Preliminares: conjuntos, operaciones con conjuntos, aplicaciones, relaciones.

En este tema expondremos nociones y notaciones fundamentales que se emplearán cotidianamente en cualquier desarrollo matemático. Básicamente pretendemos introducir el lenguaje mínimo elemental con el que se transcriben las ideas en matemáticas.

Conjuntos.

Respondiendo a la intuición, entenderemos que un **conjunto** es una colección de objetos. Dichos objetos pueden ser de diferente naturaleza, tanto objetos "tangibles" como abstracciones matemáticas. Esos objetos que al reunirse forman el conjunto, se denominarán **elementos del conjunto**.

Se designa a los conjuntos y a los elementos que los constituyen por medio de letras pertenecientes a diversos alfabetos. Lo más frecuente (más por tradición que por norma) es usar letras mayúsculas para designar a los conjuntos, y reservar las minúsculas para designar elementos (ver el apéndice I).

Como se puede fácilmente imaginar, la expresión del tipo "x es un elemento del conjunto A" o equivalentemente "x pertenece al conjunto A" es de uso muy frecuente cuando se habla de conjuntos y elementos. Por ello, es útil recurrir a un símbolo que nos permita expresar esa idea más brevemente. Concretamente,

$$\begin{array}{lll} \text{“}x \text{ pertenece al conjunto } A\text{”} & \text{se representa por} & x \in A, \\ \text{“}x \text{ no pertenece al conjunto } A\text{”} & \text{se representa por} & x \notin A. \end{array}$$

Del mismo modo, usamos símbolos para sintetizar o acortar las expresiones más frecuentes. Así, el símbolo "$\forall$" se lee "para todo", el símbolo "$\exists$" se lee "existe", los dos puntos ":" se leen como "tal que", etc...

Los conjuntos suelen describirse encerrando sus elementos entre llaves "{" y "}". Entre esas llaves pueden aparecer o bien todos los elementos del conjunto separados por comas, o bien expresar la condición que deben cumplir los elementos para pertenecer a dicho conjunto. Con un ejemplo se entiende mejor... pretendemos definir el conjunto A formado por los naturales que están entre 4 y 26 (ambos inclusive). Podemos hacerlo de dos modos, o bien

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\},$$

o también como

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 4 \leq n \leq 26\}.$$

Subconjuntos.

Diremos que un conjunto A "es un subconjunto" del conjunto B (también se expresa diciendo que A está "contenido" o "incluido" en B), si cada elemento de A es también elemento de B. Lo denotaremos mediante el símbolo "$\subset$", esto es:

$$A \subset B \quad \text{significa} \quad \forall a \in A, \quad a \in B.$$

Resulta obvio que cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo. Más aún, es evidente que si dos conjuntos se incluyen mutuamente el uno al otro (esto es,

$A \subset B$ y $B \subset A$) entonces necesariamente esos dos conjuntos son el mismo (esto es, contienen exactamente los mismos elementos). Este hecho será útil cuando queramos probar una igualdad de conjuntos; bastará demostrar la inclusión mutua, también llamada "doble inclusión".

Sigamos hablando de subconjuntos de un cierto conjunto E. Como hemos dicho más arriba, podemos agrupar en un nuevo conjunto a aquellos elementos de E que verifiquen una determinada propiedad p.

$$A = \{x \in E : x \text{ satisface la propiedad } p\}.$$

Es claro que siempre $A \subset E$. Por ejemplo, si $E = \mathbb{N}$ y p es la propiedad "ser número impar", entonces A es el conjunto formado por los naturales impares, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. También p podría ser la propiedad "ser negativo", y ningún natural satisface esa propiedad, con lo que el conjunto A no contendría ningún elemento. Eso no es ningún problema, el conjunto A puede estar vacío y se denotaría $A = \emptyset$.

También podemos agrupar en otro subconjunto $B \subset E$ a todos los elementos de E que **no** satisfacen la propiedad p. Allí estarán todos los elementos de E que no han podido pertenecer a A. Este conjunto se llama "complementario de A", y se denota por

$$B = E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

Es evidente que:

$$E \setminus E = \emptyset, \quad E \setminus \emptyset = E, \quad E \setminus (E \setminus A) = A.$$

La unión.

Se llama **unión** de dos conjuntos A y B a un nuevo conjunto formado por todos aquellos elementos que pertenecen a A o a B indiferentemente. Se denota:

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}.$$

Observemos que en la unión aparecen, por una parte, los elementos de A que no están en B, por otra, los elementos de B que no están en A, y por último los elementos que pertenecen a A y a B al mismo tiempo. Es evidente que:

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B, \quad A \cup B \subset E, \quad A \cup (E \setminus A) = E,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad \text{y se denota } \ A \cup B \cup C.$$

La intersección.

Se llama **intersección** de dos conjuntos A y B a un nuevo conjunto formado por todos aquellos elementos que pertenecen a A y a B "a la vez". Se denota:

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Es evidente que:

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B, \quad A \cap (E \setminus A) = \emptyset,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad \text{y se denota } \ A \cap B \cap C.$$

Además, se puede comprobar que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

y las conocidas **leyes de Morgan**:

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B), \quad E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

El producto cartesiano.

Llamaremos **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B a un nuevo conjunto cuyos elementos son "parejas ordenadas" de elementos, de modo que el primer elemento de cada pareja debe pertenecer a A, y el segundo a B. Se denota:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \ y \in B\}.$$

Tomando un elemento $(x, y) \in A \times B$, llamamos a x "primera componente" del par, y a y "segunda componente" del par. Para que dos elementos (x, y) y (z, t) del conjunto $A \times B$ sean iguales, es necesario que ambas componentes coincidan, esto es, que sea $x = z$ y también $y = t$. Observemos que en general, $A \times B$ y $B \times A$ son conjuntos diferentes.

Proposiciones.

Una proposición es una afirmación. Puede tomar dos posibles valores, "verdadero" o "falso" (V ó F).

El símbolo "$\Rightarrow$" designa la consecuencia lógica, y puede entenderse leyéndolo como "implica" o "si... entonces". Este símbolo se escribe entre proposiciones cuando la segunda se deduce a partir de la primera. Siendo p y q proposiciones, la expresión "$p \Rightarrow q$" es una nueva proposición que significa que q será verdadera cada vez que lo sea p. Leeremos "p implica q", o bien "si p entonces q", o "p es condición suficiente para q", o también "q es condición necesaria para p". Por ejemplo,

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > -5$$

se lee "si n es un número natural, entonces n es mayor que menos cinco", o "ser natural es suficiente para ser mayor que menos cinco", o también "es necesario ser mayor que menos cinco para ser natural". También, si A, B, C son conjuntos, se tiene

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } A \subset B \\ \text{y} \\ B \subset C \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A \subset C.$$

En la proposición "$p \Rightarrow q$", llamamos a p **hipótesis** de la proposición, y a q **tesis** de la proposición. **Demostrar** una proposición consiste en establecer su valor de "verdadero". En el caso $p \Rightarrow q$ existen tres modos de abordar su demostración:

1. **Demostración directa:** Suponiendo p verdadera, argumentar hasta establecer que q también es verdadera.

2. **Demostración del contrarrecíproco:** Partiendo de la equivalencia entre las proposiciones "$p \Rightarrow q$" y "no $q \Rightarrow$ no p", se efectúa la demostración directa de esta última, es decir, suponiendo que q es falsa, se argumenta hasta establecer que p también es falsa.

3. **Demostración por reducción al absurdo:** Se supone que p es verdadera y q es falsa, y se argumenta hasta llegar a alguna contradicción.

Véase el apéndice II para justificar lo anterior, y para conocer más acerca del álgebra de proposiciones.

El símbolo $\Leftrightarrow$ es el de la equivalencia lógica. La expresión "$p \Leftrightarrow q$" se lee "p es equivalente a q", o bien "para que p sea verdadera es necesario y suficiente que lo sea q". Veamos algunos ejemplos:

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \quad \Leftrightarrow \quad xt = yz,$$

o también, para los conjuntos A y B,

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} A \subset B \\ \text{y} \\ B \subset A. \end{array} \right.$$

Compruébese que:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

Funciones o aplicaciones.

Sean E y F dos conjuntos. Una **función ó aplicación** de E en F es una regla que permite asignar a cada elemento de E un único elemento de F. Si f es una tal aplicación, escribiremos $f : E \to F$ o bien $E \xrightarrow{f} F$. Para cada $x \in E$, denotaremos por $f(x)$ al único elemento de F asignado a x por la aplicación f. Se le llama imagen de x por f. Se suele representar

$$\begin{array}{rccc} f \ : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Al conjunto E se le llama "dominio de f", y al conjunto F se le llama "codominio de f".

Si A es un subconjunto de E, llamaremos **imagen de** A al conjunto:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset F.$$

Especial mención merece el caso en que $A = E$. En tal caso, a la imagen de todo el dominio se le suele llamar **imagen de** f

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x) : x \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E, f(x) = y\} \subset F.$$

Si C es un subconjunto de F, llamaremos **imagen inversa de** C al conjunto

$$f^{-1}(C) = \{x \in E : f(x) \in C\} \subset E.$$

Llamaremos **grafo de la función** f al conjunto

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Una aplicación $f : E \to F$ se llamará **sobreyectiva** cuando su imagen sea todo el co-dominio F, esto es:

$$f \text{ es sobreyectiva} \quad \Leftrightarrow \quad Im(f) = F \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y.$$

Observemos que es posible que elementos diferentes en E lleven asociado el mismo elemento en F. Si esto **no** ocurre para ningún par de elementos de E, llamaremos a f función **inyectiva**. Quiere esto decir que una función es inyectiva cuando elementos distintos en E llevan asociadas necesariamente imágenes distintas en F, esto es, si $x_1, x_2 \in E$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ o equivalentemente, } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La aplicación f se llamará **biyectiva** cuando sea sobreyectiva e inyectiva al mismo tiempo. Un ejemplo de aplicación biyectiva sería la "aplicación identidad" $1_E : E \to E$, que a cada elemento de E se le asocia consigo mismo:

$$\forall x \in E,\ 1_E(x) \stackrel{\text{def}}{=} x.$$

Composición de aplicaciones.

Dados tres conjuntos E, F y G, y dos aplicaciones $f : E \to F$ y $g : F \to G$, definiremos la **aplicación compuesta** $g \circ f : E \to G$ del siguiente modo:

$$\text{para cada } x \in E, \quad (g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

Observemos el esquema:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x)$$

Nótese que en la expresión $g \circ f$, aparece escrita en primer lugar la función g, aunque actúa en segundo lugar en la composición, y la f (que es la primera que actúa), se escribe detrás.

Sea $f : E \to F$. Comprobar las siguientes proposiciones:

- Sean A y B subconjuntos de E:
  - Si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$,
  - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
  - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Dar un ejemplo en que el contenido sea estricto.

- Sean C y D subconjuntos de F:
  - Si $C \subset D$ entonces $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$,
  - $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
  - $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
  - $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$.
- Si además tenemos $g : F \to G$, y $X \subset G$:
  - $(g \circ f)(A) = g(f(A))$,
  - $(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$.
  - Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
  - Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Probar además que:
  - $f : E \to F$ es inyectiva $\Leftrightarrow \ \exists\, g : F \to E \ : \ g \circ f = 1_E$.
  - $f : E \to F$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \ \exists\, g : F \to E \ : \ f \circ g = 1_F$.

Relaciones binarias.

Una relación binaria R definida sobre un conjunto E es una regla que permite distinguir si dos elementos cualesquiera están o no relacionados. Cuando dos elementos $a, b \in E$ estén relacionados por la relación binaria R, escribiremos aRb.

La relación binaria R se dice:

- **reflexiva** cuando todo elemento de E está relacionado consigo mismo, es decir, $\forall a \in E$, aRa.
- **simétrica** cuando al tomar dos elementos $a, b \in E$, si $aRb \ \Rightarrow \ bRa$.
- **transitiva** tomados tres elementos $a, b, c \in E$, si aRb y $bRc \Rightarrow \ aRc$.
- **antisimétrica** si para $a, b \in E$, si aRb y $bRa \Rightarrow \ a = b$.

Una relación binaria puede o no cumplir una o varias de las anteriores propiedades, pero merecen destacarse dos tipos de relaciones que aparecerán con asiduidad.

Relaciones de equivalencia.

Una relación binaria se llamará **relación de equivalencia** cuando sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Si R es una relación de equivalencia en E, para cualquier elemento $a \in E$ definimos su **clase de equivalencia** como el conjunto de todos los elementos relacionados con él, es decir,

$$\overline{a} = [a] = \{x \in E : aRx\}.$$

Por ser R una relación de equivalencia, se desprende que para dos elementos $a, b \in E$, se tiene que, o bien $\overline{a} = \overline{b}$, o bien $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Definiremos el **conjunto cociente** de E por R (y se denota E/R) al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos de E, es decir

$$E/R = \{\overline{a} : a \in E\}.$$

Relaciones de orden.

Una relación binaria se llamará **relación de orden** cuando sea reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si R es una relación de orden en E, y $A \subset E$, definiremos:

- Un **elemento maximal** de A es un $m \in A$ tal que no exista ningún $a \in A$ con mRa.
- Una **cota superior** de A es un $c \in E$ tal que $\forall a \in A,\ aRc$.
- El **elemento máximo** de A es un $m \in A$ tal que $\forall a \in A,\ aRm$. Dicho de otro modo, el máximo es una cota superior de A que pertenece a A.

Es interesante observar que un subconjunto A podría tener varios elementos maximales, y varias cotas superiores, pero solamente es posible un elemento máximo o ninguno.

En este momento es fácil definir las nociones duales a las ya ofrecidas, esto es, elemento minimal, cota inferior y elemento mínimo. Finalmente,

- **supremo** de A es (cuando lo haya) el mínimo de las cotas superiores de A. La noción dual de supremo (esto es, máximo de las cotas inferiores) se llama ínfimo.

Apéndice I: Letras del abecedario griego.

Nombre	**Minúsc.**	**Mayúsc.**
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Épsilon	ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Ómicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ, ς	Σ
Tau	τ	T
Ípsilon	υ	Υ
Fi	ϕ, φ	Φ
Ji	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Apéndice II: Álgebra de proposiciones. Tablas de verdad.

Dadas dos proposiciones p y q, cada una con sus posibles valores de verdadero o falso, podemos considerar las nuevas proposiciones:

- La proposición $p \wedge q$, que se lee "p y q", y cuyo valor de verdad viene dado por la siguiente tabla en función de los valores de verdad de p y de q:

	$p \wedge q$	q: **V**	q: **F**
p	**V**	V	F
	F	F	F

- La proposición $p \vee q$ se lee "p ó q", y su valor de verdad viene dado por la tabla:

	$p \vee q$	q: **V**	q: **F**
p	**V**	V	V
	F	V	F

- La proposición $\neg p$ se lee "no p", y su valor de verdad es el contrario del valor de p, es decir, $\neg p$ es verdadero cuando p es falso, y $\neg p$ es falso si p es verdadero.

- La proposición $p \Rightarrow q$ se lee "p implica q" o también "si p entonces q", y es la misma que $\neg p \vee q$, con lo que su valor de verdad será:

$$p \Rightarrow q \quad = \quad \neg p \vee q$$

	$p \Rightarrow q$	q: **V**	q: **F**
p	**V**	V	F
	F	V	V

- Hágase como ejercicio la tabla de verdad de $p \Leftrightarrow q$, que es "$p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$", esto es, $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.

- Diremos que dos proposiciones son iguales si tienen los mismos valores de verdad. Así, demuéstrese que:
  - $\neg(\neg p) \quad = \quad p$
  - $\neg(p \vee q) \quad = \quad (\neg p) \wedge (\neg q)$
  - $\neg(p \wedge q) \quad = \quad (\neg p) \vee (\neg q)$
  - $$\begin{aligned} p \Rightarrow q &= (\neg q) \Rightarrow (\neg p) && \text{(Contrarrecíproco)} \\ &= \neg(p \wedge \neg q) && \text{(Reducción al absurdo)} \end{aligned}$$