

## **TEMA 14 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES**

### **14.1 – EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS**

#### **EXPERIENCIAS DETERMINISTAS Y ALEATORIAS**

Se llama **experiencia determinista** a aquella que conocemos el resultado antes de realizar el experimento: lanzamos una piedra y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc.

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar: lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, sacar bolas de una urna,...

#### **SUCESO ALEATORIO**

**Suceso aleatorio** es un acontecimiento que ocurrirá o no dependiendo del azar.

#### **ESPACIO MUESTRAL**

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, y se designa con la letra **E**.

*Por ejemplo: En un dado  $\rightarrow E = \{1,2,3,4,5,6\}$   
En una moneda  $\rightarrow E = \{C,+ \}$*

#### **SUCESOS**

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Los elementos de E se llaman **sucesos individuales** o **sucesos elementales**

También son sucesos el suceso vacío o **suceso imposible**,  $\emptyset$ , y el propio E, **suceso seguro**.

Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos S.

Si E tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es  $2^n$ .

## OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, se llama

**Unión:**  $A \cup B$  (se lee “A unión B”) es el suceso formado por todos los elementos de A y de B

El suceso  $A \cup B$  se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

**Intersección:**  $A \cap B$  (se lee “A intersección B”) es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.

El suceso  $A \cap B$  se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

**Diferencia:**  $A - B$  (se lee “A menos B”) es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

El suceso  $A - B$  se verifica cuando lo hace A y no B

**Complementario:** El suceso  $A' = A^c = \bar{A} = E - A$  se llama suceso contrario o complementario de A.

El suceso  $A'$  se verifica siempre cuando no se verifique A.

**Sucesos incompatibles:** Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando  $A \cap B = \emptyset$

Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

## PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

**Distributivas:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**De simplificación:**

$$A \cup (B \cap A) = A$$

$$A \cap (B \cup A) = A$$

**Con el complementario:**

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## 14.2 – FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

### FRECUENCIA ABSOLUTA Y FRECUENCIA RELATIVA

Realizamos  $N$  veces una experiencia aleatoria.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso  $S$  o, simplemente, frecuencia de  $S$ , al número de veces que ocurre  $S$ . Se designa por  $f(S)$ .

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso  $S$  a la proporción de veces que ocurre  $S$ . Se designa por

$$\text{fr}(S): \text{fr}(S) = \frac{f(S)}{N}$$

### LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Al realizar reiteradamente una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un cierto suceso,  $\text{fr}(S)$ , va tomando distintos valores. Estos valores al principio sufren grandes oscilaciones pero, poco a poco, se van estabilizando (oscilan cada vez menos). Cuando  $N$  crece mucho, se aproximan a un cierto valor que es la probabilidad de  $S$ ,  $P(S)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{fr}(S) = P(S) \quad \text{LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS}$$

### PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES

**Axiomáticas:** Inspiradas en las propias de la frecuencia relativa

Las propiedades de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

**Ax.1 :** Cualquiera que sea el suceso  $S$ ,  $P(S) \geq 0$

**Ax.2 :** Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Ax.3 :** La probabilidad total es 1:  $P(E) = 1$

En esencia, estas tres propiedades indican que disponemos de una cantidad total de probabilidad igual a 1 que hemos de repartir aditivamente entre los distintos sucesos.

**Teoremas:** Se deducen de las propiedades axiomáticas

**T.1 :**  $P(A^c) = 1 - P(A)$

**T.2 :**  $P(\emptyset) = 0$

**T.3 :** Si  $A \subset B$ , entonces  $P(B) = P(A) + P(B-A)$

**T.4 :** Si  $A \subset B$ , entonces  $P(A) \leq P(B)$

**T.5 :** Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

**T.6 :**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**T.7 :** Si el espacio muestral  $E$  es finito y un suceso es  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , entonces:

$$P(S) = P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_k)$$

### 14.3 – LEY DE LAPLACE

La propiedad **T.7** permite calcular la probabilidad de un suceso  $S$  conociendo las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Pero si el espacio muestral consta de  $n$  sucesos elementales equiprobables (todos ellos con la misma probabilidad  $1/n$ ), entonces la probabilidad de  $S$  sólo depende del número de sucesos elementales

que lo componen:  $P(S) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$

#### LEY DE LAPLACE

Si  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n)$ , entonces

$$P(s) = \frac{\text{número de elementos de } S}{n} = \frac{\text{Número de "casos favorables" a } S}{\text{número de "casos posibles"}}$$

Se dice que un suceso aleatorio es de Laplace cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales (casos) es la misma. Por ejemplo: un dado correcto, una moneda, una baraja,....

#### CASOS EN LOS QUE NO SE PUEDE APLICAR LA LEY DE LAPLACE

La ley de Laplace se puede aplicar **cuando todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad**.

Pero hay muchos casos en que esto no ocurre. Por ejemplo:

- **Instrumentos irregulares** : Dados trucados, una chincheta... Para evaluar la probabilidad de estos sucesos se recurre a la ley de los grandes números.  $P(S) = fr(S)$ . Cuanto mayor sea la  $N$  más fiable será la estimación.
- **Instrumentos regulares, pero sucesos elementales no equiprobables** : Por ejemplo lanzamos dos dados correctos y sumamos sus resultados. Para calcular su probabilidad recurrimos a técnicas de recuento y modificamos la descripción de la experiencia de modo que los sucesos elementales sean equiprobables.

### 14.4 – PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES

#### PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos,  $A$  y  $B$ , se llama **probabilidad de  $B$  condicionada a  $A$** , y se designa por  $P(B/A)$

a  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  y mide la proporción de veces que ocurre  $B$  de entre las que ocurre  $A$ .

De la expresión anterior se deduce que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

#### SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos,  $A$  y  $B$ , se dice que son independientes cuando:

$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades:  $A$  y  $B$  independientes  $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

#### TABLAS DE CONTINGENCIA

Tablas que ayudan al estudio de probabilidades.

## 14.5 – PRUEBAS COMPUESTAS

Se llaman **pruebas compuestas** a aquellas experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes.

Dos pruebas compuestas son **independientes** cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman **dependientes**.

### EXPERIENCIAS INDEPENDIENTES

Se dice que **dos o más pruebas son independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras. Por tanto, los sucesos correspondientes a la primera son independientes de los sucesos correspondientes a la segunda.

Si  $n$  pruebas son independientes y los sucesos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple que:

$$P(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ y } \dots \text{ y } S_n \text{ en la } n\text{-ésima}) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot \dots \cdot P(S_n)$$

### EXPERIENCIAS DEPENDIENTES

Dos experiencias son **dependientes** cuando el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda. Las probabilidades de sucesos compuestos se obtienen así:

$$P(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}}) = P(S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}}) \cdot P(S_2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ supuesto que ocurrió } S_1 \text{ en la } 1^{\text{a}})$$

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1)$$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, las probabilidades de los sucesos compuestos se obtienen análogamente:

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) \cdot P(S_3/S_1 \cap S_2)$$

## 14.6 – PROBABILIDAD TOTAL

Tenemos  $n$  sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , incompatibles dos a dos y tales que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ . Entonces, para cualquier suceso  $S$  se cumple que:

$$P(S) = P(A_1) \cdot P(S/A_1) + P(A_2) \cdot P(S/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)$$

A la probabilidad  $P(S)$  descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total**.

**DIAGRAMAS DE ÁRBOL** : Esquema para el cálculo de la probabilidad total.

## 14.7 – PROBABILIDADES “A POSTERIORI”. FÓRMULA DE BAYES

$$P(A_i/S) = \frac{P(A_i) \cdot P(S/A_i)}{P(A_1) \cdot P(S/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(S/A_n)}$$