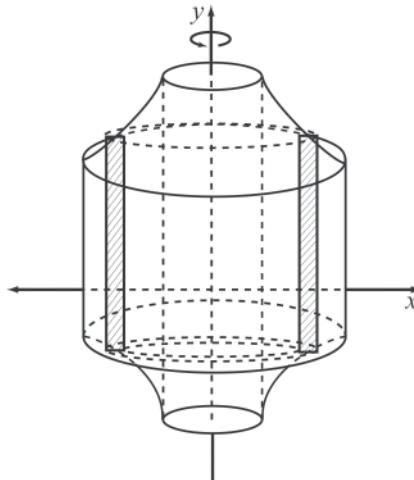


Figura 20.13



Vea la animación *Método de la corteza cilíndrica* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$.

Tomemos los elementos de área paralelos al eje y (figura 20.12). El rectángulo i -ésimo tiene como base Δx_i y como altura

, en donde t_i es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$, o sea $t_i = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}$.

Al rotar este rectángulo alrededor del eje y obtenemos una corteza cilíndrica (figura 20.13), a la cual corresponde un volumen Δv_i .

Puede observarse además que el radio externo de la fórmula (1) es x_i y el radio interno r_i es x_{i-1} , luego

$$\Delta v_i = \pi x_i^2 [f(t_i) - g(t_i)] - \pi x_{i-1}^2 [f(t_i) - g(t_i)]. \quad (2)$$

Factorizando, se tiene que

$$\Delta v_i = \pi [f(t_i) - g(t_i)] (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Como $x_i + x_{i-1} = 2t_i$ y $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, entonces

$$\Delta v_i = 2\pi t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i.$$

Por tanto un valor aproximado del volumen está dado por:

$$\sum_{i=1}^n 2\pi t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i. \quad (3)$$

Puesto que la función $x[f(x) - g(x)]$ es continua en $[a, b]$, entonces para cualquier t_i de $[x_{i-1}, x_i]$, $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$ existe, en particular para los considerados en (3).

Lo anterior nos permite definir el volumen de la siguiente manera:

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Observaciones

i. Si $g(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el volumen está dado por

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

ii. Si se quiere hallar el volumen por cortezas cilíndricas sobre cualquier otro eje de giro, hay que realizar los cambios pertinentes en la fórmula (2) (ejemplos 5 y 6).

Ejemplo 4

Encuentre el volumen generado al rotar alrededor del eje y la región comprendida por la parábola $y = x^2 - 4x$, la recta $y = x + 2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Tome elementos de área paralelos al eje y .

Solución

La figura 20.14 nos muestra la región que genera el sólido y el elemento rectangular de área, y la figura 20.15 muestra el sólido de revolución generado y la corteza correspondiente al elemento rectangular.

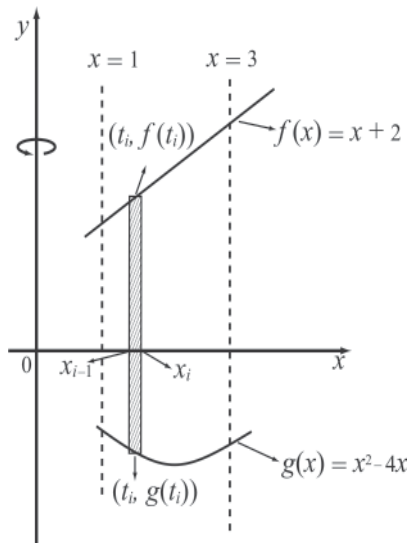


Figura 20.14

El volumen de la corteza cilíndrica generada por el rectángulo i -ésimo está dado por:

$$\Delta v_i = 2\pi t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i = 2\pi t_i [t_i + 2 - (t_i^2 - 4t_i)] \Delta x_i.$$

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Por tanto el volumen del sólido es:

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi t_i [5t_i - t_i^2 + 2] \Delta x_i.$$

Entonces,

$$V = 2\pi \int_1^3 x(5x - x^2 + 2) dx = 2\pi \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{188}{3} \pi.$$

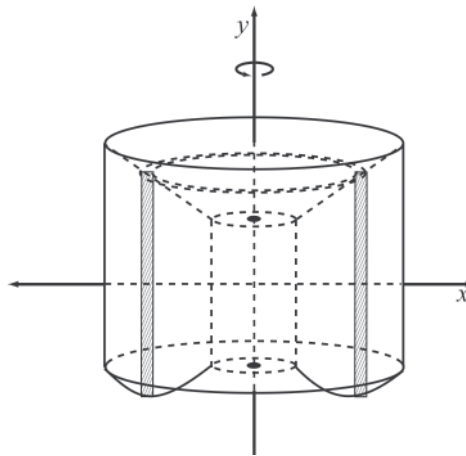


Figura 20.15

Ejemplo 5

La región acotada por la recta $y = x$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ es rotada alrededor de la recta $x = -2$. Tomando elementos rectangulares paralelos al eje y , encuentre el volumen del sólido generado.

Solución

La figura 20.16 indica la región que genera al sólido y el elemento rectangular de área, y la figura 20.17 muestra el sólido de revolución y la corteza cilíndrica correspondiente al elemento rectangular.

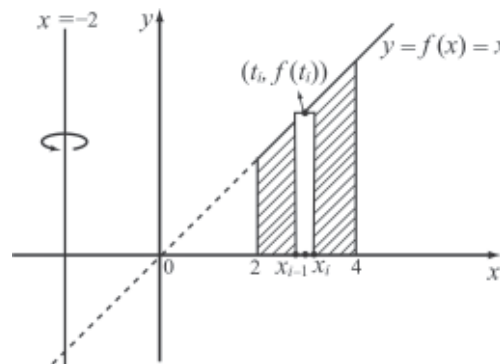


Figura 20.16

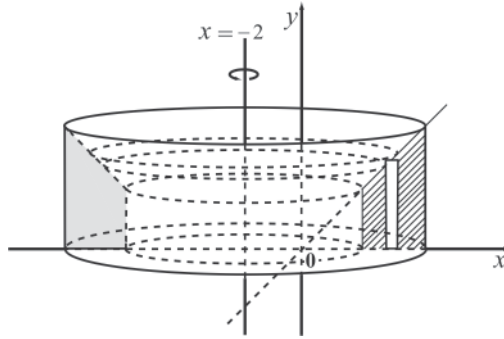


Figura 20.17

El volumen de la corteza cilíndrica correspondiente al rectángulo i -ésimo está dado por:

$$\Delta v_i = 2\pi r_i f(t_i) \Delta x_i, \text{ puesto que } g(x) = 0,$$

y como $r_i = 2 + t_i$, entonces

$$\Delta v_i = 2\pi(2 + t_i) f(t_i) \Delta x_i.$$

Luego

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi[2 + t_i] f(t_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi[2 + t_i] t_i \Delta x_i \\ &= 2\pi \int_2^4 (2x + x^2) dx = 2\pi \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{184}{3} \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 6

La región comprendida por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y $x = 3$ gira alrededor del eje x . Encuentre el volumen del sólido generado.

- Tomando el i -ésimo elemento de área paralelo al eje x (método de la corteza).
- Tomando el i -ésimo elemento de área perpendicular al eje x (método del disco).

Solución

- La figura 20.18 ilustra la situación cuando se toma el elemento i -ésimo de área paralelo al eje x .

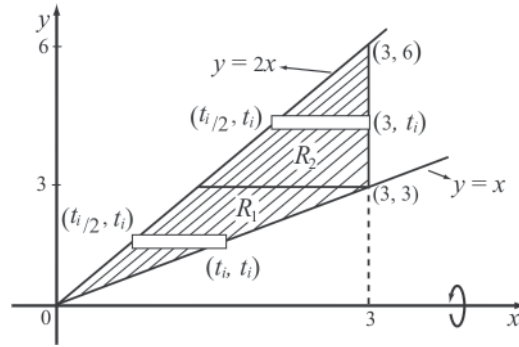


Figura 20.18

En la figura 20.18 se observan dos elementos rectangulares limitados a derecha e izquierda por funciones diferentes. Por tanto, es necesario dividir la región que se va a rotar en dos regiones R_1 y R_2 . La primera, comprendida por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y $y = 3$, y la otra, comprendida por las rectas $y = 2x$, $y = 3$ y $x = 3$.

Para cada caso se toma un elemento rectangular paralelo al eje x , que al rotarlo alrededor de éste genera una corteza cilíndrica.

El volumen correspondiente a la corteza cilíndrica generada por el elemento de área de la región R_1 (figura 20.19) está dado por:

$$\Delta v_i = 2\pi t_i h_i \cdot \Delta y_i, \text{ donde } h_i = t_i - \frac{t_i}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} V_1 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi t_i \left(t_i - \frac{t_i}{2} \right) \Delta y_i \\ &= \int_0^3 2\pi y \left(y - \frac{y}{2} \right) dy = \left. \frac{\pi y^3}{3} \right|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$

El volumen correspondiente a la corteza cilíndrica generada por el elemento de área de la región R_2 (figura 20.19) está dado por:

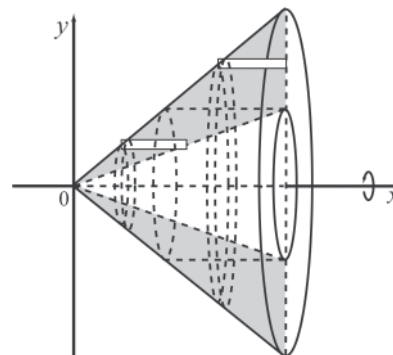


Figura 20.19

$$\Delta v_i = 2\pi t_i h_2 \Delta y_i, \quad \text{donde } h_2 = 3 - \frac{t_i}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} V_2 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi t_i \left(3 - \frac{t_i}{2}\right) \Delta y_i \\ &= \int_3^6 2\pi y \left(3 - \frac{y}{2}\right) dy = 2\pi \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) \Big|_3^6 = 18\pi. \end{aligned}$$

Por tanto el volumen total generado por las rectas dadas es igual a

$$V = V_1 + V_2 = 27\pi.$$

Calculemos ahora el volumen tomando un elemento de área perpendicular al eje x (figura 20.20). Para este caso se utiliza el método del disco.

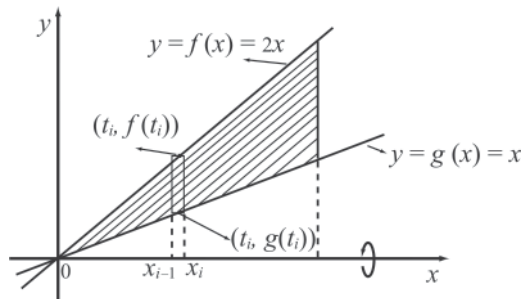


Figura 20.20

El volumen del disco generado por el elemento de área esta dado por:

$$\Delta v_i = \pi \left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2 \right) \Delta x_i.$$

Luego

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \left([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2 \right) \Delta x_i \\ &= \int_0^3 \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx \\ &= \int_0^3 \pi (4x^2 - x^2) dx = \pi x^3 \Big|_0^3 = 27\pi. \end{aligned}$$

Módulo 21

Longitud de arco de una curva plana y área de superficie de revolución

Contenidos del módulo

- 21.1 Longitud de arco de una curva plana
- 21.2 Cálculo de la longitud de los cables en el puente de Occidente
- 21.3 Área de superficie de revolución
 - 21.3.1 Área de superficie alrededor del eje x
 - 21.3.2 Área de superficie alrededor del eje y

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones geométricas. En particular, usarla para determinar la longitud de arcos y el área de superficies de revolución o áreas laterales.

Preguntas básicas

1. Determine una curva que pase por el punto $(0, 1)$ y cuya integral que define la

longitud de arco viene dada por $s = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} \cdot dy$.

¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

2. Determine el área lateral (superficial) de una esfera de radio a .

Introducción

Intuitivamente la longitud de un arco de curva plana es la «distancia» recorrida por un móvil desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$ siguiendo la trayectoria de la curva $y = f(x)$.

Cuando los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ están unidos por un segmento de recta, la fórmula de la distancia entre dos puntos nos permite conocer la longitud del segmento o la distancia recorrida por el móvil desde A hasta B , pero si los puntos A y B están sobre una curva, dicha fórmula no es suficiente para determinar la longitud y sin el cálculo no sabríamos a ciencia cierta cuál es la longitud de un arco de curva en general. Para determinarla utilizaremos el concepto de distancia entre dos puntos, lo que nos permitirá definir y calcular dicha longitud como una integral definida.



Christiaan Huygens

Christiaan Huygens vivió desde el año 1629 hasta el año 1695. Muchos historiadores lo consideran como el más célebre matemático geómetra de Europa tras la muerte de Descartes. Entre las actividades científicas a las cuales orientó su vocación como investigador también se encuentra la biología, al margen de ciencias relacionadas con la matemática, como son la física y la astronomía.

Huygens nació en La Haya, Holanda, y murió en París. Su padre era un académico y diplomático de renombre que cuenta a su haber el hecho de haber descubierto a Rembrandt. Se puede afirmar que Huygens creció y se educó en el seno de un ambiente familiar acomodado económicamente, en el cual tuvo la suerte de relacionarse con importantes científicos y pensadores de la época. Pasó los años más fecundos de su vida en París, invitado por Luis XIV.

Trabajó con Antoni van Leeuwenhoek en los diseños de los primeros microscopios, realizó algunas de las primeras observaciones de las células reproductoras humanas y propuso la primera tesis sobre el germen como causa de las enfermedades, 200 años antes de que ello se hiciera popular. En 1658 logró construir el reloj de péndulo (algo que Galileo había intentado sin éxito), dotando así a la ciencia de un verdadero cronómetro. Desde ese momento quedaron en completa obsolescencia y desuso las clepsidras y relojes de arena de herencia babilónica que no había sido posible reemplazar por instrumento alguno antes del acierto del gran genio holandés.

Huygens encontró un nuevo método para pulir las lentes, con lo que obtuvo una imagen más nítida que le permitió descubrir el mayor satélite de Saturno, Titán, y dar la primera descripción precisa de los anillos de este planeta. También estudió las estrellas

de la nebulosa de Orión y las características de la superficie de Marte, que lo llevaron a concluir la rotación de este planeta sobre su eje. También inventó un ocular de telescopio que lleva su nombre.

En 1673, en París, publicó la obra *Horologium oscillatorium*, en la que no solamente desarrolló varias teorías sobre la fuerza centrífuga en los movimientos circulares que ayudaron al físico inglés Isaac Newton a formular las leyes de la gravedad, sino que describió una solución al problema del péndulo compuesto, para el cual calculó la longitud del péndulo simple equivalente. En la misma publicación incluyó también una fórmula para calcular el periodo de oscilación de un péndulo simple y explicó sus leyes de la fuerza centrífuga para movimiento uniforme en un círculo. De regreso en Holanda construyó algunas lentes de grandes longitudes focales e inventó el ocular acromático para telescopios. Poco después de regresar de una visita a Inglaterra, donde se encontró con Newton, publicó su tratado sobre la teoría ondulatoria de la luz. Para él, la luz era un movimiento vibratorio en el éter, que se difundía y producía la sensación de luz al tropezar con el ojo. Con base en su teoría pudo deducir las leyes de la reflexión y la refracción y explicar el fenómeno de la doble refracción. Pero la propuesta que Huygens describe en este trabajo cayó en el olvido, aplastada por la imagen y prestigio de Isaac Newton.

21.1 Longitud de arco de una curva plana

Para calcular la longitud del arco de curva que une dos puntos A y B del plano cartesiano subdividimos la curva en muchas partes y unimos los puntos de división por segmentos de recta (figura 21.1). Este método fue utilizado por Arquímedes (287-212 a.C.) para aproximar el perímetro de una circunferencia. A continuación describiremos el procedimiento para una curva plana.

Consideremos una función continua en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

A cada x_i de la partición corresponde un P_i sobre la curva de coordenadas $(x_i, f(x_i))$. Si unimos todo punto P_i con su correspondiente P_{i-1} mediante un segmento de recta obtenemos una poligonal denotada por $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ cuya longitud viene dada por

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|, \tag{1}$$

donde

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

es la longitud de cada uno de los segmentos de recta que forman la poligonal.

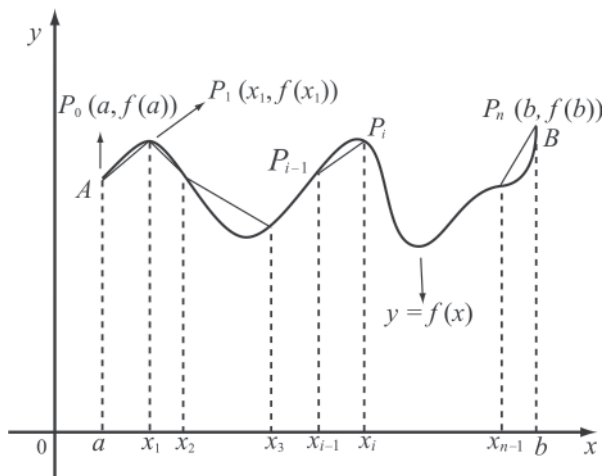


Figura 21.1

Ahora, si la norma de la partición es suficientemente pequeña, la suma en (1) es una buena «aproximación» a lo que esperamos sea el valor asociado a la longitud del arco. Podemos entonces definir la longitud del arco así:

Definición 1

Si existe un L con la propiedad «para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| - L \right| < \epsilon \text{ siempre que } \|P\| < \delta, \text{ para toda partición } P \text{ sobre } [a,b],$$

a dicho L se le llama *longitud* de arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto P_0 al punto P_n

y se denota por $L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$.

Cuando dicho límite existe, se dice que la curva es *rectificable*. Además, si $f(x)$ tiene derivada continua, es decir, $f'(x)$ es continua, se dice que la curva es *suave*.

Procedemos ahora a encontrar una fórmula que nos permita calcular la longitud de arco de una curva suave.

Tomemos un elemento de arco entre los puntos $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $P_i(x_i, y_i)$ (figura 21.2).

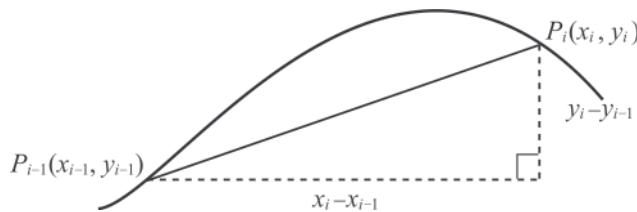


Figura 21.2

La longitud de la cuerda $\overline{P_{i-1}P_i}$ es $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$, y como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, como f es continua y diferenciable en $[a,b]$, lo es en particular en $[x_{i-1}, x_i]$, y entonces, de acuerdo con el TVM para derivadas, existe por lo menos un $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que:



Vea la animación *Área de superficie de revolución: dibuje-corte-desenrolle* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*



Vea el módulo 21 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

$$f'(t_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + (f'(t_i))^2} \cdot \Delta x_i. \quad (3)$$

Un valor aproximado a la longitud de arco de curva s de $y = f(x)$ desde el punto $P_0(a, f(a))$ al punto $P_n(b, f(b))$ viene dado por:

$$s \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(t_i))^2} \cdot \Delta x_i. \quad (4)$$

Note que la última suma es una suma de Riemann para $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ en $[a, b]$.

La longitud real del arco de curva se obtiene tomando el límite de la suma en (4) cuando $\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, transformando la suma en la integral definida

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx.$$

El razonamiento anterior nos conduce a la siguiente definición.

Definición 2

Sea f una función que tiene derivada continua en $[a, b]$ y que determina una curva suave C del punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$.

Entonces, la longitud s del arco de curva C viene dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx. \quad (5)$$

Observaciones

- i. En el caso de un arco de curva suave determinado por la ecuación $x = g(y)$ con y en el intervalo $[c, d]$, entonces un análisis similar nos permite deducir para s :

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy. \quad (6)$$

- ii. Las fórmulas (5) y (6) pueden recordarse fácilmente usando la siguiente forma nemotécnica:

Asociar el diferencial de longitud de arco ds con la hipotenusa del triángulo que aparece en la figura 21.3 y cuyos catetos son dx y dy .

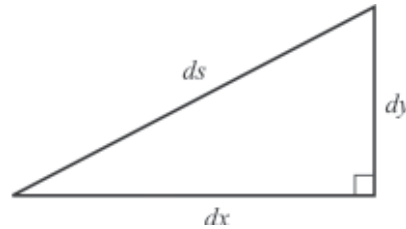


Figura 21.3

Usando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(dx)^2 \quad (7)$$

(sacando factor común $(dx)^2$)

$$= \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)(dy)^2 \quad (8)$$

(sacando factor común $(dy)^2$)

$$\text{De (7): } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

$$\text{De (8): } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \Rightarrow s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

- iii. Las fórmulas (5) y (6) para la longitud de arco, a pesar de ser simples, se pueden calcular en forma exacta sólo para muy pocas funciones. Casi siempre hay que recurrir a métodos numéricos para calcularla en forma aproximada. Por esta razón en los ejercicios propuestos al final del capítulo se pide únicamente escribir, sin calcular, la integral que representa la longitud de arco para la función dada y en el intervalo dado.

Ejemplo 1

Use integración para calcular la longitud de una circunferencia de radio a .

Solución

Para simplificar, considere la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (1)$$

que representa una circunferencia centrada en el origen y radio a (figura 21.4a).

Una de las funciones que genera la ecuación anterior es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ con $x \in [-2, 2]$ (figura 21.4b).

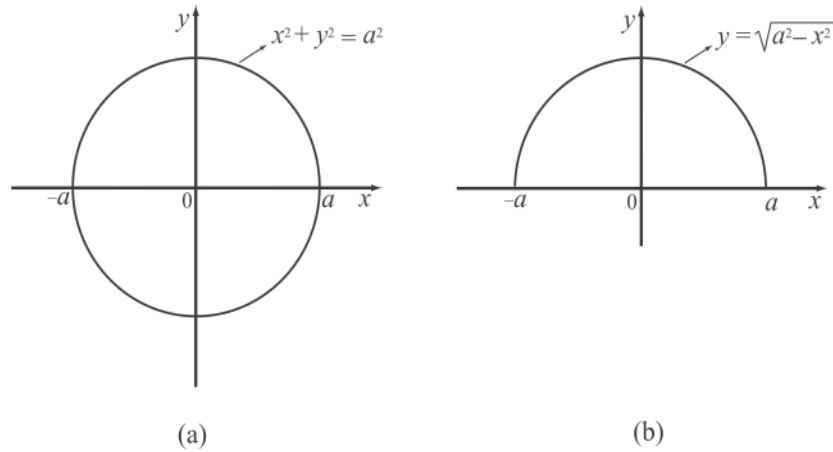


Figura 21.4

Si denotamos por s_1 la longitud del arco de la figura 21.4b, entonces la longitud total s de la circunferencia es $s = 2s_1$.

Ahora,

$$s_1 = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx. \quad (2)$$

Pero

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (\text{usando derivación implícita en (1)}).$$

Así que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Luego

$$s_1 = \int_{-2}^2 \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx = 2 \int_0^2 \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx \quad (\text{por ser el integrando una función par}).$$

Al evaluar la última integral usando la sustitución $x = a \sin \theta$ y $dx = a \cos \theta d\theta$, se obtiene

$$s_1 = \pi a,$$

y en consecuencia,

$$s = 2s_1 = 2\pi a,$$

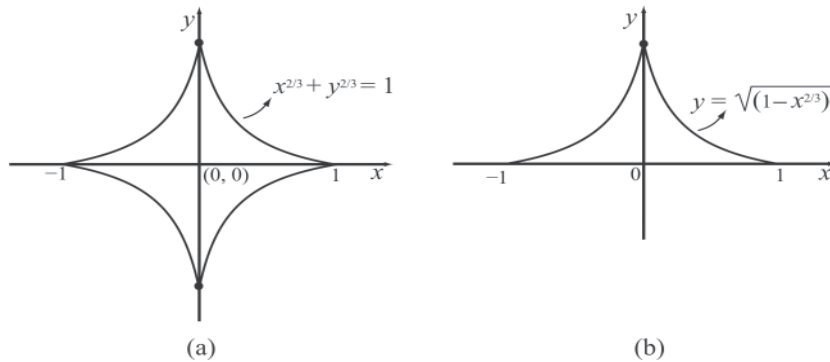
fórmula que coincide con la usada en geometría para la longitud de la circunferencia.

Ejemplo 2

Determine el perímetro de la hipocicloide de cuatro cúspides (figura 21.5a)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \tag{1}$$

Solución



$$s_1 = 4s_1$$

Figura 21.5

Una de las funciones que genera la ecuación anterior es $y = \sqrt{(1-x^{2/3})^3}$, con $x \in [-1,1]$ (figura 21.5b).

Pero

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

Note que la derivada de la función no existe en $x = 0$ (allí la tangente a la curva es vertical), pero esto no es impedimento para determinar la longitud.

Si denotamos por s_1 la longitud de la mitad del arco de la figura 21.5b, entonces la simetría de la figura permite deducir que la longitud total s de la hipocicloide es

Ahora,

$$s_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx. \tag{2}$$

De otro lado,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}.$$

Luego

$$s_1 = \int_0^1 x^{-1/3} dx = \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, $s = 4s_1 = 6$.



Escuche el audio *Historia del puente de Occidente «José María Villa»* en su multimedia de *Elementos básicos de cálculo integral y series*. (Adaptado, con autorización, del trabajo que el profesor Jaime Chica E. hizo sobre esta obra de ingeniería.)

21.2 Cálculo de la longitud de los cables en el puente de Occidente

Consideremos ahora un cable flexible de peso despreciable y que lleva una carga horizontal uniformemente distribuida de intensidad w . Si suponemos que C y E están a la misma altura (figura 21.6), entonces la distancia horizontal CE se llamará cuerda o luz del cable (c).

La profundidad del punto más bajo del cable respecto a la horizontal que pasa por C y E se llama flecha (f).

Con respecto a los ejes x e y de la figura 21.6, f es la ordenada del punto de suspensión.

La relación $\frac{c}{f}$ se llama relación de flecha.

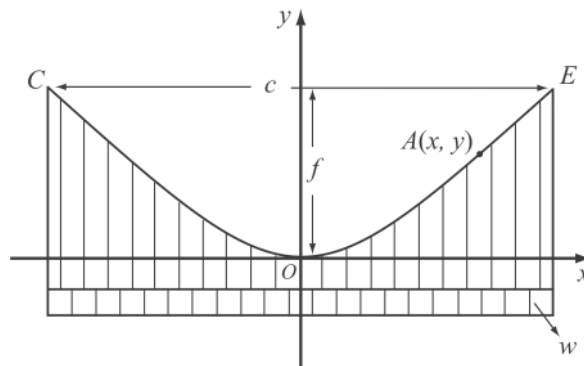


Figura 21.6

Llamemos O el punto más bajo del cable y pasemos por O un eje horizontal x y un eje vertical y .

Sea $A(x, y)$ un punto del cable.

Consideremos el equilibrio del tramo OA del cable. Como el cable es flexible, la única fuerza que puede transmitir es una tensión T que es tangente al cable en cada punto. Llamemos T_0 la tensión en el punto más bajo. El tramo OA de cable soporta una carga vertical de intensidad wx y está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas:

T_0 , T y la carga vertical wx .

Como T_0 y T se cortan en C , punto medio de $\overline{OA'}$, se tendrá que la carga vertical wx está aplicada en C .

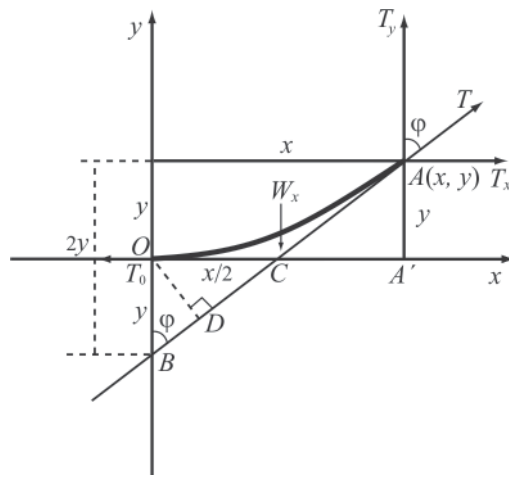


Figura 21.7

Del diagrama de cuerpo libre para el tramo \overline{OA} (figura 21.7):

$$\sum F_x = 0, \text{ de donde } T_x = T_0, \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0, \text{ de donde } T_y = wx, \quad (2)$$

$$\sum M_0 = 0, \text{ de donde } -wx\left(\frac{x}{2}\right) - yT_x + xT_y = 0. \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3),

$$-\frac{wx^2}{2} - yT_0 + wx^2 = 0,$$

de donde

$$y = \left(\frac{w}{2T_0}\right)x^2, \text{ con } \left(\frac{w}{2T_0}\right) \text{ constante,} \quad (4)$$

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

ecuación que nos demuestra que la curva que adopta el cable es una parábola de la

$$\text{forma } y = Qx^2 \text{ con } Q = \frac{w}{2T_0}.$$

Vamos ahora a ver que $Q = \frac{4f}{c^2}$.

En (4), si $x = \frac{c}{2}$, $y = f$. Entonces

$$f = \frac{w}{2T_0} \frac{c^2}{4} = \frac{wc^2}{8T_0},$$

de donde

$$T_0 = \frac{wc^2}{8f}$$

y por tanto

$$Q = \frac{w}{2T_0} = \frac{w}{2 \frac{wc^2}{8f}} = \frac{4f}{c^2}.$$

La ecuación de la curva es entonces:

$$y = \frac{4f}{c^2} x^2 \text{ con } x \in \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right].$$

Ahora, como vimos en el módulo 14 del texto *Elementos básicos del cálculo diferencial*, un cable colgante apoyado en extremos que están a la misma altura adopta la forma de una catenaria de ecuación:

$$y = \frac{H}{\delta} \cosh\left(\frac{\delta}{H} x\right),$$

donde

H : tensión en el punto más bajo

δ : densidad del cable (libras/pie).

Pero cuando un cable está suficientemente tenso, es decir, cuando f es pequeño comparado con c , se puede apreciar que s , longitud del cable, es ligeramente mayor que la cuerda c y se puede asumir en estos casos que el peso del cable se halla distribuido uniformemente a lo largo de la luz c .

Tal es el caso en el puente colgante de Occidente «José María Villa» de Santafé de Antioquia, donde

$$\left. \begin{aligned} c &= 956' (\text{pulgadas}) \approx 291 \text{ m.} \\ f &= 35' (\text{pulgadas}) \approx 10.5 \text{ m.} \\ \frac{f}{c} &= 0.0366 = n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ejemplo 3

Determine la longitud de uno de los cables en el puente de Occidente. Es decir, determine la longitud de arco de curva $y = Qx^2$, donde

$$Q = \frac{4f}{c^2} \text{ y } x \in \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right].$$

Solución

Si llamamos s el largo de cada uno de los cables comprendidos entre las torres soportes, entonces

$$s = \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Como $y = Qx^2$, entonces $\frac{dy}{dx} = 2Qx$.

Así que

$$\begin{aligned} s &= \int_{-c/2}^{c/2} \sqrt{1 + 4Q^2x^2} dx \\ &= \int_{-c/2}^{c/2} 2Q \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} dx \\ &= 4Q \int_0^{c/2} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} dx \quad (\text{por ser el integrando una función par}). \end{aligned}$$

Ahora, la integral $\int \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} dx$ puede escribirse en la forma:

$$\int \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} dx = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

donde $a^2 = \frac{1}{4Q^2}$.

Pero,

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] + c. \text{ (Vea la fórmula 28}$$

de la tabla de integrales del Apéndice III)

Tomando como $a^2 = \frac{1}{4Q^2}$, se tiene:

$$s = 2Q \left[x\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} + \frac{1}{4Q^2} \ln \left(x + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + x^2} \right) \right]_0^{c/2}$$

Consulte el apéndice III «Tabla de integrales» al final de este texto.



$$\begin{aligned}
 &= 2Q \left[\frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + \frac{c^2}{4}} + \frac{1}{4Q^2} \ln \left(\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + \frac{c^2}{4}} \right) - \frac{1}{4Q^2} \ln \frac{1}{2Q} \right] \\
 &= Qc \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + \frac{c^2}{4}} + \frac{1}{2Q} \ln \left(\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + \frac{c^2}{4}} \right) - \frac{1}{2Q} \ln \frac{1}{2Q}.
 \end{aligned}$$

Si se sustituye $Q = \frac{4f}{c^2}$ se obtiene luego de las simplificaciones necesarias:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + 16f^2} + \frac{c^2}{8f} \ln \frac{4cf + c\sqrt{c^2 + 16f^2}}{c^2}.$$

Como $n = \frac{f}{c}$ es la relación de flecha, y por tanto $f = nc$, se tiene que

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{c^2 + 16n^2 c^2} + \frac{c^2}{8(nc)} \ln \left[\frac{4c(nc) + c\sqrt{c^2 + 16n^2 c^2}}{c^2} \right],$$

esto es,

$$s = \frac{c}{2} \sqrt{1 + 16n^2} + \frac{c}{8n} \ln \left[4n + \sqrt{1 + 16n^2} \right],$$

y se tiene así que $s = f(c, n)$. Es decir, la longitud s es una función de c y n .

En particular, al sustituir los valores de c y n que aparecen en (5) se obtiene el valor de s :

$$s \approx 960 \text{ pies.}$$

Observación

Existe otro procedimiento de cálculo para encontrar la longitud de cada cable usando la serie binomial que aparece en el módulo 31 (vea el ejemplo 13 del módulo 31).

21.3 Área de superficie de revolución

En esta sección se presentarán fórmulas para expresar el área de la superficie de un sólido de revolución en forma de integrales definidas. El área de superficie puede interpretarse intuitivamente como la cantidad (en unidades de área) necesaria para «envolver» el sólido. En particular, se mostrará que el área de superficie de una esfera de radio a es cuatro veces el área del círculo que la genera. Éste fue uno de los grandes descubrimientos de Arquímedes en el siglo III a.C.

Todas las ideas expuestas serán presentadas usando la forma diferencial o aproximaciones locales dejando las usuales sumas de Riemman para un estudio más avanzado del tema.

La forma diferencial está basada en tres pasos básicos:

1. Dibújese
2. Córtese
3. Desenróllese

21.3.1 Área de superficie alrededor del eje x

Supóngase que $y = f(x)$ es una función con primera derivada continua en $[a, b]$ y además $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ (figura 21.8a).

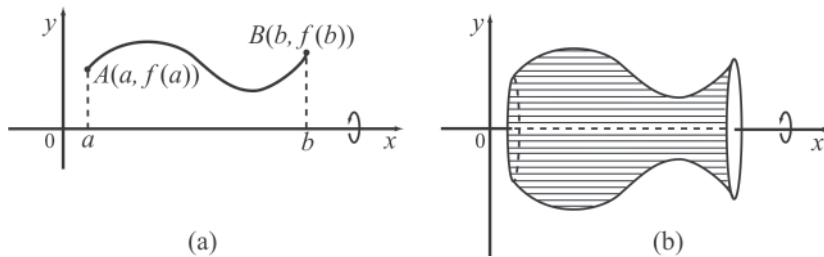


Figura 21.8

Cuando el arco de curva plana del punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ gira alrededor del eje x , genera una superficie (área lateral) como la que aparece sombreada en la figura 21.8b.

Usemos entonces la forma diferencial para expresar el área de superficie como una integral definida. Para ello considere una pequeña sección (casi recta) del gráfico de $f(x)$ (figura 21.9a) que corresponde al diferencial de longitud ds .

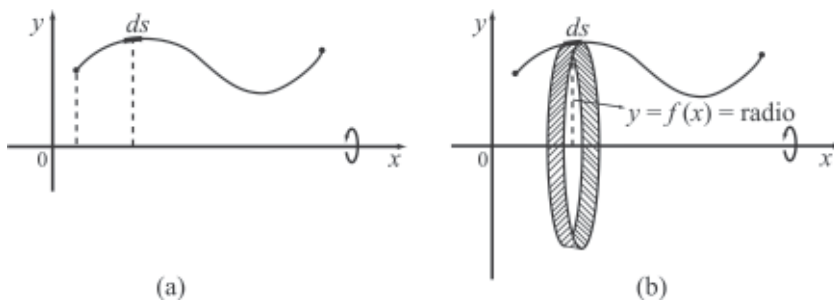


Figura 21.9

Al girar ds alrededor del eje x genera la franja de área sombreada que aparece en la figura 21.9b. Esta franja corresponde al diferencial de área de superficie que denotaremos dS .

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Supóngase que la franja se corta con tijeras por los puntos AA' y BB' y se despliega como aparece en las figuras 21.10 *a* y *b*.

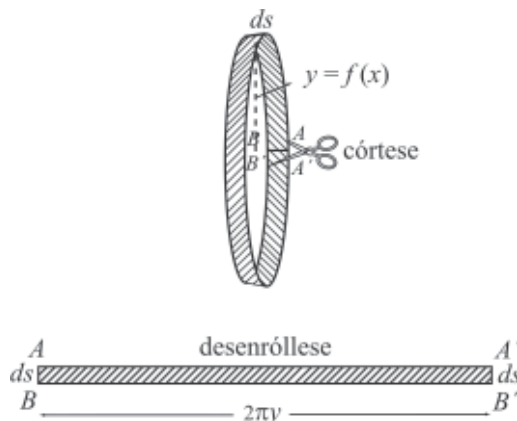


Figura 21.10

El diferencial de área de superficie dS puede considerarse ahora como el área de un rectángulo cuya base $BB' = AA' = 2\pi y$ (longitud de la circunferencia de radio y) y cuya altura es ds (diferencial de longitud).

Esto es:

$$dS = 2\pi y ds. \quad (1)$$

Ahora se tienen dos posibilidades de escoger la ds de acuerdo con las ecuaciones (7) y (8) de la sección 21.1. Esto es, si

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

entonces el diferencial de área de superficie dS depende sólo de la variable x , esto es,

$$dS = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (2)$$

Pero si

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

entonces el diferencial de área de superficie dS depende sólo de la variable y , esto es,

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \Rightarrow S = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (3)$$

Cualquiera de las fórmulas (2) y (3) permite determinar el área de la superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje x un arco de curva de la función positiva y con derivada continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

21.3.2 Área de superficie alrededor del eje y

Al girar ds de la figura 21.9a alrededor del eje y se genera la franja de área sombreada que aparece en la figura 21.11. Esta franja corresponde al diferencial de área de superficie que denotaremos por dS .

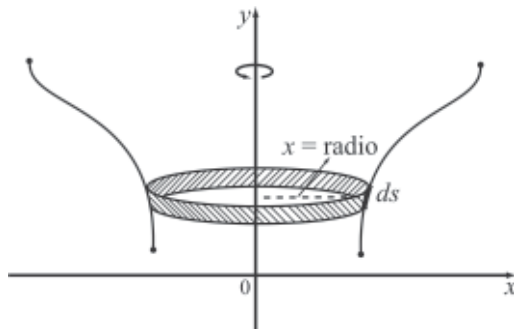


Figura 21.11

Supongamos que la franja se corta con tijeras por los puntos AA' y BB' y se desenrolla como aparece en las figuras 21.12 a y b.

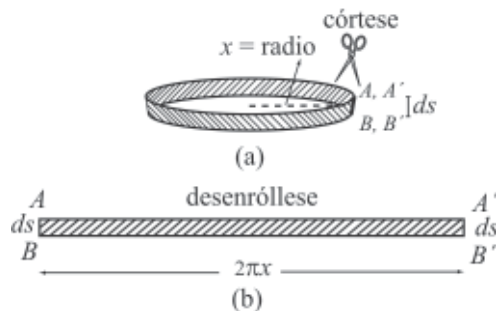


Figura 21.12

El diferencial de superficie puede considerarse ahora como el área de un rectángulo cuya base $BB' = AA' = 2\pi x$ (longitud de la circunferencia de radio x) y cuya altura es ds (diferencial de longitud), es decir,

$$dS = 2\pi x ds. \quad (4)$$

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Al igual que en caso anterior, existen dos posibilidades de expresar la dS en términos de x o de y , de acuerdo con la escogencia que se haga del diferencial de longitud ds en las ecuaciones (7) y (8) de la sección 21.1.

Así, si $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, entonces, sustituyendo en (4), se puede escribir:

$$dS = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5)$$

Si $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$, al sustituir en (4) la variable de integración para S es y , y por tanto la variable x de la dS debe expresarse en términos de y .

Así que:

$$dS = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \Rightarrow S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (6)$$

Cualquiera de las fórmulas (5) y (6) permiten determinar el área de la superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje y un arco de curva de la función positiva y con derivada continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Observaciones

- i. Si el eje de rotación no es el eje x (eje y), en la integral de las fórmulas (2), (3), (5) y (6) deben modificarse en forma apropiada los radios de giro. Así, si la ds gira alrededor de la recta $y = k$, entonces el radio de giro es $(y - k)$ (figura 21.13a). En este caso, $dS = 2\pi(y - k) ds$.

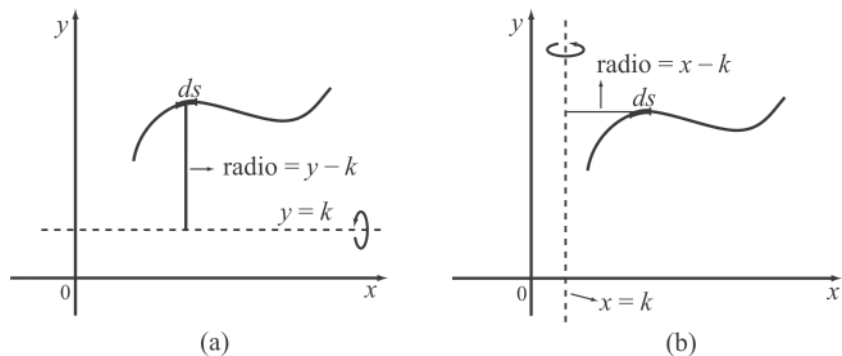


Figura 21.13

Si la ds gira alrededor de la recta $x = k$, entonces el radio de giro es $(x - k)$ (figura 21.13b). En este caso, $dS = 2\pi(x - k) ds$.

- ii. Se recomienda al estudiante no memorizar las cuatro fórmulas (2), (3), (5) y (6). En lugar de esto se le sugiere seguir en cada caso los tres pasos básicos dados al inicio de la sección: dibújese, córtese, desenrólese, y construir el diferencial de área de superficie apropiado.

Los ejemplos siguientes ilustran la manera de proceder en cada caso.

Ejemplo 4

Use integración para hallar el área de la superficie de una esfera de radio a .

Solución

La superficie de la esfera se genera por rotación alrededor del eje x , del arco superior de $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[-a, a]$ (figura 21.14 a).

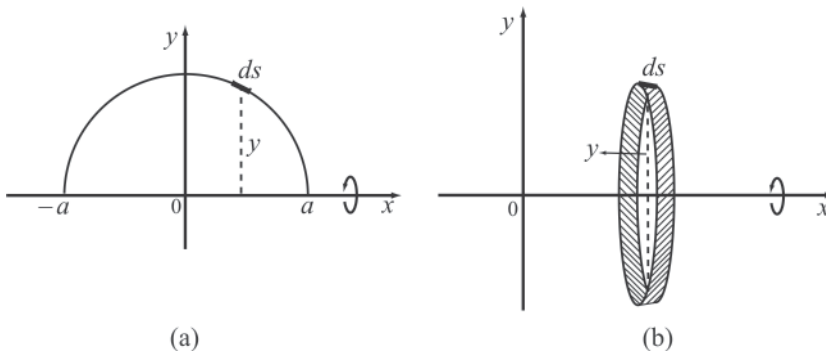


Figura 21.14

Al girar alrededor del eje x la ds , se genera la dS (diferencial de área de superficie), franja de área sombreada que aparece en la figura 21.14b.

Al contar y desarrollar la dS se obtiene el rectángulo de la figura 21.15 con las especificaciones allí dadas.

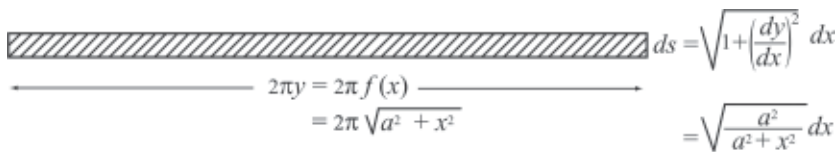


Figura 21.15

De acuerdo con la figura:

$$dS = 2\pi\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 2\pi a dx.$$

Entonces

$$S = \int_{-a}^a 2\pi a \, dx = 2 \int_0^a 2\pi a \, dx = [4\pi ax]_0^a \\ = 4\pi a^2.$$

Es decir, el área de la superficie de una esfera es cuatro veces el área de su sección transversal.

Ejemplo 5

Determine el área de la superficie de revolución generada al rotar alrededor del eje y la porción de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en $[0,1]$ y considerando:

- Variable de integración x .
- Variable de integración y .

Solución

El área de superficie se genera al rotar alrededor del eje y la porción de curva que aparece en la figura 21.16.

En cualquier caso:

$$dS = 2\pi x \, ds.$$

- Ahora, si escogemos como variable de integración a la x , entonces:

$$dS = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

Pero $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x^{-1/3}$ (ejemplo 2, sección 21.1).

Luego $dS = 2\pi x \cdot x^{-1/3} \, dx = 2\pi x^{2/3} \, dx$.

Así que

$$S = 2\pi \int_0^1 x^{2/3} \, dx = 2\pi \left[\frac{3}{5} x^{5/3} \right]_0^1 = \frac{6\pi}{5}.$$

- Si escogemos como variable de integración a y , entonces:

$$dS = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dy \tag{7}$$

Módulo 21: Longitud de arco de una curva plana y área de superficie de revolución

Como la variable de integración es y , debemos expresar x de la función en términos de y . Esto es, si $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, entonces

$$x = (1 - y^{2/3})^{3/2} \quad (8)$$

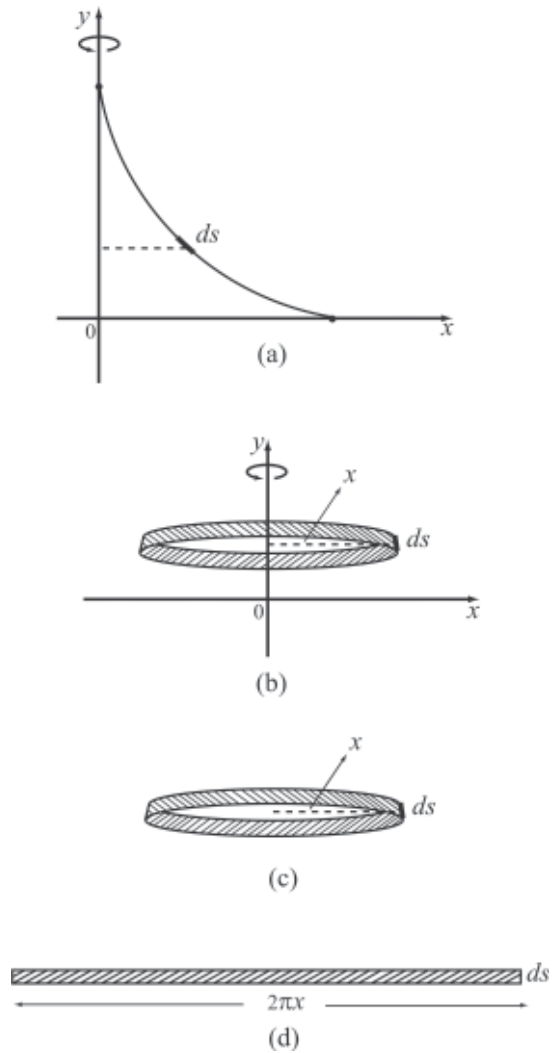


Figura 21.16

También,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{y^{1/3}} \quad (9)$$

Sustituyendo (8) y (9) en (7) se puede escribir

$$dS = 2\pi(1 - y^{2/3})^{3/2} \frac{1}{y^{1/3}} dy.$$

De aquí,

$$S = 2\pi \int_0^1 2\pi \frac{(1 - y^{2/3})^{3/2}}{y^{1/3}} dy.$$

La última integral puede evaluarse haciendo la sustitución:

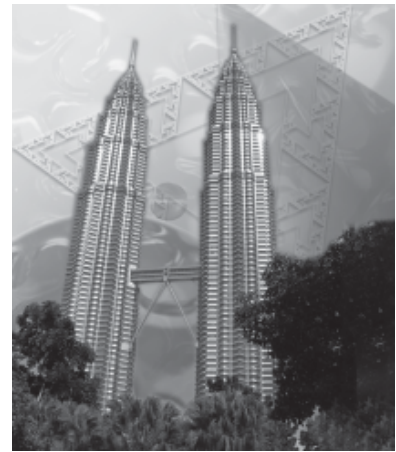
$$\begin{aligned} u = (1 - y^{2/3}) &\Rightarrow du = -\frac{2}{3} y^{-1/3} dy = -\frac{2dy}{3y^{1/3}} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y^{1/3}} = -\frac{3}{2} du. \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 \frac{(1 - y^{2/3})^{3/2}}{y^{1/3}} dy = 2\pi \left(-\frac{3}{2} \right) \int_1^0 u^{3/2} du \\ &= -3\pi \left[\frac{2}{5} u^{5/2} \right]_1^0 = -3\pi \left[0 - \frac{2}{5} \right] = \frac{6}{5} \pi. \end{aligned}$$

Módulo 22

Momentos y centros de masa



Las torres Petronas

La aceleración debida a la gravedad en la base de las torres Petronas de Kuala Lumpur (capital de Malasia), cuya altura es de 452 metros, es sólo 0.014% mayor que en la punta. El centro de gravedad de las torres está solo 2 centímetros abajo del centro de masa. (Tomado del texto *Física universitaria*, de Sears y otros, p. 407).

Contenidos del módulo

- 22.1 Centro de masa de una varilla o de un alambre
- 22.2 Centro de masa de una región plana o de una lámina delgada
- 22.3 Centro de masa de un sólido de revolución

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones a la física. En particular, usarla para determinar los momentos y centros de masa de varillas delgadas, de láminas planas y delgadas y de sólidos de revolución.

Preguntas básicas

1. Demuestre que si una región plana R es simétrica respecto al eje x , entonces su centroide está sobre dicho eje. Demuestre además que el centroide de un círculo se encuentra en su centro.
2. Demuestre que el centro de masa de un sistema formado por tres partículas de igual masa está situado en el punto de intersección de las medianas del triángulo formado por los puntos donde están localizadas las partículas.

Introducción

Muchas estructuras y sistemas mecánicos modelados en ingeniería se comportan como si sus masas estuviesen concentradas en un solo punto, llamado *centro de masa*. Cuando las masas de los objetos son puntuales (caso discreto), el centro de masa es un cociente de sumatorias, pero en el caso de cuerpos sólidos, que tienen (al menos en el nivel macroscópico) una distribución continua de materia (caso continuo), las sumatorias se reemplazan por integrales y nuestro propósito en este módulo es usar la integral para determinarlos en el caso de varillas delgadas, láminas planas delgadas y sólidos de revolución.

Acerca de tales problemas se puede decir en forma general que:

1. Si un cuerpo homogéneo (densidad constante) tiene un centro geométrico, como una bola de hierro o un cubo de azúcar, el centro de masa está en el centro geométrico.
2. Si un cuerpo tiene un eje de simetría, el centro de masa está sobre dicho eje.

3. Ninguna ley establece que el centro de masa debe estar localizado dentro del cuerpo. Así por ejemplo, el centro de masa de una dona está en el agujero. En el ejemplo 9 se muestra que el centro de masa de un alambre en forma circular está fuera de él.

Antes de iniciar el estudio del objeto básico de este módulo es conveniente y metodológico hacer un comentario acerca de la *densidad*.

La densidad se define como el producto de la masa por la unidad de volumen; sin embargo, en la práctica se utilizan unidades que pueden medirse de manera más apropiada. Así por ejemplo:

- Para alambres y varillas delgadas

$$masa = densidad \times longitud. \quad \text{Asociar: } \frac{dm}{\text{dif. masa}} = \underbrace{\delta_1}_{\text{densidad}} \cdot \frac{dL}{\text{dif. longitud}}$$

- Para hojas planas y láminas delgadas

$$masa = densidad \times \acute{a}rea. \quad \text{Asociar: } \frac{dm}{\text{dif. masa}} = \underbrace{\delta_2}_{\text{densidad}} \cdot \frac{dA}{\text{dif. de \acute{a}rea}}$$

- Para s\u00f3lidos

$$masa = densidad \times volumen. \quad \text{Asociar: } \frac{dm}{\text{dif. masa}} = \underbrace{\delta_3}_{\text{densidad}} \cdot \frac{dV}{\text{dif. de volumen}}$$

22.1 Centro de masa de una varilla o de un alambre

Caso discreto

Supongamos un conjunto de n masas m_1, m_2, \dots, m_n situadas sobre el eje x en los puntos de abscisas x_1, x_2, \dots, x_n . El momento de cada masa m_i con respecto al

origen será $m_i x_i$ y su momento total será $\sum_{i=1}^n m_i x_i$.

Se llama *centro de masa* al punto P de abscisa \bar{x} dada por:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

El centro de masa P tiene la siguiente propiedad física: si las masas son puntuales, o sea que ocupan solamente un punto y están colocadas sobre una varilla ideal sin peso o de peso despreciable, el sistema queda en equilibrio cuando se le suspende de P .

Ejemplo 1

Cuatro masas de 3, 5, 6 y 8 gramos están colocadas sobre el eje x en las abscisas $-2, 3, 5$ y -4 , respectivamente. Halle el centro de masa del sistema.

Solución

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{3(-2) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 8(-4)}{3 + 5 + 6 + 8} = \frac{7}{22}.$$

Caso continuo

Consideremos ahora una varilla rígida de diámetro pequeño y longitud L colocada sobre el eje x de tal modo que uno de sus extremos coincide con el origen 0 (figura 22.1). Supongamos además que la densidad lineal (unidades de masa por unidad de longitud) es una función $\delta_1(x)$, integrable en $[0, L]$.

Si hacemos una partición P de la varilla en n segmentos de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, una aproximación a la masa del i -ésimo intervalo será $\delta_1(t_i) \Delta x_i$, en donde t_i es un punto de $[x_{i-1}, x_i]$ y Δx_i su longitud, una aproximación a su momento con respecto al origen será $t_i \delta_1(t_i) \Delta x_i$.



Vea el módulo 22 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

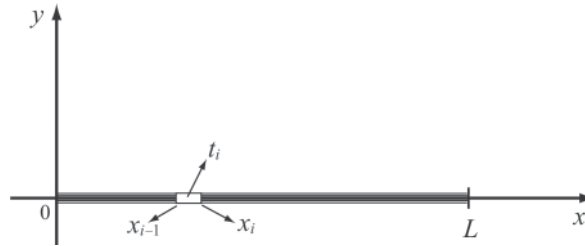


Figura 22.1

La masa total m estará dada por:

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \delta_1(t_i) \Delta x_i = \int_0^L \delta_1(x) dx. \quad (1)$$

El momento de masa total M será:

$$M = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i \delta_1(t_i) \Delta x_i = \int_0^L x \delta_1(x) dx. \quad (2)$$

El centro de masa estará dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \delta_1(x) dx}{\int_0^L \delta_1(x) dx}. \quad (3)$$

Ejemplo 2

Halle el centro de masa de una varilla de diámetro pequeño, longitud L y densidad uniforme (constante) $\delta_1(x) = k$.

Solución

De acuerdo con la fórmula (3) tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \delta_1(x) dx}{\int_0^L \delta_1(x) dx} = \frac{\int_0^L x \cdot k dx}{\int_0^L k dx} = \frac{k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L}{k [x]_0^L} = \frac{L}{2}.$$

Este resultado confirma la propiedad bien conocida de que si una varilla de densidad uniforme se suspende de su punto medio, queda en equilibrio.

Ejemplo 3

Una varilla de longitud 60 cm tiene una densidad lineal que varía proporcionalmente al cuadrado de su distancia a uno de los extremos. Si la densidad en el extremo más pesado es de 7200 g/cm, halle su masa total y el centro de masa.

Solución

Coloquemos la varilla sobre el eje x con su extremo más liviano en el origen 0 (figura 22.2).

La densidad lineal será $\delta_1(x) = Rx^2$, de tal modo que cuando $x = 60$, $P(60) = 7200$, luego $R \cdot 60^2 = 7200$, de donde obtenemos $R = 2$, y por tanto $\delta_1(x) = 2x^2$.

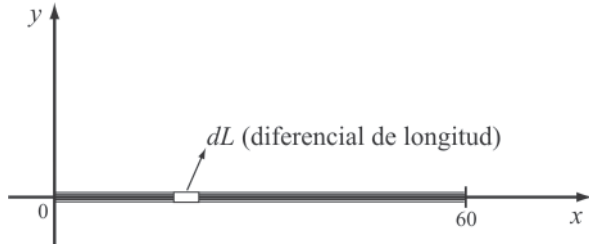


Figura 22.2

Para hallar la masa m utilizamos la fórmula (1) y para el centro de masa la (3).

Entonces:

$$m = \int_0^{60} 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{60} = 144\,000 \text{ g}$$

y

$$\bar{x} = \frac{2 \int_0^{60} x \cdot x^2 dx}{m} = \frac{2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{60}}{144\,000} = 45 \text{ cm.}$$

Este último resultado nos indica que para que la varilla quede en equilibrio debe suspenderse de un punto a 45 cm del extremo más liviano.

22.2 Centro de masa de una región plana o de una lámina delgada

Caso discreto

Se tienen n partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n situadas sobre el plano xy en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (figura 22.3).

Los *momentos* de estas masas respecto a los ejes x e y denotados por Mx y My respectivamente, se definen así:

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

$$Mx = \sum_{i=1}^n y_i m_i ; My = \sum_{i=1}^n x_i m_i.$$

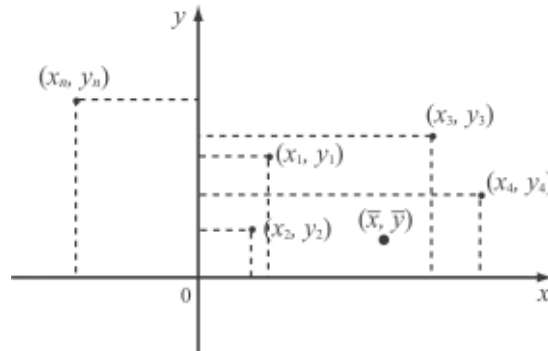


Figura 22.3

Las coordenadas \bar{x} e \bar{y} del *centro de masa* se definen por:

$$\bar{x} = \frac{My}{\sum_{i=1}^n m_i} ; \bar{y} = \frac{Mx}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

El punto (\bar{x}, \bar{y}) tiene la propiedad de que si las masas están colocadas sobre una placa sin peso y dicha placa se suspende de él, debe entonces quedar en equilibrio.

Ejemplo 4

Se tienen masas de 5, 10 y 20 kg situadas en los puntos (1, 1), (-3, 1) y (0, 3), respectivamente. Halle los momentos de masa respecto a los ejes coordenados y el centro de masa.

Solución

$$My = \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 5 \cdot 1 + 10(-3) + 20 \cdot 0 = -25 \text{ kg}\cdot\text{m}.$$

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i = 5 + 10 + 20 = 35 \text{ kg}.$$

$$\bar{x} = \frac{My}{m} = \frac{-25}{35} = -\frac{5}{7} \text{ m.}$$

$$\bar{y} = \frac{Mx}{m} = \frac{75}{35} = \frac{15}{7} \text{ m.}$$

Caso continuo

Consideremos ahora una placa delgada con densidad de superficie $\delta_2(x, y) = k$ (constante) en todos sus puntos y limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ ($f(x)$ y $g(x)$ integrables en $[a, b]$) y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Supongamos además que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$ (figura 22.4).

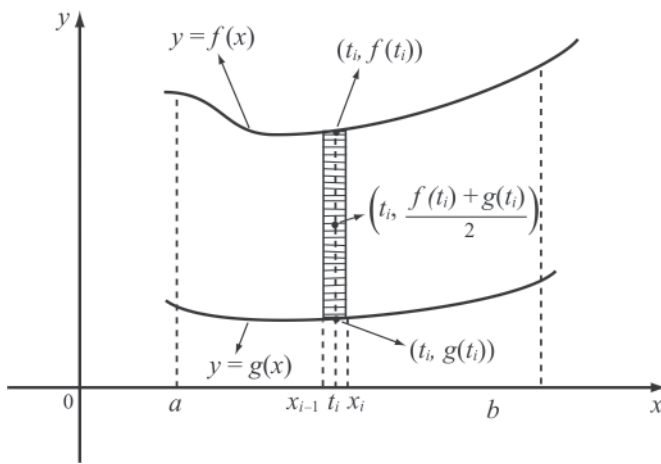


Figura 22.4

La masa Δm_i del i -ésimo rectángulo que resulta al efectuar una partición P sobre $[a, b]$ será el producto de la densidad k por el área, esto es,

$$\Delta m_i = k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i,$$

en donde t_i es un punto cualquiera de $[x_{i-1}, x_i]$.

El momento de masa correspondiente al i -ésimo elemento, respecto al eje y , estará dado aproximadamente por $t_i \cdot \Delta m_i = t_i k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i$ y el momento de masa total por:

$$My = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kt_i [f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i = \int_a^b kx[f(x) - g(x)]dx. \tag{1}$$

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Para calcular el momento Mx respecto al eje x utilizaremos el resultado del ejemplo 2, o sea que para calcular el momento de una varilla de densidad uniforme, respecto a uno de los extremos, basta colocar toda su masa en el punto medio. El i -ésimo rectángulo de nuestra partición P se puede asimilar muy bien a una varilla delgada, así que su momento respecto al extremo que se apoya sobre el eje x estará dado por:

$$\frac{1}{2}[f(t_i) + g(t_i)]\Delta m_i.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}[f(t_i) + g(t_i)]k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i = \frac{1}{2}k[(f(t_i))^2 - (g(t_i))^2]\Delta x_i.$$

Entonces, el momento total podrá escribirse así:

$$\begin{aligned} Mx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)k[(f(t_i))^2 - (g(t_i))^2]\Delta x_i \\ &= \frac{k}{2} \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

La masa total m estará dada por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i \\ &= k \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Las coordenadas \bar{x} e \bar{y} del centro de masa se pueden obtener así:

$$\bar{x} = \frac{My}{m} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}. \quad (4)$$

$$\bar{y} = \frac{Mx}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}. \quad (5)$$

Observaciones

- i. En las fórmulas (4) y (5) se ha eliminado el factor k por aparecer en el numerador y en el denominador, y en consecuencia las coordenadas \bar{x} e \bar{y} sólo dependen de la geometría de la lámina y no de su masa, por lo que el punto dado por las fórmulas (4) y (5) se llamará también el *centroide* de la región.

- ii. Si en las fórmulas (1) y (2) se elimina la densidad k (o mejor, se hace igual a 1), los valores resultantes los llamaremos los *momentos* de la región respecto a los ejes coordenados.

Al hacer $k = 1$ en la fórmula (3), la masa coincide numéricamente con el área de la región.

Ejemplo 5

Encuentre el centroide de la región limitada por la rama de parábola $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ (figura 22.5).

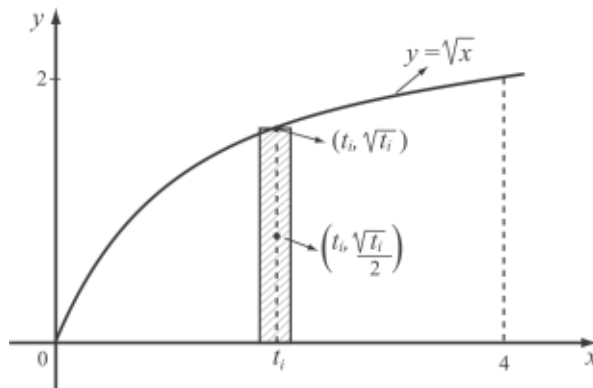


Figura 22.5

Solución

En la figura 22.5 aparece el i -ésimo rectángulo indicando el punto medio en el cual se asume que se concentra la masa total. El momento respecto al eje x del i -ésimo rectángulo es el producto de su área por la distancia del punto medio al eje x . Esto es,

$$\frac{1}{2} \sqrt{t_i} \cdot \sqrt{t_i} \Delta x_i.$$

Entonces, el momento total M_x será:

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \right) \sqrt{t_i} \cdot \sqrt{t_i} \Delta x_i \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 4. \end{aligned}$$

Similarmente, el momento respecto al eje y del i -ésimo rectángulo es el producto de su área por la distancia al eje y . Esto es,

$$t_i \sqrt{t_i} \Delta x_i.$$

Entonces, el momento total respecto al eje y , My , será:

$$My = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i \sqrt{t_i} \Delta x_i = \int_0^4 x \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{3/2} dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^4 = \frac{64}{5}.$$

El área de la región está dada por:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Las coordenadas \bar{x} e \bar{y} del centroide serán entonces:

$$\bar{x} = \frac{My}{A} = \frac{\frac{64}{5}}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{5}; \quad \bar{y} = \frac{Mx}{A} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 6

Halle el centroide de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$ (figura 22.6).

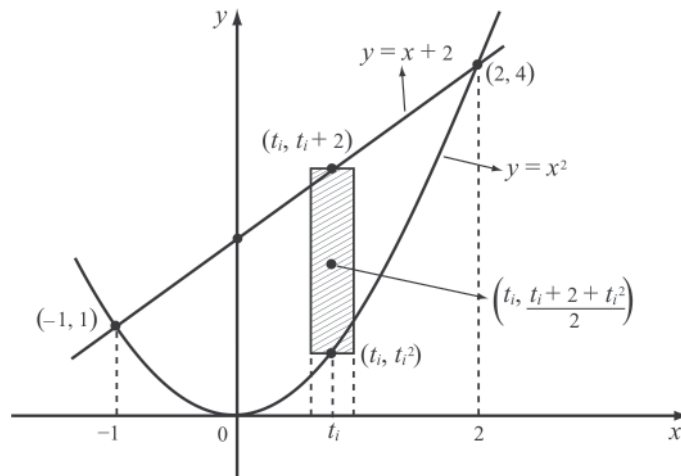


Figura 22.6

Solución

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$ y se obtienen resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones.

El momento respecto al eje x del i -ésimo rectángulo se obtiene multiplicando su área por la distancia de su punto medio al eje x .

Entonces el momento total será:

$$\begin{aligned}
 Mx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \right) ((t_i + 2) + t_i^2)((t_i + 2) - t_i^2) \Delta x_i \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 ((x+2) + x^2)((x+2) - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx = \frac{36}{5}.
 \end{aligned}$$

El momento respecto al eje y es:

$$\begin{aligned}
 My &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i)((t_i + 2) - t_i^2) \Delta x_i = \int_{-1}^2 x((x+2) - x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - x^3) dx = \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

El área de la región es:

$$A = \int_{-1}^2 (x+2 - x^2) dx = \frac{9}{2}.$$

Por tanto las coordenadas del centroide serán:

$$\bar{x} = \frac{My}{A} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}; \quad \bar{y} = \frac{Mx}{A} = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{5}.$$

Ejemplo 7

Demuestre que la figura plana A (figura 22.7), simétrica respecto al eje x , tiene su centroide sobre dicho eje.

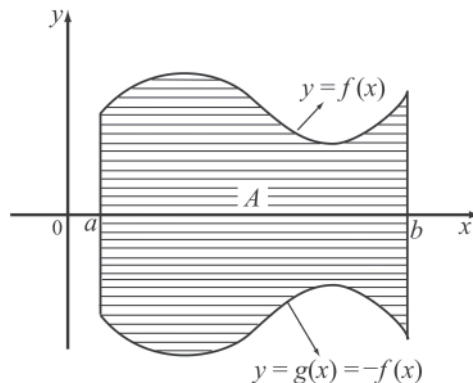


Figura 22.7

Solución

Como la figura A está limitada superiormente por la curva $y = f(x)$, entonces, dada la simetría respecto al eje x , la curva que la limita inferiormente debe ser $y = -f(x)$.

Para calcular la ordenada \bar{y} del centroide utilicemos la fórmula (5) dada al comienzo de esta sección en donde $g(x)$ es la función $y = -f(x)$. Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b [(f(x))^2 - (-f(x))^2] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = 0,$$

y en consecuencia el centroide está sobre el eje x , o sea que está localizado sobre el eje de simetría.

Observación

De manera similar puede demostrarse fácilmente que si la región plana es simétrica con respecto al eje y , su centroide estará localizado sobre dicho eje.

Ejemplo 8

Demuestre que el centroide de un círculo se encuentra en su centro.

Solución

Cualquier diámetro que se trace es un eje de simetría en el círculo. En consecuencia, por el resultado del ejemplo 7, el centroide se debe encontrar localizado sobre dicho eje. Si trazamos dos diámetros diferentes, el centroide pertenece simultáneamente a los dos, luego pertenece a su intersección, que en este caso coincide con el centro.

Ejemplo 9

Determine el centro de masa de un alambre delgado de densidad constante δ_1 y que tiene forma de una semicircunferencia de radio a .

Solución

Supongamos que el alambre tiene la forma de la semicircunferencia que aparece en la figura 22.8a.

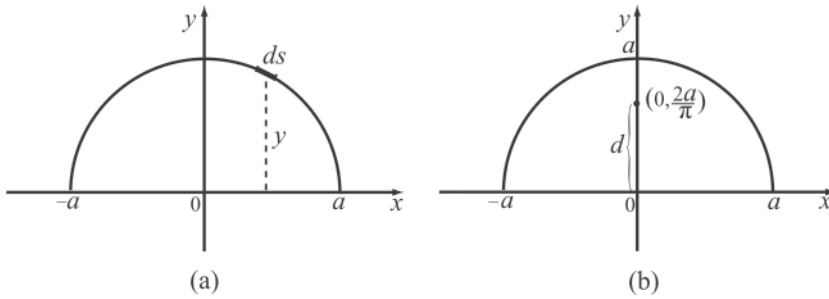


Figura 22.8

Como el alambre es homogéneo, la distribución de masa es simétrica con respecto al eje y ; en consecuencia, $\bar{x} = 0$.

Ahora

$$(1)$$

Pero

$$dm = \delta_1 ds = \delta_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \delta_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (\text{ejemplo 4, sección 21.3}).$$

Luego

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad m = \int_{-a}^a \frac{\delta_1 a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \pi \delta_1 a \quad (\text{masa de media circunferencia}). \quad (2)$$

También, si denotamos por dM_x el diferencial de momento con respecto al eje x , del diferencial ds , entonces:

$$dM_x = (dm) \cdot (\text{distancia al eje } x) = \delta_1 ds \cdot y = \delta_1 \sqrt{a^2 - x^2} ds.$$

Luego

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-a}^a \delta_1 \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2a\delta_1 \int_0^a dx = 2a\delta_1 [x]_0^a = 2a^2\delta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$\bar{y} = \frac{2a^2\delta_1}{\pi a\delta_1} = \frac{2a}{\pi}.$$

Por tanto, el centroide (\bar{x}, \bar{y}) del alambre está localizado en el punto $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ (figura 22.8b).

Note que el centroide no está sobre el alambre sino sobre el eje de simetría.

Ejemplo 10

Determine el centro de masa de la lámina delgada de densidad constante δ_2 y que tiene la forma de un semicírculo de radio a .

Solución

Supongamos que la lámina tiene la forma de la región plana limitada por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x (figura 22.9a).

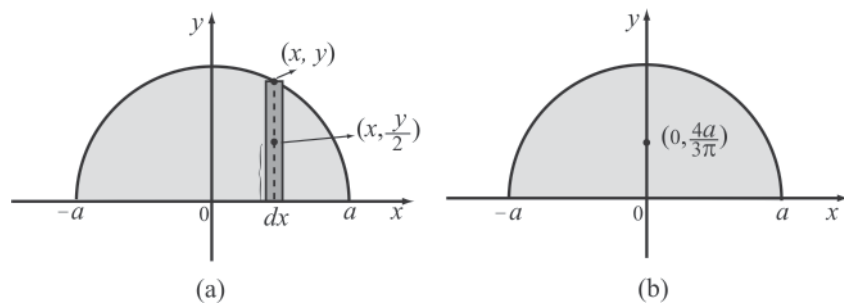


Figura 22.9

Como la lámina es homogénea, la distribución de masa es simétrica con respecto al eje y , y en consecuencia $\bar{x} = 0$.

Ahora,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{1}$$

Pero

$$dm = \delta_2 dA = \delta_2 [f(x)] dx = \delta_2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Luego

$$m = \int_{-a}^a \delta_2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \int_0^a \delta_2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2 \delta_2}{2}. \tag{2}$$

También, si denotamos dM_x el diferencial de momento con respecto al eje x , del diferencial de área dA , entonces:

$$\begin{aligned} dM_x &= (dm) \cdot (\text{distancia al eje } x) \\ &= \delta_2 dA \cdot \frac{y}{2} = \frac{\delta_2}{2} y \cdot y dx = \frac{\delta_2}{2} (a^2 - x^2) dx. \end{aligned}$$

Luego

$$M_x = \int_{-a}^a \frac{\delta_2}{2} (a^2 - x^2) dx = \delta_2 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} \delta_2 a^3. \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3} \delta_2 a^3}{\frac{\pi a^2 \delta_2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Por tanto, el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la lámina semicircular y homogénea está localizado

en el punto $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ (figura 22.9b).

22.3 Centro de masa de un sólido de revolución

El procedimiento que seguiremos para encontrar el centro de masa de un sólido de revolución es análogo al utilizado para encontrar el centro de masa de una lámina homogénea.

Consideremos un sistema de coordenadas tridimensionales, en el cual el eje z es un eje que tomamos perpendicular al plano xy en el origen.

Entonces un punto P en tres dimensiones se denota por $P(x, y, z)$; además, el plano que contiene los ejes x y y se denota por xy , el plano que contiene los ejes x y z será xz y el que contiene los ejes y y z es el plano yz .

Puesto que para un sólido de revolución el eje de giro es un eje de simetría, se puede demostrar que el centro de masa está sobre dicho eje; por tanto, si el eje de revolución fuera el eje x , las coordenadas \bar{y}, \bar{z} del centro de masa serían cero y en tal caso la única coordenada que se debe buscar sería \bar{x} . Si el eje de revolución fuera el eje y , las coordenadas \bar{x} y \bar{z} son cero y la única coordenada que se necesita buscar es \bar{y} .

Caso continuo

Supongamos ahora que $f(x) \geq 0$ es una función continua sobre $[a, b]$.

Tomemos una partición de $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, y un t_i en $[x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Como se nota en la figura 22.10 se formarán n rectángulos con altura $f(t_i)$ y ancho Δx_i .

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

Si se rota la región definida por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje x , se genera el sólido de revolución de la figura 22.11 y cada rectángulo i -ésimo generará un disco.

El volumen de cada disco está dado por $\Delta v_i = \pi[f(t_i)]^2 \Delta x_i$.

Si el sólido de revolución es homogéneo (de densidad constante $\delta_3(x) = k$), la masa para cada disco está dada por:

$$m_i = k\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i. \tag{1}$$

El centro de masa de cada disco está sobre el eje de revolución y en el centro del disco, o sea aproximadamente en el punto $(t_i, 0, 0)$.

Como el momento con respecto a un plano es el producto de la masa por la distancia al plano, entonces el momento de cada disco con respecto al plano yz está dado por:

$$\Delta_i M_{yz} = t_i (\pi k [f(t_i)]^2 \Delta x_i) \tag{2}$$

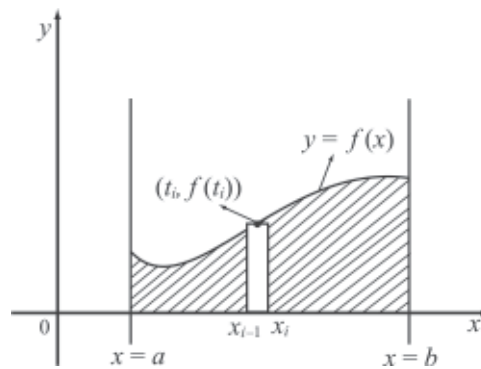


Figura 22.10

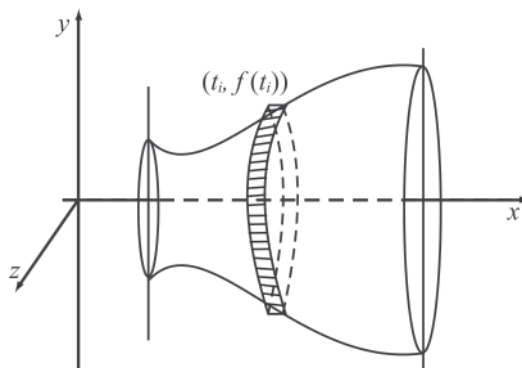


Figura 22.11

De (1) inferimos que la masa total m está dada por:

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b k\pi [f(x)]^2 dx.$$

De (2) inferimos que el momento del sólido con respecto al plano yz está dado por:

$$M_{yz} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi t_i [f(t_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx.$$

Llamaremos centro de masa del sólido al punto $(\bar{x}, 0, 0)$ en donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{k\pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx}{k\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx} = \frac{\int_a^b x [f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx}.$$

Observaciones

- i. Se puede observar que en la fórmula final no aparece la densidad k , lo cual significa que la posición del centro de masa no depende del material sino de la forma del cuerpo.

Para estos cuerpos de densidad constante el centro de masa se llama *centroide*.

- ii. El centroide de un sólido de revolución también puede hallarse por el método de la corteza cilíndrica.

Si se tiene una región limitada por el eje x , las rectas $x = a$, $x = b$ y una función $f(x) \geq 0$ continua sobre $[a, b]$ y se rota alrededor del eje y (figura 22.12), el rectángulo i -ésimo da origen a la corteza cilíndrica de la figura 22.13.

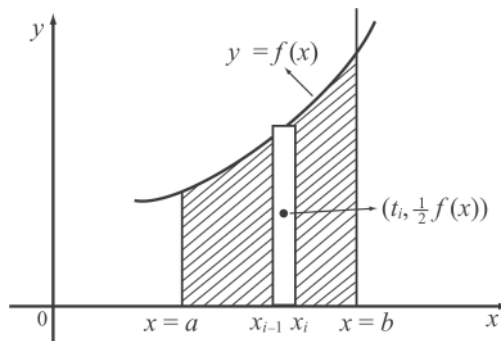


Figura 22.12

El centroide del sólido resultante está en el punto $(0, \bar{y}, 0)$.

El centroide de cada corteza cilíndrica está en el centro de la corteza, el cual es el punto $\left(0, \frac{1}{2} f(t_i), 0\right)$.

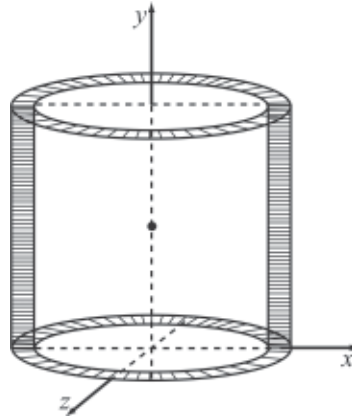


Figura 22.13

Por tanto, el momento de cada corteza con respecto al plano xz está dado por:

$$\Delta_i M_{xz} = \frac{1}{2} f(t_i) 2k\pi t_i f(t_i) \Delta x_i.$$

El momento total del sólido es

$$M_{xz} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{k}{2} f(t_i) 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx,$$

y la masa del sólido es:

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2k\pi t_i f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b 2k\pi x f(x) dx.$$

De donde,

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{k\pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx}{2k\pi \int_a^b x f(x) dx} = \frac{\int_a^b x [f(x)]^2 dx}{2 \int_a^b x f(x) dx}.$$

- iii. Cuando el cuerpo es homogéneo, esto es, de densidad constante, el centro de masa coincide con el centroide o centro geométrico.

Ejemplo 11

Encuentre el centro de masa del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región limitada por la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje x y la recta $x = 4$.

Solución

La figura 22.14 muestra la región y el elemento rectangular de área. La figura 22.15 muestra el sólido de revolución y el elemento de volumen.

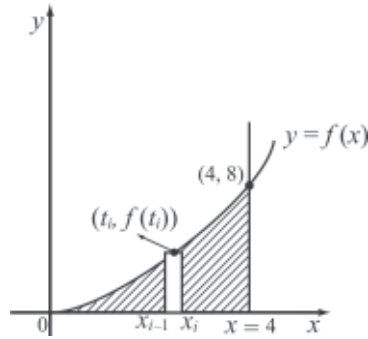


Figura 22.14

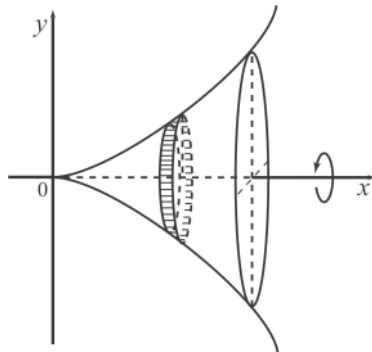


Figura 22.15

Como la región gira alrededor del eje x , el centro de masa es de la forma $C(\bar{x}, 0, 0)$,

donde $\bar{x} = \frac{Myz}{m}$.

El momento con respecto al plano yz está dado por:

$$\begin{aligned}
 Myz &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi t_i [f(t_i)]^2 \Delta x_i \\
 &= \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx = \int_0^4 k\pi \cdot x \cdot \frac{x^4}{4} dx = \frac{k\pi}{4} \int_0^4 x^5 dx = \frac{k\pi}{4} \frac{4^6}{6} = \frac{4^5}{6} k\pi.
 \end{aligned}$$

$x = 4$

Capítulo 4: Aplicaciones de la integral definida

La masa del sólido es:

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i = \int_0^4 k\pi \frac{x^4}{4} dx = \frac{k\pi}{4} \frac{4^5}{5} = \frac{k\pi}{5} 4^4.$$

De donde

$$\bar{x} = \frac{Myz}{m} = \frac{10}{3},$$

y por tanto el centro de masa está localizado en el punto $\left(\frac{10}{3}, 0, 0\right)$.

Ejemplo 12

Encuentre el centro de masa del sólido de revolución del ejemplo 11, tomando el elemento rectangular de área paralelo al eje x .

Solución

La figura 22.16 muestra el elemento rectangular de área y el centro del mismo. El centroide del sólido está en el punto $(\bar{x}, 0, 0)$ (figura 22.17).

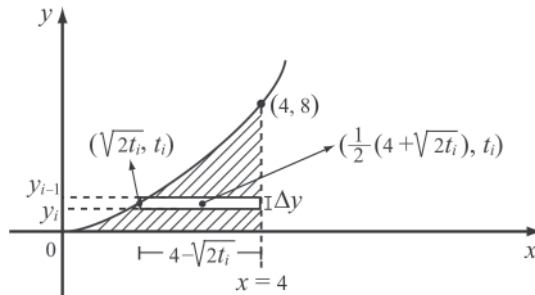


Figura 22.16

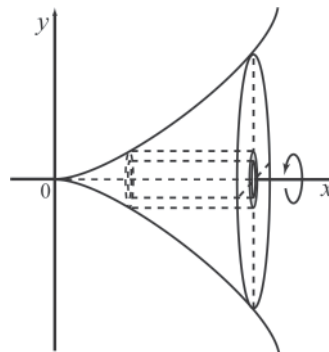


Figura 22.17

Para calcular \bar{x} se requiere conocer el momento con respecto al plano yz . Puesto que se va a utilizar el método de la corteza cilíndrica, el centroide de cada corteza

está en el centro de ella, o sea en el punto $\left(0, \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2t_i}), 0\right)$. Luego,

$$\begin{aligned} Myz &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{k}{2} (4 + \sqrt{2t_i}) 2\pi t_i (4 - \sqrt{2t_i}) \Delta y_i \\ &= \int_0^8 \frac{k}{2} (4 + \sqrt{2y}) 2\pi y (4 - \sqrt{2y}) dy \\ &= k\pi \int_0^8 (16 - 2y)y dy = k\pi \left(8y^2 - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^8 \\ &= k\pi \left(8^3 - \frac{2}{3} 8^3 \right) = \frac{k\pi 8^3}{3}. \end{aligned}$$

Ahora, la masa del sólido esta dada por:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \cdot 2\pi t_i (4 - \sqrt{2t_i}) \Delta y_i \\ &= \int_0^8 k \cdot 2\pi y (4 - \sqrt{2y}) dy = 2k\pi \left(2y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} y^{5/2} \right) \Big|_0^8 \\ &= 2k\pi \left(2 \cdot 8^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} \sqrt{8^5} \right) = 2k\pi \left(2 \cdot 8^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot 8^2 \cdot 2\sqrt{2} \right) \\ &= 2k\pi \left(2 \cdot 8^2 - \frac{8^3}{5} \right) = 2k\pi \cdot 8^2 \left(\frac{2}{5} \right) = \frac{4k\pi 8^2}{5}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{Myz}{m} = \frac{\frac{k\pi 8^3}{3}}{\frac{4k\pi 8^2}{5}} = \frac{10}{3}.$$

Ejemplo 13

Encuentre el centroide del sólido de revolución del ejemplo 11, si la región gira alrededor del eje y .

Solución

La figura 22.18 muestra el elemento rectangular de área y el centro del mismo. La figura 22.19 muestra el elemento de volumen, el cual es una corteza. El centroide del sólido está en el punto $(0, \bar{y}, 0)$.

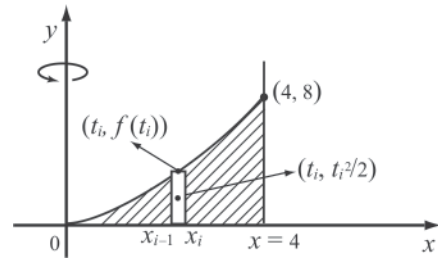


Figura 22.18

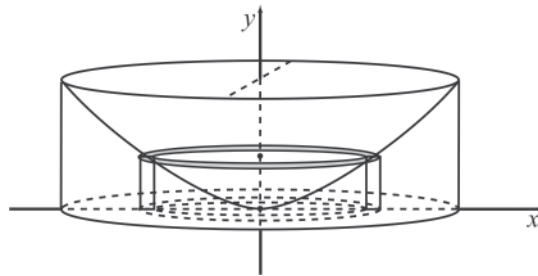


Figura 22.19

Para calcular \bar{y} es necesario encontrar el momento con respecto al plano xz .

El centroide de cada corteza está en el punto $\left(0, \frac{1}{2}t_i^2, 0\right)$. Luego,

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \cdot \frac{1}{2}t_i^2 \cdot 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i \\ &= \int_0^4 \frac{k}{2} x^2 \cdot 2\pi x f(x) dx \\ &= k\pi \int_0^4 x^3 \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{k\pi x^6}{12} \Big|_0^4 = \frac{k\pi 4^6}{12}. \end{aligned}$$

Ahora, la masa del sólido es:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \cdot 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i \\ &= \int_0^4 k \cdot 2\pi \cdot x \cdot f(x) dx = 2\pi k \int_0^4 \frac{1}{2} x^3 dx = \frac{k\pi x^4}{4} \Big|_0^4 = k\pi \cdot 4^3. \end{aligned}$$

Luego

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{k\pi \cdot 4^6}{12}}{k\pi \cdot 4^3} = \frac{4^3}{12} = \frac{16}{3}.$$

Módulo 23

Los teoremas de Pappus

Contenidos del módulo

- 23.1 Teorema de Pappus para áreas de superficie
- 23.2 Teorema de Pappus para sólidos de revolución

Objetivos del módulo

1. Relacionar el área de superficie con la longitud de arco y su centroide.
2. Relacionar el volumen de un sólido de revolución con el área y su centroide.

Preguntas básicas

1. Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor de la recta $y = x - 2$ la lámina homogénea limitada por la semicircunferencia $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x .

Introducción

En el siglo III d.C. Pappus de Alejandría descubrió dos fórmulas que relacionan los anteriores teoremas con las áreas de superficie y con los volúmenes de sólidos de revolución. Dichas fórmulas simplifican notoriamente los cálculos que de la manera usual serían largos y tediosos.

En este módulo presentaremos dichos teoremas y los ilustraremos con algunos ejemplos ya desarrollados en los módulos anteriores.



Pappus de Alejandría

Último gran matemático griego de la escuela alejandrina, Pappus escribió comentarios a los *Elementos* de Euclides y a la *Gran sintaxis matemática* de Tolomeo, llamada *Almagesto* por los árabes. Su obra principal, *Colección matemática*, escrita hacia el 340, reviste una particular importancia desde el punto de vista histórico porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. La *Colección*, compuesta por ocho libros, casi todos conservados (excepto el primero y parte del segundo), contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución.

En geometría existen varios teoremas que son conocidos con el nombre genérico de «teorema de Pappus», atribuidos a él. Entre ellos está el «teorema del centroide de Pappus», que dice que el área de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva plana C sobre un eje externo a C sobre el mismo plano es igual a la longitud de C multiplicada por la distancia recorrida por su centroide. Es decir que, por ejemplo, el área de la superficie de un toroide de eje menor r y eje mayor R es

$$A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi Rr.$$

¿Saben matemáticas las abejas?

Esta cuestión fue «constatada» por Pappus de Alejandría. Su «afirmación» se basaba en la forma hexagonal que imprimen a sus celdillas las abejas para guardar la miel. Las

23.1 Teorema de Pappus para áreas de superficie

abejas, cuando guardan la miel, tienen que resolver varios problemas. Necesitan hacerlo en celdillas individuales, de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas, ya que hay que aprovechar el espacio al máximo. Solo podrían hacerlo con triángulos, cuadrados y hexágonos. ¿Por qué? La respuesta es un problema isoperimétrico (del griego «igual perímetro»). Pappus había demostrado que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados. Por eso, la figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el círculo, que posee un número infinito de lados. No obstante, un círculo deja espacios cuando se rodea de otros círculos. Así, de todas las figuras geométricas que cumplen la condición «mayor número de lados y adyacencia sin huecos», matemáticamente es el hexágono la más óptima. Debido a ello, las abejas construyen sus celdillas de forma hexagonal, ya que, gastando la misma cantidad de cera en las celdillas, consiguen mayor superficie para guardar su miel. La pregunta es: ¿y quién les enseñó esto a las abejas?...

Pappus vivió aproximadamente entre los años 290 y 350.

Teorema 1

Si un arco de curva plana suave s gira alrededor de una recta L en el plano, de tal forma que L no corta el interior del arco (figura 23.1a), entonces el área de superficie S es el producto de la longitud del arco por la distancia recorrida por el centroide durante la rotación. Es decir,

$$S = 2\pi ts. \quad (1)$$

donde t es el radio de la circunferencia que recorre el centroide y s es la longitud de arco.

En particular, y es el caso que demostraremos, si el eje de rotación es el eje x , entonces:

$$S = 2\pi \bar{y} s. \quad (2)$$

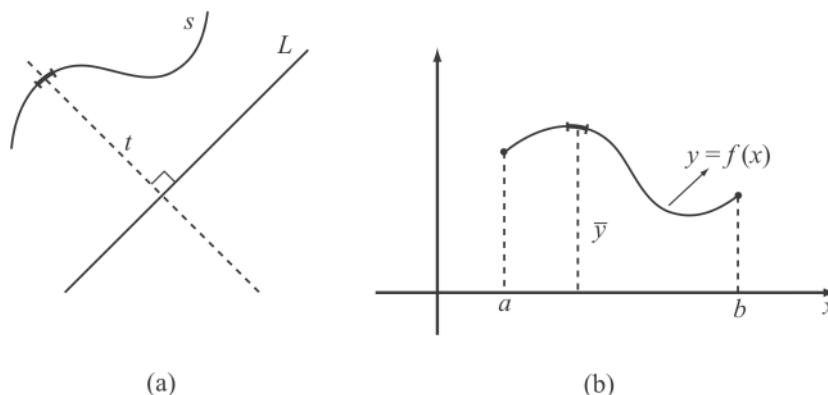


Figura 23.1

Demostración

Supongamos que el arco de curva es el determinado por la función positiva y con derivada continua $y = f(x)$ desde el punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ (figura 23.1b).

Sabemos que el área de superficie S viene dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b y ds. \quad (1)$$

De otro lado, la coordenada \bar{y} del centroide del arco viene dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \delta_1 y ds}{\int_a^b \delta_1 ds} = \frac{\int_a^b y ds}{s}. \quad (2)$$

De (2) se deduce que $\int_a^b y \, ds = \bar{y} \cdot s$. (3)

Sustituyendo (3) en (1) se obtiene finalmente:

$$S = 2\pi \bar{y} s.$$

Ejemplo 1

Use el primer teorema de Pappus para determinar el área de la superficie de una esfera de radio a .

Solución

Como lo demostramos en el ejemplo 9 del módulo 22, el centroide de un alambre delgado homogéneo en forma de una semicircunferencia de radio a es el punto

sobre el eje y $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ (vea la figura 22.8b).

Ahora, el área de la superficie de una esfera se genera al rotar alrededor del eje x la semicircunferencia de la figura 22.8a cuya longitud es $s = \pi a$.

Así que de acuerdo al teorema de Pappus,

$$S = 2\pi \bar{y} s = 2\pi \left(\frac{2a}{\pi}\right) \pi a = 4\pi a^2,$$

resultado que coincide con el del ejemplo 4 de la sección 21.3.

23.2 Teorema de Pappus para sólidos de revolución

Teorema 2

Si una región R del plano gira alrededor de una recta L en el plano, de tal forma que esta última no corta el interior de R (figura 23.2a), entonces el volumen V del sólido de revolución es el producto del área de la región R por la distancia recorrida por el centroide durante la rotación. Es decir,

$$V = 2\pi t \cdot A, \quad (1)$$

donde t es el radio de la circunferencia que recorre el centroide y A es el área de la región R .

En particular, si el eje de rotación es el eje x , entonces:

$$V = 2\pi \bar{y} A. \quad (2)$$



Vea el módulo 23 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

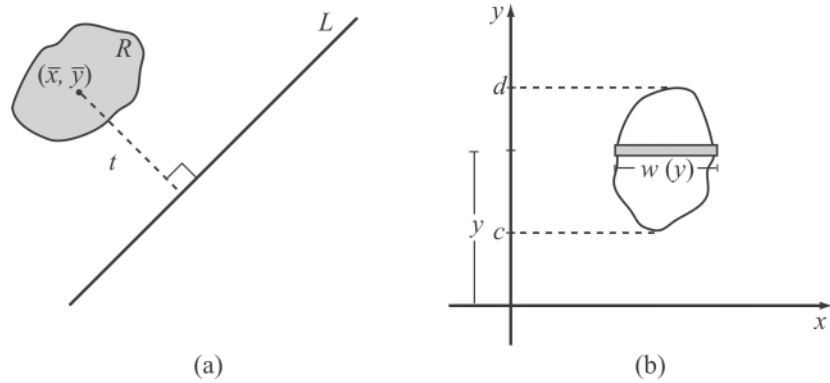


Figura 23.2

Demostración de (2)

Supongamos que la región R de la figura gira alrededor del eje x (figura 23.2b).

Sea $w(y)$ la longitud del elemento diferencial de área. Al girar dicho elemento alrededor del eje x genera una corteza cilíndrica de radio y y altura $w(y)$. El diferencial de volumen dV de la corteza viene dado por:

$$dV = 2\pi y w(y) dy \text{ y } V = 2\pi \int_c^d y w(y) dy. \tag{1}$$

De otro lado, la coordenada \bar{y} del centroide es tal que:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_c^d y w(y) dy}{A} \Rightarrow \int_c^d y w(y) dy = \bar{y} A. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$V = 2\pi \bar{y} A.$$

Ejemplo 2

Use el segundo teorema de Pappus para determinar el volumen de una esfera de radio a .

Solución

Como se demostró en el ejemplo 10 del módulo 22, el centroide de la lámina homogénea y semicircular de radio a está en el punto $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ sobre el eje y (figura 22.9b).

Ahora, el volumen de la esfera se genera al rotar alrededor del eje x el semicírculo de

la figura 22.9b y cuya área es $A = \frac{\pi a^2}{2}$.

De otro lado, el centroide recorre una circunferencia de radio $\frac{4a}{3\pi}$.

Así que la longitud que recorre el centroide es $2\pi\left(\frac{4a}{3\pi}\right) = \frac{8}{3}a$.

Por tanto,

$$V = \frac{8}{3}a \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

que corresponde al volumen de una esfera de radio a .

Ejemplo 3

Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor de la recta $y = x - 2$ la lámina homogénea limitada por la semicircunferencia $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x .

Solución

En la figura 23.3 aparece sombreada la región y el eje de giro escrito en su forma general.

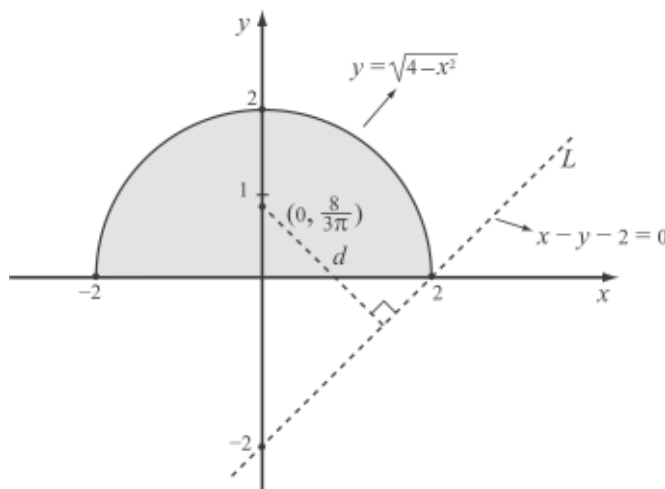


Figura 23.3

Los elementos teóricos dados en el módulo 21 serían insuficientes para determinar el volumen del sólido. Sin embargo, el teorema 2 de Pappus nos permite determinar el volumen exacto del sólido generado.

En primer término, de acuerdo con el ejemplo 10 del módulo 22, el centroide de la

lámina está en el punto $\left(0, \frac{8}{3\pi}\right)$ (figura 23.3).

Al girar la región semicircular sombreada alrededor de la recta $x - y - 2 = 0$, el centroide recorre una circunferencia de radio d . Esto es, si l denota la longitud de dicha circunferencia, entonces

$$l = 2\pi d. \quad (1)$$

Pero d es la distancia del punto $\left(0, \frac{8}{3\pi}\right)$ a la recta de ecuación:

$$x - y - 2 = 0.$$

Así que $d = \frac{\left|1 \cdot (0) + (-1) \frac{8}{3\pi} + (-2)\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$ (vea «Distancia de un punto a una recta»,

sección 2.5, Apéndice II del texto *Elementos básicos de cálculo diferencial*)

$$= \frac{\left|-\frac{8}{3\pi} - 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{8 + 6\pi}{3\sqrt{2}\pi}. \quad (2)$$

Es decir,

$$l = 2\pi \left(\frac{8 + 6\pi}{3\sqrt{2}\pi}\right) = \frac{4}{3\sqrt{2}}(4 + 3\pi).$$

También el área del semicírculo de radio 2 es $A = 2\pi$.

Por tanto, de acuerdo con el teorema 2 de Pappus, el volumen del sólido viene dado por:

$$\begin{aligned} V &= l \cdot A = 2\pi \cdot \frac{4}{3\sqrt{2}}(4 + 3\pi) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi(4 + 3\pi). \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Utilice el teorema de Pappus para sólidos de revolución para calcular el volumen del toro (dona) generado al rotar un círculo de radio a , alrededor de una recta l situada en su mismo plano y a una distancia b de su centro ($b > a$).

Solución

La figura 23.4 ilustra la situación en la cual asumimos que el círculo de radio a gira alrededor del eje y .

Ahora, el centroide del círculo que está en su centro (ejemplo 8, módulo 22), al girar alrededor del eje y , recorre una circunferencia de radio b . Entonces la longitud recorrida por el centroide es

$$l = 2\pi b. \quad (1)$$

De otro lado, el área del círculo es

$$A = \pi a^2. \quad (2)$$

De acuerdo con el teorema 2 de Pappus:

$$V = l \cdot A. \quad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se obtiene finalmente:

$$V = 2\pi^2 a^2 b,$$

que corresponde al volumen pedido.

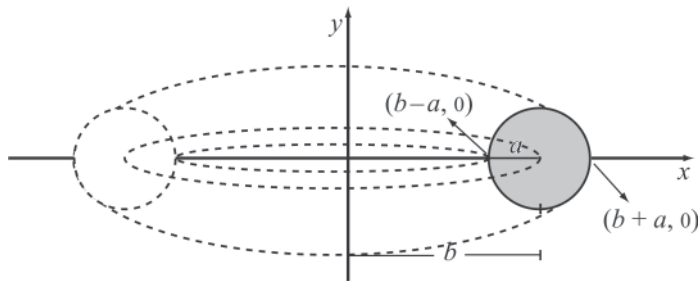


Figura 23.4

Se invita al estudiante a desarrollar el ejercicio anterior usando el método de la corteza cilíndrica descrito en el módulo 21, para que note la ventaja del teorema de Pappus frente a cualquier otro método para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Módulo 24

Trabajo mecánico

Contenidos del módulo

- 24.1 Trabajo realizado por una fuerza variable
- 24.2 Ejemplos ilustrativos sobre trabajo

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones físicas. En particular, usarla en la determinación del trabajo necesario para desplazar un objeto bajo la acción de una fuerza variable $f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$.

Preguntas básicas

- Un tanque de forma semiesférica de radio 5 m se llena de agua hasta una altura de 3 m.
1. ¿Cuál es el trabajo necesario para bombear el agua hasta la parte superior del tanque?
 2. ¿Cuál es el trabajo necesario para bombear el agua hasta 2 m por encima de la parte superior del tanque?

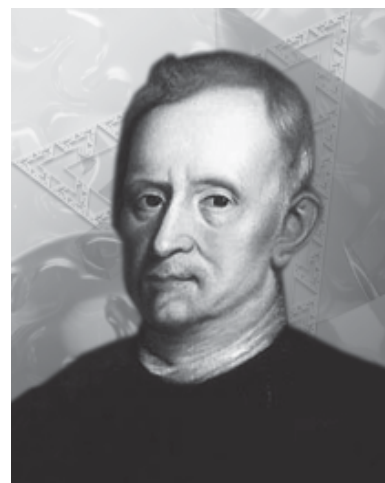
Introducción

Una aplicación de la integral definida en problemas de la Física se tiene en el estudio del concepto de trabajo. Para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante que desplaza un cuerpo una distancia d basta multiplicar la magnitud de la fuerza por la distancia recorrida. Si queremos calcular el trabajo realizado por una fuerza cuya magnitud varía a lo largo del recorrido, es necesario utilizar la integral definida.

Asumiremos que se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si sobre un sistema físico actúan las fuerzas $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ y realizan trabajos W_1, W_2, \dots, W_n , entonces el trabajo total W es la suma de los trabajos parciales, esto es, $W = \sum_{i=1}^n W_i$.
2. El trabajo realizado por una fuerza de magnitud $F(x)$ para mover un objeto desde a hasta b y luego hasta c es igual al trabajo que realiza dicha fuerza para moverlo desde a hasta c .
3. Si se tienen dos fuerzas de magnitudes $F(x)$ y $G(x)$ tales que $F(x) \leq G(x)$ en $[a, b]$, entonces el trabajo realizado por F en $[a, b]$ es menor o igual al trabajo realizado por G en $[a, b]$.

Mediante estas propiedades y las consideraciones adicionales que haremos se estudiará el concepto de trabajo realizado por una fuerza variable.



Robert Hooke

Robert Hooke nació el 18 de julio en 1635 en Freshwater, frente a la costa meridional de Inglaterra, y falleció el 3 de marzo de 1702 en Londres. Fue un niño sensible y enfermizo que no podía correr ni jugar como los demás. Confinado en su hogar, desarrolló su mente inventiva haciendo toda clase de juguetes mecánicos, como relojes de sol, molinos de agua y barcos. Su padre lo instruyó no sólo en lectura y escritura, sino también en aritmética y en las obras de los autores clásicos.

Tenía dieciocho años de edad cuando ingresó en Oxford y su pobreza fue, en el fondo, una ventaja, pues el tiempo que utilizaban los otros estudiantes en diversiones frívolas, Hooke lo dedicaba a ganarse la vida. Su aplicación en los estudios y su genio científico incipiente atrajeron pronto la atención de uno de sus maestros, Robert Boyle, el notable químico y físico que realizó en su laboratorio algunos experimentos sobre la naturaleza de los gases. Hooke se consideró muy afortunado cuando Boyle le dio el puesto de ayudante de laboratorio para auxiliario en sus experimentos. Así nació entre los dos científicos una amistad cordial que duró toda la vida.

La primera misión de Hooke en el laboratorio de Boyle fue la de diseñar y crear una bomba para comprimir el aire y producir el vacío. Boyle usó la bomba de aire construida ingeniosamente por Hooke para completar los experimentos que se tradujeron en la formulación de la ley de los gases, o ley de Boyle-Mariotte (pues también fue formulada, en forma independiente, por su colega francés Edme Mariotte), que establece que a una temperatura constante la presión y el volumen de un gas son inversamente proporcionales.

Hooke realizó algunos de los descubrimientos e invenciones más importantes de

su tiempo, aunque en muchos casos no consiguió terminarlos. Formuló la teoría del movimiento planetario como un problema de mecánica, y comprendió, pero no desarrolló matemáticamente, la teoría fundamental con la que Newton formuló la ley de la gravitación. Entre sus aportaciones más importantes están la formulación correcta de la teoría de la elasticidad (que establece que un cuerpo elástico se estira proporcionalmente a la fuerza que actúa sobre él), conocida como ley de Hooke, y el análisis de la naturaleza de la combustión. Además fue el primero en utilizar el resorte espiral para la regulación de los relojes y desarrolló mejoras en los relojes de péndulo. También fue pionero en investigaciones microscópicas, entre las que se encuentra el descubrimiento de las células vegetales.

A Hooke se le considera el fundador de la meteorología científica, pues ideó los instrumentos usados para registrar los cambios de las condiciones del tiempo y perfeccionó los métodos para registrar sistemáticamente la información obtenida. En la lista de instrumentos que inventó figuran el barómetro de cuadrante, un termómetro de alcohol, un cronómetro, el primer higrómetro, un anemómetro y un «reloj» para registrar automáticamente las lecturas de sus diversos instrumentos meteorológicos. La supremacía sobre los mares, que conservaría Inglaterra durante varias generaciones, debió mucho al genio inventivo de Hooke, pues en los días de los barcos de vela el dominio de la navegación dependía de la habilidad para predecir con exactitud los cambios de tiempo.

24.1 Trabajo realizado por una fuerza variable

Tomemos un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea P una partición del intervalo tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Supongamos que $f(x)$ es la magnitud de una fuerza variable que actúa sobre un cuerpo desplazándolo sobre el eje x , desde un punto $x = a$ hasta un punto $x = b$; además $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$.

Ahora consideremos la cantidad de trabajo realizada por f para mover el objeto cada Δx_i .

Si hacemos la norma de la partición suficientemente pequeña, la fuerza f cambia muy poco en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es decir, es «casi constante» y la podemos aproximar a $f(t_i)$, con $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$.

Por tanto, un valor muy aproximado del trabajo realizado por la fuerza en el i -ésimo subintervalo será:

$$\Delta W_i \approx f(t_i)\Delta x_i,$$

y aplicando la propiedad 1 de la «Introducción», una buena aproximación al trabajo total es

$$\sum_{i=1}^n W_i \approx \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i.$$

Lo anterior nos permite definir el trabajo total W de la siguiente manera:

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Observaciones

- i. Si $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y c es un punto de $[a, b]$, el trabajo W_a^b que realiza la fuerza para mover un objeto desde a hasta b se puede calcular mediante la suma de las integrales definidas

$$W_a^b = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- ii. El trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde b hasta a es el opuesto del trabajo realizado por la misma fuerza para moverlo desde a hasta b . Esto es, $W_b^a = -W_a^b$.

24.2 Ejemplos ilustrativos sobre trabajo

Ejemplo 1

De acuerdo con la ley de Hooke, en un cuerpo elástico la fuerza restauradora es proporcional a la deformación o cambio de longitud x . Con base en lo anterior, encuentre el trabajo necesario para estirar un resorte de una longitud L , una distancia d .

Solución

La figura 24.1 ilustra la situación planteada. Inicialmente, el resorte tiene una longitud igual a L (figura 24.1a). Luego se le aplica una fuerza $f(x)$ en la dirección del eje x que permite extenderlo a una distancia x (figura 24.1b).

De acuerdo con la ley de Hooke, $f(x) = kx$. Por tanto, el trabajo realizado para estirarlo a una distancia d está dado por:

$$f(x) = kx.$$

$$W = \int_0^d f(x) dx = k \int_0^d x dx$$

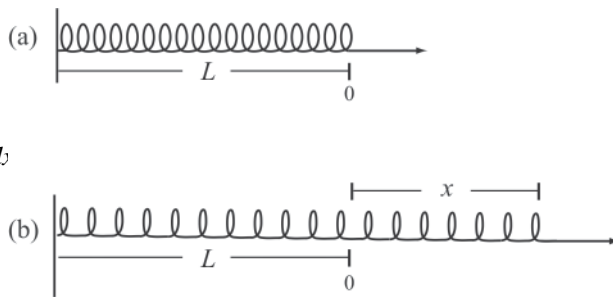


Figura 24.1

Ejemplo 2

De acuerdo con el ejemplo anterior, encuentre el trabajo necesario para estirar un resorte 2 pulgadas, si se sabe que la fuerza necesaria para mantenerlo extendido 1 pulgada es igual a 3 lb.

Solución

Como la fuerza necesaria para mantenerlo extendido 1 pulgada es igual a 3 lb, se tiene, de la fórmula: $f(x) = kx$.

Así que,

$$3 = k \cdot 1,$$

de donde $k = 3$.



Vea el módulo 24 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Por tanto, del ejemplo 1, $\int_0^1 2x \, dx = 1$, y como $d = 2$ pulgadas, se concluye entonces que

Ejemplo 3

Un tanque que tiene forma de cono circular recto de altura h y radio de la base r está lleno de agua. Calcule el trabajo necesario para bombear toda el agua hasta la parte superior del tanque.

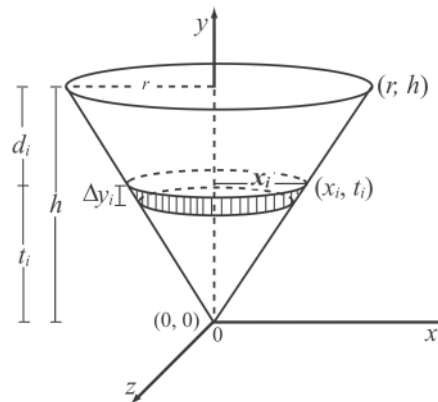


Figura 24.2

Solución

La figura 24.2 muestra la forma como se toman las coordenadas y los elementos de volumen.

El disco i -ésimo tendrá un volumen $\Delta v_i = \pi x_i^2 \Delta y_i$.

Por tanto, la fuerza necesaria para bombear el agua correspondiente a dicho elemento será igual a su peso, o sea $\rho \pi x_i^2 \Delta y_i$ (donde ρ es la densidad por unidad de volumen).

Ahora, la distancia que debe recorrer este elemento está dada por $h - t_i$ y el trabajo realizado para bombearlo hasta la parte superior está dado por:

$$W_i = \rho \pi (h - t_i) x_i^2 \Delta y_i.$$

De otro lado, los valores de x_i y t_i se pueden relacionar mediante la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (r, h) , esto es,

$$y = \frac{h}{r}x,$$

de donde $x_i = \frac{r}{h}t_i$.

Por tanto, el trabajo necesario para bombear el agua a la parte superior será:

$$\begin{aligned} W_0^h &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho\pi \frac{r^2}{h^2} t_i^2 (h - t_i) \Delta y_i = \int_0^h \rho\pi \frac{r^2}{h^2} y^2 (h - y) dy \\ &= \frac{\rho\pi r^2}{h^2} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy = \frac{\rho\pi r^2}{h^2} \left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{1}{12} \rho\pi r^2 h^2. \end{aligned}$$

Módulo 25

Presión de líquidos

Contenidos del módulo

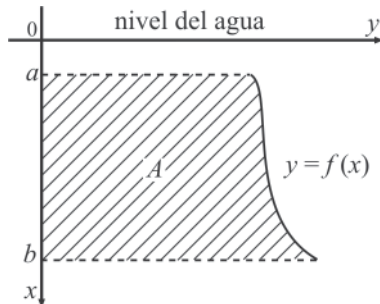
25.1 Fuerza hidrostática

Objetivos del módulo

1. Usar la integración en aplicaciones físicas. En particular, utilizarla en la determinación de la fuerza ejercida por un líquido sobre una placa sumergida en él.

Preguntas básicas

1. Calcule la fuerza total ejercida por el agua sobre la superficie de área A y limitada por el eje x , la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ de la siguiente figura. Demuestre que la fuerza total es la misma que resultaría si la placa se colocara horizontalmente a una profundidad \bar{x} , siendo la abscisa de su centroide.

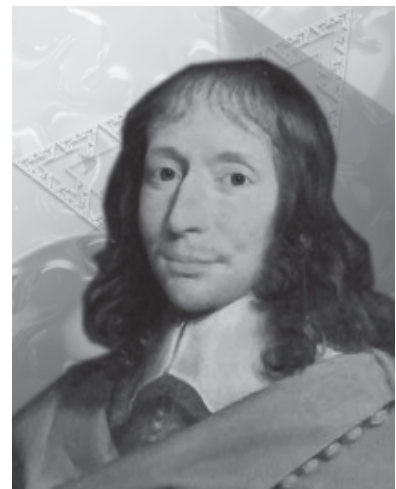


Introducción

Si se sumerge horizontalmente una placa dentro de un líquido, éste ejerce una fuerza constante en todos los puntos de ella. Al cociente de dividir la magnitud de la fuerza por el área de la placa se le llama *presión del líquido*.

La dirección de la fuerza es normal a la superficie de la placa y la magnitud está dada por $w \cdot h \cdot a$, en donde w es el peso por unidad de volumen del líquido, h es la profundidad de la placa sumergida y a es el área de la misma. La presión P estará entonces dada por la fórmula $P = \frac{wha}{a} = wh$.

Si tenemos una placa sumergida en un líquido y su posición no es horizontal, entonces la presión ya no es uniforme, y es mayor en los puntos que están sobre la misma horizontal. Estamos interesados en calcular la fuerza total que ejerce un líquido sobre una placa vertical sumergida en él.



Blaise Pascal

El físico, matemático y filósofo francés Blaise Pascal nació el 19 junio de 1623 en Clermont y falleció el 19 de agosto de 1662 en París. Su padre, Étienne, tenía una educación ortodoxa y decidió educarlo él mismo. Decidió que no estudiara matemáticas antes de los quince años y todos los textos de esta ciencia fueron sacados de su hogar. Pascal, sin embargo, sintió curiosidad por todo esto y comenzó a trabajar en geometría a la edad de doce años. Pronto descubrió que la suma de los ángulos de un triángulo correspondía a dos ángulos rectos, y cuando su padre lo comprobó, se enterneció tanto que le entregó un texto de Euclides.

A la edad de catorce años Pascal acudía a las reuniones con el monje y matemático jesuita Mersenne, cuyo cuarto en París era lugar frecuente de reuniones de Fermat, Gassendi y otros matemáticos famosos de la época. A los dieciséis años presentó, en una de las reuniones de Mersenne, un trozo de papel con escritos que contenía algunos teoremas de geometría proyectiva y que incluían lo que se ahora se conoce como el hexágono místico de Pascal. En años posteriores trabajó en las secciones cónicas y desarrolló importantes teoremas en la geometría proyectiva. En su correspondencia con Pierre de Fermat dejó establecida la creación de la teoría de la probabilidad.

Pascal inventó la primera calculadora digital en el año 1642. El aparato, llamado «pascalina», se asemejaba a una calculadora mecánica de la década de 1940. También inventó la jeringa y llevó a cabo estudios en geometría, hidrodinámica, hidrostática y presión atmosférica.

Su más famoso trabajo en filosofía es *Pensées*, una colección de pensamientos personales del sufrimiento humano y la fe en Dios. «Si Dios no existe, uno no pierde nada al creer en él; mientras que si existe, uno pierde todo por no creer», dijo alguna vez.

Su último trabajo fue la cicloide, la curva trazada por un punto en la circunferencia de un rollo circular. Pascal murió a la edad de 39 años, después de sufrir un dolor intenso debido al crecimiento de un tumor maligno en su estómago, que luego se le propagó al cerebro.

El principio de Pascal y sus aplicaciones

La presión aplicada en un punto de un líquido contenido en un recipiente se transmite con el mismo valor a cada una de las partes del mismo. Tal enunciado, obtenido a partir de observaciones y experimentos por este genial matemático, se conoce como «principio de Pascal», y puede ser interpretado como una consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática y del carácter incompresible de los líquidos.

La prensa hidráulica constituye la aplicación fundamental del principio de Pascal y también un dispositivo que permite entender mejor su significado. Consiste, en esencia, en dos cilindros de diferente sección comunicados entre sí, y cuyo interior está completamente lleno de un líquido que puede ser agua o aceite. Dos émbolos de secciones diferentes se ajustan, respectivamente, en cada uno de los dos cilindros, de modo que estén en contacto con el líquido. Cuando sobre el émbolo de menor sección se ejerce una fuerza la presión que se origina en el líquido en contacto con él se transmite íntegramente y de forma instantánea a todo el resto del líquido; por tanto, será igual a la presión que ejerce el líquido sobre el émbolo de mayor sección (esto significa que si, por ejemplo, una sección es veinte veces mayor que la otra, la fuerza aplicada sobre el émbolo pequeño se ve multiplicada por veinte en el émbolo grande).

La prensa hidráulica es una máquina simple semejante a la palanca de Arquímedes, que permite amplificar la intensidad de las fuerzas y constituye el fundamento de elevadores, prensas, frenos y muchos otros dispositivos hidráulicos de maquinaria industrial.

25.1 Fuerza hidrostática

Consideremos la placa que se muestra en la figura 25.1 y que está limitada por las rectas $x = a$, $x = b$ y por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ que supondremos integrables en $[a, b]$ y tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, sumergida en un líquido de densidad de peso w .

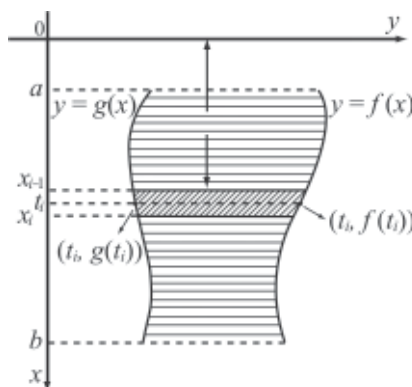


Figura 25.1

La presión sobre todos los puntos del i -ésimo elemento de área variará entre $w x_{i-1}$ y $w x_i$, y si se toma t_i tal que $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $w t_i$ será un valor intermedio entre los dos anteriores.

Un valor aproximado de la magnitud de la fuerza ejercida por el líquido sobre el i -ésimo elemento de área será $\Delta F_i = w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$, en donde los dos últimos factores representan el área ΔA_i del elemento.

Un valor aproximado de la magnitud de la fuerza ejercida sobre toda la superficie estará dada por:

$$F \approx \sum_{i=1}^n w t_i \Delta A_i = \sum_{i=1}^n w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i.$$

La fuerza total será entonces:

$$F = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i = \int_a^b w x [f(x) - g(x)] dx.$$

Ejemplo 1

Se sumerge verticalmente una placa en forma de triángulo isósceles de base 6 m y altura 5 m de tal modo que su vértice superior queda a 3 m por debajo del nivel del agua (figura 25.2). Calcule la fuerza total ejercida por el agua sobre la superficie del triángulo.

Solución

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 0) y (8, 3) está dada por:

$$y = \left(\frac{3}{8-3} \right) (x-3) \Leftrightarrow y = \frac{3}{5} (x-3),$$

y la que pasa por (3, 0) y (8, -3) tiene como ecuación

La fuerza sobre el i -ésimo elemento de área será:

$$\Delta F_i = wt_i \left[\left(\frac{3}{5} \right) (t_i - 3) - \left(-\frac{3}{5} \right) (t_i - 3) \right] \Delta x_i,$$

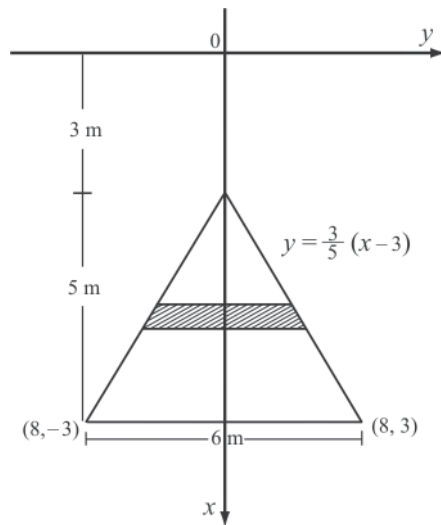
y la fuerza total:

$$F = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n wt_i \left[\left(\frac{6}{5} \right) (t_i - 3) \right] \Delta x_i = \int_3^8 wx \left(\frac{6}{5} \right) (x-3) dx$$

$$= \left(\frac{6w}{5} \right) \int_3^8 (x^2 - 3x) dx = \left(\frac{6w}{5} \right) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_3^8 = 95w.$$

$$y = -\frac{3}{5} (x-3).$$

Como para el agua $w = 1 \text{ ton/m}^3$, $F = 95 \text{ ton}$.



Vea el módulo 25 del programa de televisión *Elementos básicos de cálculo integral y series*

Figura 25.2

Ejemplo 2

Un depósito limitado en sus extremos por dos semicírculos de radio 20 cm (figura 25.3) está lleno con un líquido cuyo peso w es de 3 g por centímetro cúbico. Calcule la fuerza total ejercida por el líquido sobre las paredes semicirculares.

Solución

La ecuación de la circunferencia de radio 20 cm y centro en el origen es
Resolviendo para y obtenemos:

$$y = \pm\sqrt{400 - x^2}.$$

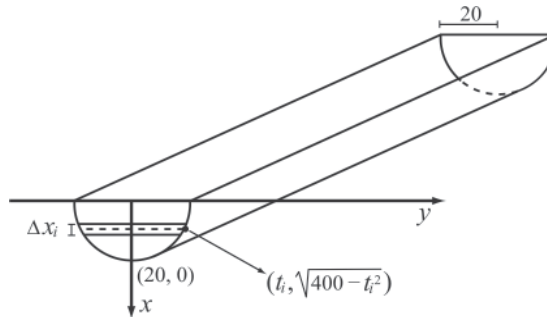


Figura 25.3

La fuerza del líquido sobre el elemento de área es

$$wt_i \cdot 2\sqrt{400 - t_i^2} \Delta x_i,$$

entonces la fuerza total será:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2wt_i \sqrt{400 - t_i^2} \Delta x_i \\ &= \int_0^{20} 2wx\sqrt{400 - x^2} dx \\ &= -\frac{2w}{3} (400 - x^2)^{3/2} \Big|_0^{20} \\ &= \frac{8000w}{3} = 8000 \text{ g.} \end{aligned}$$

Ejercicios

Módulos 18 al 25

I Áreas entre curvas

En las figuras 1 a 8 que aparecen a continuación elija el elemento diferencial de área más apropiado y luego calcule el área de la región.

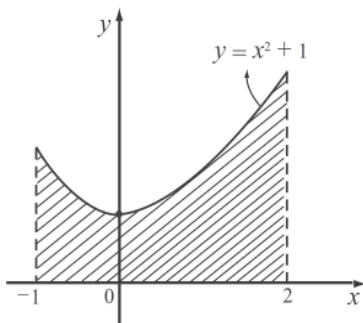


Figura 1

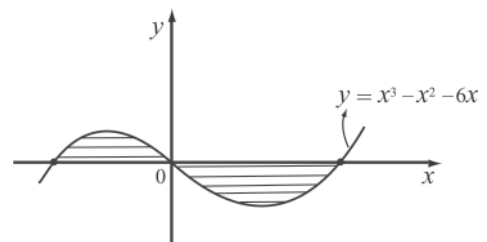


Figura 2

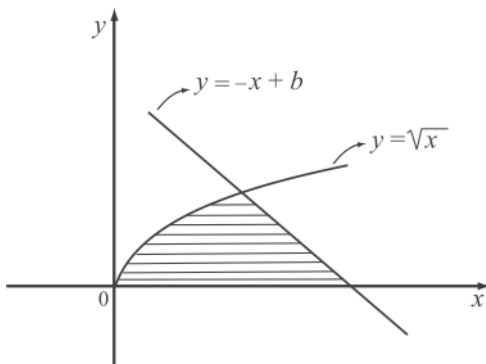


Figura 3

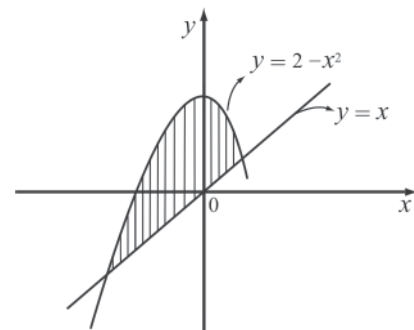


Figura 4

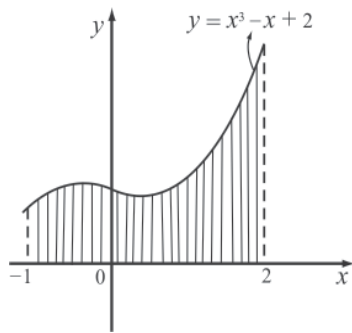


Figura 5

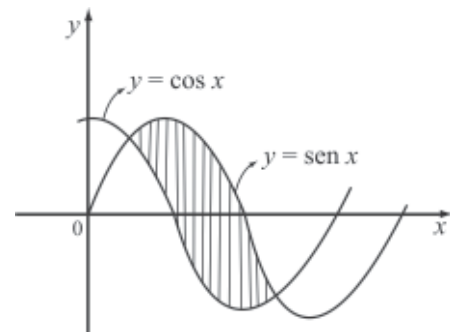


Figura 6

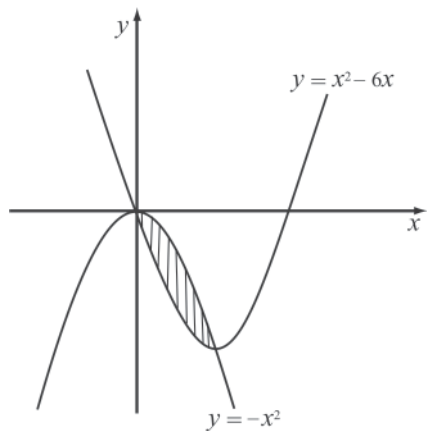


Figura 7

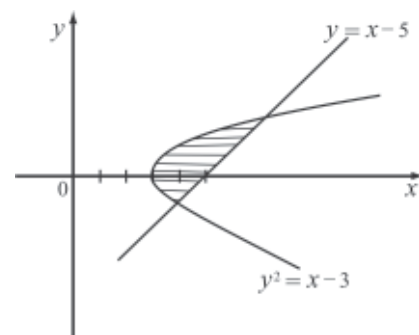


Figura 8

9. Calcule las áreas de las regiones de las figuras 3, 8 tomando diferenciales de área perpendiculares al eje x .
10. Calcule las áreas de las regiones de las figuras 4, 6 tomando diferenciales de área paralelos al eje x .
11. En los ejercicios a - s dibuje la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, construya el diferencial de área más apropiado y luego use una integral para calcular el valor del área.

a. $y = 2x^2, y = x^2 + 1.$	b. $y = 4x - x^2, y = 0,$ entre $x = 1$ y $x = 3.$
c. $y = \sqrt{x-4}, y = 0$ y $x = 8.$	d. $y = x^2 - 4x + 3, x - y - 1 = 0.$
e. $y = x^2 - 2, y = 2x^2 + x - 4.$	f. $x = -y^2 + y + 2, x = 0.$
g. $x = y^2 - 3y, x + y - 2 = 0.$	h. $y^2 - 2x = 0, y^2 + 4x - 12 = 0.$
i. $y = 2 - x^2, y = x, y = -x.$	J. $y = 3 - x^2, y = 2x, y = -2x.$
k. $y = x^2, y = 3.$	l. $x = y^2, x = 2, x = 4.$
m. $x^2 - y - 9 = 0, y - x + 3 = 0.$	n. $y = x^3 - x, y = 0.$

- o. $y^2 = x - 3$, $y^2 = 9 - x$ considerando primero elementos verticales de área y luego elementos horizontales.
- p. $y^2 = 4 - x$, $3y - 2x - 9 = 0$, $9y - x - 3 = 0$.
- q. $y = -x^3 + x^2 - 2x$, $x = \frac{-3}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ y el eje x .
- r. $y^2 - 2y + 4x - 7 = 0$, $y = -x$.
- s. $x = y^2$, $x = 1$.
12. Calcule por integración el área del triángulo determinado por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x - 2$.
13. Calcule por integración el área del trapecio determinado por las rectas $y = 3x$, $y = x - 8$, $y = 3$ y el eje x .
14. Encuentre el área de la región que está por encima de la parábola $x^2 = py$ e interna al triángulo formado por las rectas $y = x + 3p$, $y = 3p - x$ y el eje x .
15. Encuentre la razón de cambio de A con respecto a m (esto es, $\frac{dA}{dm}$), si A es el área comprendida por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = mx$.
16. Use el cálculo integral para demostrar que si S es un sector circular limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y ángulo central α , $0 < \alpha < \pi/2$, entonces el área de S viene dada por $A(s) = \frac{1}{2}\alpha a^2$ (ayuda: considere la figura 9).

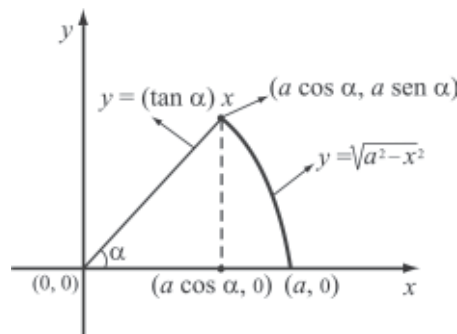


Figura 9

17. Encuentre el área de la región limitada por la curva $y = e^{-x}$ y la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1/e)$.
18. Sea R la región acotada por $x = 0$, $y = e^x$ y la recta tangente a $y = e^x$ que pasa por el origen. Determine el área de R .
19. Encuentre el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $x = e$.

20. Encuentre el área de la región limitada por el eje de las x , la curva $y = \frac{18}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ y las rectas $x = \sqrt{3}$ y $x = 3\sqrt{3}$.
21. Encuentre el área de la región limitada por $y = \frac{x}{(x-1)^2}$, $y = 0$, $x = -6$ y $x = 0$.
22. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = \frac{2}{4x^2 - 1}$ a la derecha de $x = 1$ (ayuda: use fracciones parciales).
23. Encuentre el área de la región bajo la curva $y = \frac{1}{x^2 + x}$ a la derecha de $x = 1$.
24. Pruebe que el área de la región bajo la curva $y = \frac{1}{x}$, el eje x , en el intervalo $[1, +\infty)$ es infinita.
25. Halle por integración el área del cuadrilátero, determinado por las rectas $3x - 8y + 21 = 0$, $2x + y - 24 = 0$ y el eje x .

II. Volúmenes de sólidos por secciones planas

- Encuentre el volumen de un sólido que tiene base circular de radio r , y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.
- Encuentre el volumen de un sólido que tiene base circular de radio r , y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectángulos isósceles que tienen la hipotenusa en el plano de la base.
- Encuentre el volumen de un tetraedro que tiene tres caras mutuamente perpendiculares si las tres aristas mutuamente perpendiculares tienen medidas a , b y c .
- Dos cilindros circulares rectos de radio 3 cm cada uno se intersecan en ángulo recto. Encuentre el volumen del sólido común a los dos cilindros.
- Se corta una cuña en un cono circular recto por medio de un plano perpendicular al eje del cono y otro plano que forma un ángulo de 60° con el primero y lo corta a lo largo de un diámetro de la sección plana circular que resulta de la intersección del primer plano y el cono. Halle el volumen de la cuña si el cono tiene 6 m de altura y el radio de la base es de 2 m.
- Un sólido tiene como base la región acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$. Si toda sección plana perpendicular al eje x es un cuadrado, encuentre el volumen del sólido.
- Un sólido tiene como base la región acotada por las curvas $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$ y la recta $x = 1$. Si toda sección plana perpendicular al eje x es un semicírculo, encuentre el volumen del sólido.
- La base de un sólido es el conjunto de ordenadas de una función no negativa f en el intervalo $[0, a]$. Todas las secciones perpendiculares a ese intervalo son cuadrados. El volumen del sólido formado viene

dado por $V = a^3 - 2a \cos a + (2 - a^2) \operatorname{sen} a$, para todo $a \geq 0$. Suponiendo que f es continua en $[0, a]$, calcule $f(a)$.

III. Volúmenes de sólidos de revolución

1. Encuentre por integración el volumen del cono circular recto de altura h y radio de la base a .
2. Encuentre el volumen de la esfera obtenida al rotar alrededor del eje x el área del semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.
3. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por esta recta y la parábola $x = 4 + 6y - 2y^2$.
4. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y^2 = 4x$ e $y = x$ alrededor del eje x .
5. Un tanque esférico de radio 3 m está lleno de agua hasta una altura de 1,5 m. Calcule por integración el volumen de agua que contiene.
6. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(2, 1)$ alrededor del eje y .
7. Encuentre por integración el volumen de un tronco de cono de altura h y radios R y r .
8. Halle el volumen del paraboloides obtenido al rotar alrededor del eje y la región encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 5$.

En los ejercicios 9 a 17 utilice el método de la corteza cilíndrica.

9. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar, alrededor del eje x , la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
10. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar el triángulo comprendido por las rectas $y = x$, $y = 2x$ e $y = 3x - 2$ alrededor de: a) el eje x , b) el eje y .
11. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región comprendida por la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2 - 4x$ alrededor de: a) la recta $x = -1$, b) la recta $y = -4$.
12. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región comprendida por las parábolas $y = -x^2$, $y = x^2 - 6x$ alrededor del eje x . Tome elementos de área paralelos al eje de giro.
13. Encuentre el volumen generado al rotar, alrededor del eje y , la región comprendida por la parábola $y^2 = x - 3$ y la recta $y = x - 5$.

14. Demuestre que el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje y la región comprendida por los ejes coordenados y la recta que pasa por los puntos $(R, 0)$ y $(0, H)$ está dado por $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
15. Encuentre el volumen generado al rotar el rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(R, 0)$, $(0, H)$, (R, H) , alrededor del eje y .
16. Encuentre el volumen de la esfera generada al rotar la semicircunferencia superior al eje x , que tiene 5 cm de radio y centro en $(0, 0)$, alrededor del eje x .
17. a. Encuentre el volumen del sólido resultante si al sólido del ejercicio 8 se le hace un orificio de 2 cm de radio, a lo largo del eje x .
- b. Encuentre el volumen del orificio.
18. En los literales $a-h$ calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana dada alrededor del eje dado.
- a. La región plana de la figura del ejercicio 1, sección 1, alrededor del eje x .
- b. La región anterior alrededor de la recta $x = 2$.
- c. La región plana de la figura del ejercicio 2, sección 1, alrededor del eje x .
- d. La región plana de la figura del ejercicio 3, sección 1, alrededor del eje x y alrededor del eje y .
- e. La región plana de la figura del ejercicio 4, sección 1, alrededor de: $x = 1$, $y = 2$, $x = 2$.
- f. La región plana del ejercicio 6, sección 1, alrededor de: el eje y , $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $y = 1$.
- g. La región plana de la figura del ejercicio 7, sección 1, alrededor de: el eje x , el eje y , $x = 3$.
- h. La región plana de la figura del ejercicio 8, sección 1, alrededor de: $x = 1$, $y = -1$, $y = 2$.
19. La región plana limitada por la curva $y = f(x) = e^{-x}$ y el eje x gira alrededor del eje x . Determine el volumen del sólido generado.
20. El mismo ejercicio anterior, girando alrededor del eje y .
21. La región plana limitada por la curva $y = f(x) = \frac{1}{x}$, el eje x y la recta $x = 1$ gira alrededor del eje x . Determine su volumen.
22. Bosqueje la región R del plano limitada por $y = \frac{1}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$. Formule (pero no evalúe) integrales para cada uno de los literales $a-d$:
- a. Área de R .

- b. Volumen del sólido generado al rotar R alrededor al eje y .
- c. Volumen del sólido generado al rotar R alrededor al eje $y = -1$.
- d. Volumen del sólido generado al rotar R alrededor al eje $x = 4$.
23. En una esfera sólida de radio b se perfora un hoyo redondo de radio a ($b > a$) pasando por el centro. Encuentre el volumen que queda del sólido.
24. Formule la integral (usando cortezas cilíndricas) del volumen del toro generado al rotar la región interior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor del recta $x = b$ ($b > a$).
25. La región sombreada (figura 10) entre un arco de $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ y la recta $y = k$, $0 \leq k \leq 1$ se gira alrededor de la recta $y = k$, generando un sólido V . Determine el valor de k para que:
- a. V sea un volumen máximo.
- b. V sea un volumen mínimo.

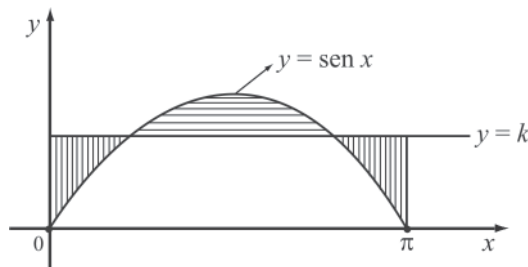


Figura 10

26. La gráfica de la región limitada por $y = x + \sin x$, $y = 0$, $x = \pi$, gira alrededor del eje de las x . Encuentre el volumen del sólido resultante.
27. La región acotada por $y = (\sin x^2)^2$, $y = 0$ y $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido resultante.
28. Sea R la región del primer cuadrante bajo la curva $y = x^{-2/3}$ y a la izquierda de $x = 1$.
- a. Demuestre que el área de R es finita y encuentre su valor.
- b. Demuestre que el volumen del sólido generado al rotar R alrededor del eje x es infinito.
29. La región limitada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje y . Encuentre el volumen del sólido resultante.

30. Sea R la región acotada por $x = 0$, $y = e^x$ y la recta tangente a $y = e^x$ que pasa por el origen. Encuentre:
- El área de R .
 - El volumen del sólido obtenido cuando R gira alrededor del eje x .

IV. Momentos, centros de masa y los teoremas de Pappus

- Un conjunto de masas de 5, 10, 15 y 20 g están situadas sobre el eje x en los puntos de abscisas -3 , -2 , 0 y 5 cm, respectivamente. Halle el centro de masa del sistema.
- Halle el centro de masa de un conjunto de masas de 5, 10 y 50 kg situadas sobre el eje y en los puntos cuyas ordenadas son -3 , 0 y 10 m, respectivamente.
- La longitud de una varilla es de 50 cm y la densidad lineal a una distancia x de uno de los extremos es $(3x + 1)$ g/cm. Encuentre la masa total de la varilla y su centro de masa.
- Una varilla mide 2 m y su densidad lineal en cada punto es proporcional al cubo de la distancia de ese punto a uno de sus extremos, siendo la densidad máxima de 16 kg/m. Encuentre la masa total de la varilla y su centro de masa.
- La longitud de una varilla es L cm y el centro de masa está situado a $3/4$ del extremo izquierdo. Si la medida de la densidad lineal en un punto es proporcional a una potencia de su distancia al extremo izquierdo y la densidad lineal en el extremo derecho es de 20 g/cm, encuentre la densidad en cualquier punto de la varilla y su masa total.
- Demuestre que si la masa total de una varilla de longitud L y densidad lineal uniforme se coloca en su punto medio, el momento respecto a cualquiera de los extremos es igual al de la varilla respecto al mismo extremo.
- Una varilla de longitud 60 cm tiene una densidad lineal $\delta_1(x) = kx^2$ (la densidad varía proporcionalmente al cuadrado de la distancia x de uno de sus extremos). Si la densidad en el extremo más pesado es de 7200 g/cm, halle la masa total y el centro de masas de la varilla.
- La longitud de una varilla es de 50 cm y la densidad lineal a una distancia x de uno de sus extremos es $\delta_1(x) = (3x + 1)$ g/cm. Determine su masa y el centro de masas.
- En los ejercicios $a-i$ encuentre el centroide (\bar{x}, \bar{y}) de la región limitada por las curvas dadas. Esboce la gráfica de la región y use la simetría cuando sea posible.
 - $y = 4 - x^2$ e $y = 0$.
 - La parábola $x = y - y^2$ y el eje y .
 - $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 0$ y $x = 4$.
 - La curva $y = 2x^3$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante.

- e. El semicírculo $y = \sqrt{1-x^2}$ y el eje x .
- f. Las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 2x - x^2$.
- g. $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.
- h. $x = y^2 - 3y - 4$ y la recta $x = -y - 1$.
- i. $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$.
10. Use el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido generado al rotar la región del ejercicio del literal *i* anterior alrededor del eje y . Resuelva el volumen del sólido por cortezas cilíndricas para verificar su respuesta.
11. Use el teorema de Pappus y la conocida fórmula del volumen de una esfera para encontrar el centroide de una región semicircular de radio a .
12. Use el teorema de Pappus para encontrar el volumen del toro obtenido cuando la región interior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ gira en torno a la recta $x = 2a$.
13. Considere el triángulo T de la figura 11.

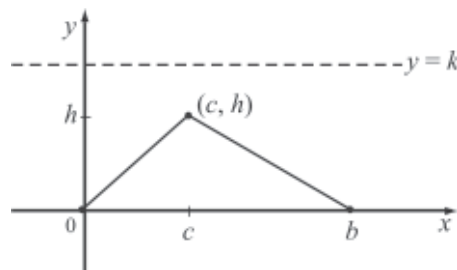


Figura 11

- a. Pruebe que $\bar{y} = \frac{h}{3}$ (y, por tanto, que el centroide del triángulo está en la intersección de las medianas).
- b. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando T se gira alrededor de $y = k$ (use el teorema de Pappus).
14. Use el teorema de Pappus para demostrar que el volumen del sólido obtenido mediante la rotación de la región R limitada por $y = \sin x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \pi$ alrededor del eje y es $2\pi^2$.
15. Encuentre el centro de masa de tres partículas de 1, 3 y 5 g, situadas en los puntos $(-1, 0)$, $(2, 3)$ y $(4, -2)$.
16. Demuestre que el centro de masa de un sistema formado por tres partículas de igual masa está situado en el punto de intersección de las medianas del triángulo formado por los puntos donde están localizadas las partículas.
17. Pruebe que la distancia del centroide de un triángulo a cualquiera de los lados es igual a un tercio de la longitud de la altura sobre dicho lado.

18. Encuentre el centro de masa de la lámina limitada por la parábola $2y^2 = 18 - 3x$ y el eje y , si la densidad de superficie en cualquier punto (x, y) es $\sqrt{6-x}$ g/cm².
19. Utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del toro generado al rotar un círculo de radio a alrededor de una recta situada en su mismo plano a una distancia b de su centro ($b > a$).
20. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el centroide de la región limitada por un semicírculo y su diámetro.
21. Utilice el teorema de Pappus para encontrar el volumen de una esfera de radio a .

En los ejercicios 22 a 32 encuentre el centroide del sólido generado al rotar la región plana alrededor de la recta dada.

22. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $x = 4$, alrededor del eje x . Tome elementos de área perpendiculares al eje de revolución.
23. La región del ejercicio 22, tomando elementos de área paralelos al eje de revolución.
24. La región acotada por $2y^2 = 3x^3$ y la recta $x = 3$, alrededor del eje x . Tome elementos de área paralelos al eje de revolución.
25. La región del ejercicio 22, alrededor del eje y . Tome elementos de área paralelos al eje de revolución.
26. La región acotada por la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2 - 4x$, alrededor de la recta $x = -1$. Tome elementos de área perpendiculares al eje de revolución.
27. La región del ejercicio 26, tomando elementos de área paralelos al eje de revolución.
28. La región acotada por la parábola $y^2 = x - 3$ y la recta $y = x - 5$, alrededor del eje y . Tome elementos de área perpendiculares al eje.
29. La región del ejercicio 28, tomando elementos de área paralelos al eje de revolución.
30. La región acotada por $x^4 y = 1$ y $y = 4$, alrededor del eje y . Tome elementos de área paralelos al eje de giro.
31. La región del ejercicio 30, alrededor del eje x .
32. La región acotada por los ejes coordenados y la recta que pasa por los puntos $(R, 0)$ y $(0, H)$, alrededor del eje x . Tome elementos de área paralelos al eje (la densidad varía proporcionalmente a la distancia a la base).

33. Encuentre el centroide del sólido que resulta al rotar la semicircunferencia superior con centro en $(0,0)$ y radio 2 cm, alrededor del eje x .
34. Demuestre que el centroide de un cono de altura h y radio de la base a está a $2/3$ de la distancia del vértice a la base.
35. Halle el centro de masa de una semiesfera sólida homogénea de radio r , si la densidad en cada punto P es proporcional a la distancia de P a la base del hemisferio.

V. Longitud de arco y área de superficie

1. En los ejercicios $a-f$ establezca y simplifique la integral que proporciona la longitud del arco de curva suave de la función dada (no evalúe la integral).
- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|----------------------------------|
| a. | $y = x^2; 0 \leq x \leq 1.$ | b. | $y = x^{5/2}; 1 \leq x \leq 3.$ |
| c. | $y = 2x^3 - 3x^2; 0 \leq x \leq 2.$ | d. | $y = x^{4/3}; -1 \leq x \leq 1.$ |
| e. | $x = 4y - y^2; 0 \leq y \leq 1.$ | f. | $xy = 1; 1 \leq x \leq 2.$ |
2. En los ejercicios $a-h$ establezca y simplifique la integral que da el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de curva suave alrededor del eje dado. No evalúe la integral.
- | | |
|----|--|
| a. | $y = x^2, 0 \leq x \leq 4,$ alrededor del eje x . |
| b. | $y = x^2, 0 \leq x \leq 4,$ alrededor del eje y . |
| c. | $y = x - x^2, 0 \leq x \leq 1,$ alrededor del eje x . |
| d. | $y = x^2, 0 \leq x \leq 1,$ alrededor de la recta $y = 4$. |
| e. | $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4,$ alrededor del eje x . |
| f. | $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4,$ alrededor del eje y . |
| g. | $y = x^{3/2}, 1 \leq x \leq 4,$ alrededor de la recta $y = -2$. |
| h. | $y = x^{5/2}, 1 \leq x \leq 4,$ alrededor de la recta $x = -1$. |
3. En los ejercicios $a-e$ determine la longitud de los arcos suaves dados.
- | | |
|----|--|
| a. | $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2},$ de $x = 0$ a $x = 2.$ |
| b. | $x = \frac{2}{3}(y - 1)^{3/2},$ de $y = 1$ a $y = 5.$ |
| c. | $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x},$ de $x = 1$ a $x = 3.$ |
| d. | $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2},$ de $y = 1$ a $y = 2.$ |
| e. | $y^3 = 8x^2,$ de $(1, 2)$ a $(8, 8).$ |

4. En los ejercicios *a-e* determine el área de la superficie de revolución generada al girar la curva dada alrededor del eje dado.
- $y = \sqrt{x}$; $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje x .
 - $y = x^3$; $1 \leq x \leq 2$, alrededor del eje x .
 - $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $1 \leq x \leq 2$; alrededor del eje y .
 - $y^3 = 3x$; $0 \leq x \leq 9$, alrededor del eje y .
 - $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$; $0 \leq x \leq 8$, alrededor del eje x .
5. Use integración para calcular la longitud de una circunferencia de radio a .
6. Use integración para calcular el área superficial de un cono de altura h y radio de la base a .
7. Use integración para calcular el área superficial de una esfera de radio a .
8. Determine el perímetro de la hipocicloide de cuatro cúspides $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (figura 12).

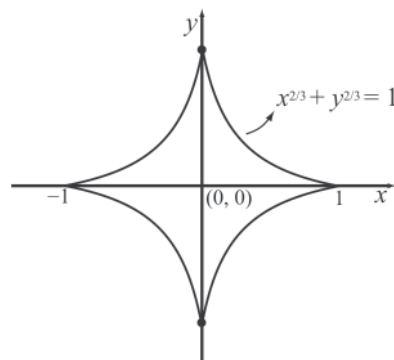


Figura 12

9. Determine el área de la superficie generada al girar la hipocicloide del ejercicio 8 alrededor del eje y .

VI. Trabajo mecánico y presión de fluidos

- Un resorte tiene una longitud natural de 4 pulgadas. Si una fuerza de 5 lb lo estira 1 pulgada, encuentre el trabajo realizado para estirarlo 4 pulgadas.
- Un resorte tiene una longitud de 87 pulgadas. Si una fuerza de 1000 lb comprime el resorte media pulgada, encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte 1 pulgada.
- Cuál es el trabajo necesario para bombear el agua de un recipiente lleno que tiene forma cilíndrica de radio $2P$ y altura h pulgadas, hasta 1 pulgada por encima del recipiente.

4. Un tanque de forma semiesférica de radio 5 m se llena de agua hasta una altura de 3 m. ¿Cuál es el trabajo necesario para bombear el agua hasta la superficie del tanque?
5. La fuerza de repulsión entre dos cargas Q_1 y Q_2 esta dada por $F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre ambas. ¿Cuál es el trabajo necesario para separar las cargas desde una distancia de 1 cm entre sus centros hasta una distancia de 5 cm?
6. La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra, de masa M , sobre un cuerpo de masa m situado a una distancia x de su centro está dada por $F = \frac{RmM}{x^2}$, en donde R es la constante de gravitación universal. Halle el trabajo realizado al mover una masa m desde la superficie de la Tierra hasta una altura h , sabiendo que el radio de la Tierra es r .
7. Un balde que pesa 5 lb y que contiene 10 lb de arena es amarrado al extremo inferior de una cadena que mide 20 pulgadas y peso 8 lb y que está colgada en un pozo. Encuentre el trabajo necesario para subir el balde al borde del pozo.
8. Una lámina rectangular de 100 cm de ancho por 80 cm de alto se sumerge verticalmente en un tanque con agua de tal manera que el borde de 100 cm queda a ras del agua. Encuentre la fuerza total ejercida por el agua sobre cada cara de la lámina.
9. Resuelva el problema anterior cuando el borde superior queda a 200 cm por debajo del nivel del agua.
10. Una lámina en forma de triángulo rectángulo de catetos 30 y 40 cm se sumerge verticalmente en un líquido de $w = 5 \text{ g/cm}^3$ de tal manera que el cateto mayor coincide con la superficie del líquido. Encuentre la fuerza total ejercida por el líquido sobre una de las caras de la lámina.
11. La cara en contacto con el agua en una presa es vertical y tiene la forma de un trapecio en donde la base superior mide 50 m, la inferior 30 m y la altura entre las dos es de 10 m. Halle la fuerza total ejercida por el agua sobre la cara expuesta al agua si el nivel del agua coincide con la base superior.
12. Resuelva el problema anterior cuando el nivel del agua ha bajado 30 m.
13. Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto de radio 1 m y está colocado con su eje horizontal. Si se llena con aceite de $w = 800 \text{ kg/m}^3$, ¿cuál será la fuerza sobre cada una de las caras circulares?
14. Resuelva el problema anterior:
 - a. Si el cilindro se llena solamente hasta la mitad.
 - b. Si se llena hasta una altura de 1,5 m.
15. La cara en contacto con el agua en una presa forma un ángulo de 30° con la vertical. La forma de la cara es rectangular, con 30 m de ancho y 20 m de profundidad. Halle la fuerza total que ejerce el agua sobre la presa cuando ésta se encuentra llena de agua.
16. Resuelva el problema anterior cuando la forma de la cara es un trapecio de base superior 50 m, base inferior 30 m y altura 10 m.

17. Un tanque lleno de agua tiene una compuerta vertical en forma de círculo de 60 cm de radio con su centro a una profundidad de 3 m. Halle la fuerza total ejercida por el agua sobre la compuerta.
18. Calcule la fuerza total ejercida por el agua sobre la superficie de área A y limitada por el eje x , la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 13). Demuestre que la fuerza total es la misma que resultaría si la placa se colocara horizontalmente a una profundidad \bar{x} , siendo \bar{x} la abscisa de su centroide.

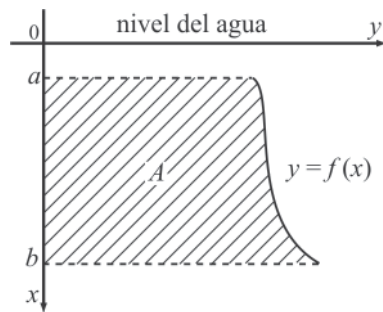


Figura 13