Álgebra y Trigonometría
Clase 3 – Funciones polinomiales y racionales

CNM-108

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

1. Funciones polinomiales
   - Funciones polinomiales de grado mayor que 2

2. Propiedades de la división
   - Algoritmo de la división
   - Teoremas del residuo y del factor
   - División sintética

3. Ceros de polinomios
   - Teorema fundamental del álgebra
   - Número de ceros de un polinomio

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Definición

Se dice que f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textit{con } a_n \neq 0.$$

Ejemplos:

1. $f(x) = a_0$ se conoce como la recta horizontal, observe que el grado de f es 0.

Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Definición

Se dice que f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0.$$

Ejemplos:

1. $f(x) = a_0$ se conoce como la recta horizontal, observe que el grado de f es 0.
2. $f(x) = a_1 x + a_0$ corresponde a la recta con pendiente a_1 y el grado de f es 1.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Definición

Se dice que f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textit{con } a_n \neq 0.$$

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{f(x) = a_0}$ se conoce como la recta horizontal, observe que el grado de f es 0.
2. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x + a_0}$ corresponde a la recta con pendiente a_1 y el grado de f es 1.
3. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x^2 + a_1 x + a_0}$ es una parábola con eje vertical, el grado de f es 2.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Definición

Se dice que f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textit{con } a_n \neq 0.$$

Ejemplos:

1. $\boldsymbol{f(x) = a_0}$ se conoce como la recta horizontal, observe que el grado de f es 0.
2. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x + a_0}$ corresponde a la recta con pendiente a_1 y el grado de f es 1.
3. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x^2 + a_1 x + a_0}$ es una parábola con eje vertical, el grado de f es 2.

Observación:
Todas las funciones polinomiales son funciones continuas (no tienen cortes ni interrupciones).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Funciones polinomiales de grado mayor que 2

Definición

Se dice que f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textit{con } a_n \neq 0.$$

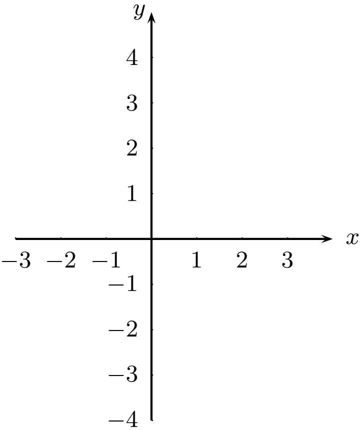
Ejemplos:

1. $\boldsymbol{f(x) = a_0}$ se conoce como la recta horizontal, observe que el grado de f es 0.
2. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x + a_0}$ corresponde a la recta con pendiente a_1 y el grado de f es 1.
3. $\boldsymbol{f(x) = a_1 x^2 + a_1 x + a_0}$ es una parábola con eje vertical, el grado de f es 2.

Observación:
Todas las funciones polinomiales son funciones continuas (no tienen cortes ni interrupciones).

Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



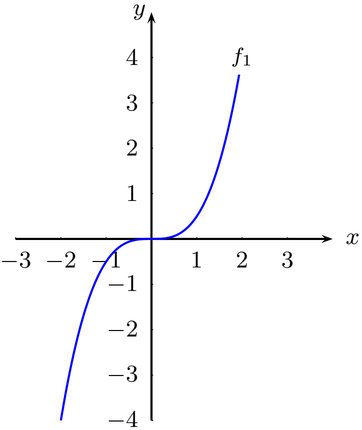
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:

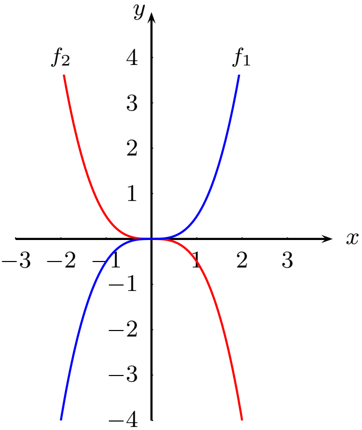


Si n es un entero positivo par:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:

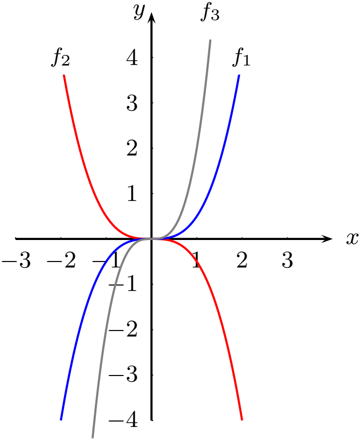


$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



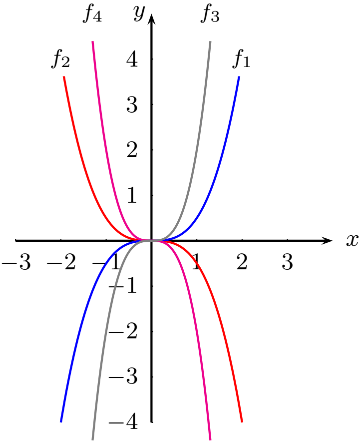
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



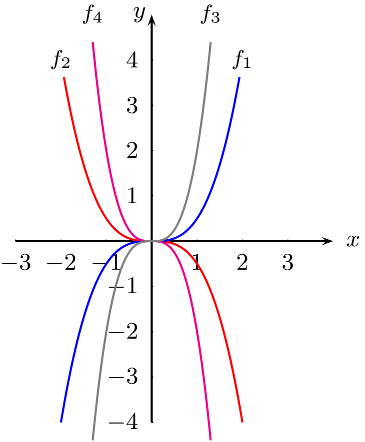
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

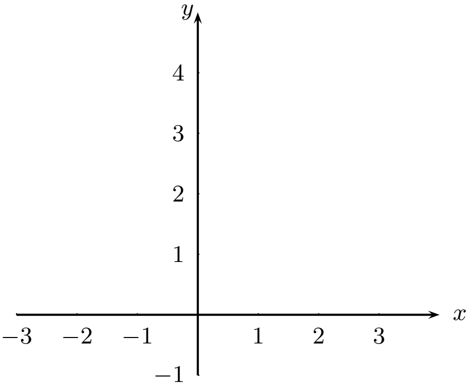
Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

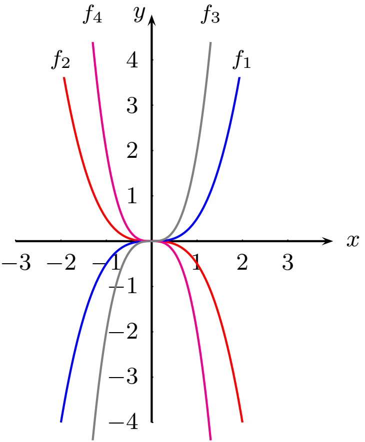


$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4$$
$$f_3(x) = x^8, \quad f_4(x) = x^{16}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

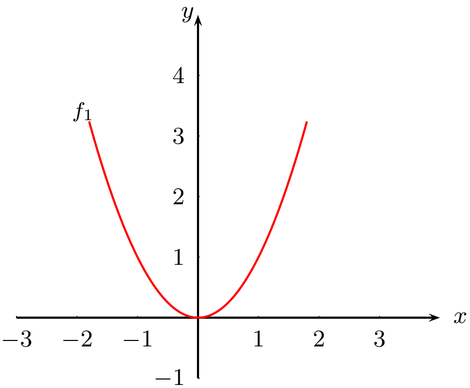
Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

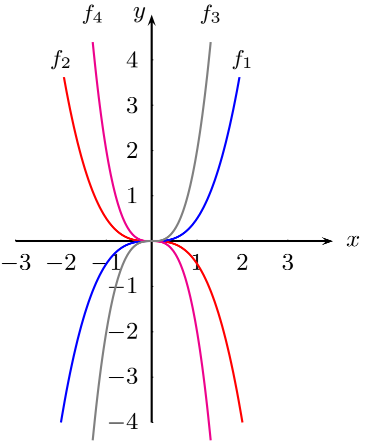
Si n es un entero positivo par:



$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4$$
$$f_3(x) = x^8, \quad f_4(x) = x^{16}$$

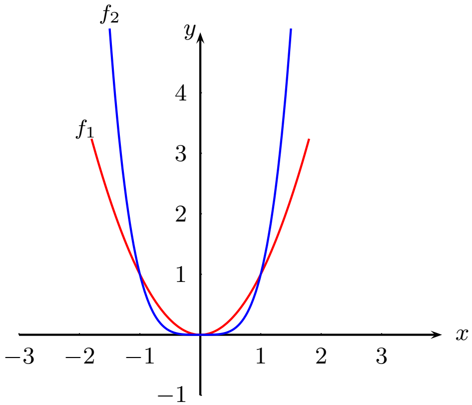
Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

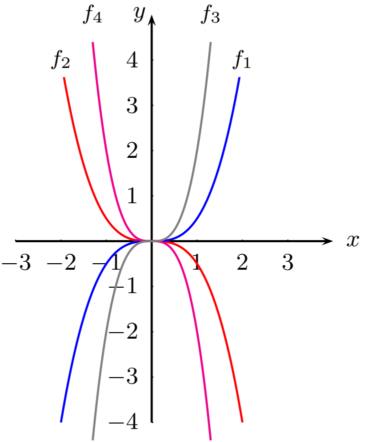
Si n es un entero positivo par:



$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4$$
$$f_3(x) = x^8, \quad f_4(x) = x^{16}$$

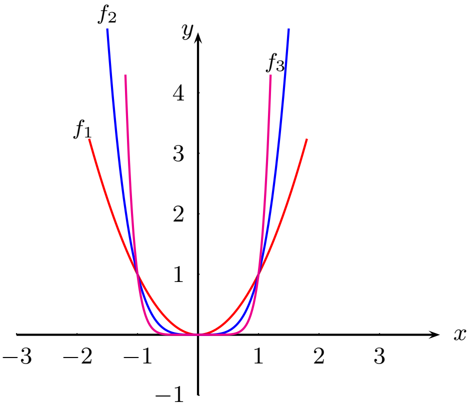
Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$$
$$f_3(x) = 2x^3, \quad f_4(x) = -2x^3$$

Si n es un entero positivo par:

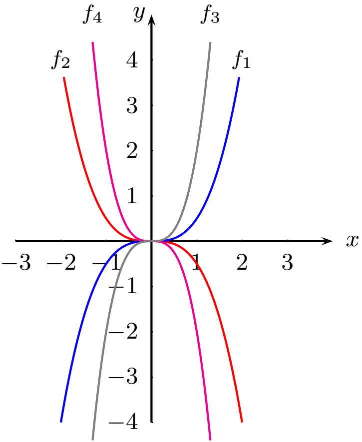


$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4$$
$$f_3(x) = x^8, \quad f_4(x) = x^{16}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

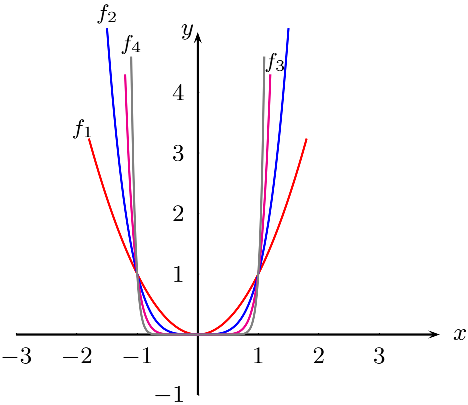
Caso particular: $f(x) = ax^n$ para alguna $a = a_n \neq 0$.

Si n es un entero positivo impar:



$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3$, $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3$
$f_3(x) = 2x^3$, $f_4(x) = -2x^3$

Si n es un entero positivo par:



$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^4$
$f_3(x) = x^8$, $f_4(x) = x^{16}$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ejemplo de aplicación

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$, encontrar los valores de x donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, además trazar la gráfica de f.

Solución:

Factoricemos a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 12x \\ &= x(x^2 - x - 12) \\ &= x(x+3)(x-4), \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ejemplo de aplicación

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$, encontrar los valores de x donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, además trazar la gráfica de f.

Solución:

Factoricemos a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 12x \\ &= x(x^2 - x - 12) \\ &= x(x+3)(x-4), \end{aligned}$$

$f(x)$ \ intervalo	(-∞,-3)	(-3,0)	(0,4)	(4,∞)
x	−	−	+	+
$(x+3)$	−	+	+	+
$(x-4)$	−	−	−	+
Signo $f(x)$	−	+	−	+

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ejemplo de aplicación

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$, encontrar los valores de x donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, además trazar la gráfica de f.

Solución:

Factoricemos a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 12x \\ &= x(x^2 - x - 12) \\ &= x(x+3)(x-4), \end{aligned}$$

intervalo / $f(x)$	(-∞,-3)	(-3,0)	(0,4)	(4,∞)
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ejemplo de aplicación

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$, encontrar los valores de x donde $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, además trazar la gráfica de f.

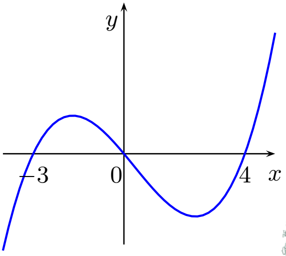
Solución:

Factoricemos a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 12x \\ &= x(x^2 - x - 12) \\ &= x(x+3)(x-4), \end{aligned}$$

intervalo / $f(x)$	(-∞,-3)	(-3,0)	(0,4)	(4,∞)
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\boxed{y = x^3 - x^2 - 12x}$$



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Decimos que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, si $f(x)$ es divisible por $g(x)$:

1. $\boldsymbol{x^4 - 81}$ es divisible entre $x^2 + 9$, entre $x^2 - 9$, entre $x + 3$ y entre $x - 3$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Decimos que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, si $f(x)$ es divisible por $g(x)$:

1. $\boldsymbol{x^4 - 81}$ es divisible entre $x^2 + 9$, entre $x^2 - 9$, entre $x + 3$ y entre $x - 3$.
2. $\boldsymbol{x^6 + 27}$ es divisible entre $x^2 + 3$ y entre $x^4 - 3x^2 + 9$.

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Decimos que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, si $f(x)$ es divisible por $g(x)$:

1. $\boldsymbol{x^4 - 81}$ es divisible entre $x^2 + 9$, entre $x^2 - 9$, entre $x + 3$ y entre $x - 3$.
2. $\boldsymbol{x^6 + 27}$ es divisible entre $x^2 + 3$ y entre $x^4 - 3x^2 + 9$.
3. $\boldsymbol{7x^2 + 3x - 10}$ es divisible entre $7x + 10$ y entre $x - 1$

Teorema

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ se conoce como el ***cociente*** *y el polinomio $r(x)$ se conoce como el* ***residuo*** *en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Decimos que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, si $f(x)$ es divisible por $g(x)$:

1. $\boldsymbol{x^4 - 81}$ es divisible entre $x^2 + 9$, entre $x^2 - 9$, entre $x + 3$ y entre $x - 3$.
2. $\boldsymbol{x^6 + 27}$ es divisible entre $x^2 + 3$ y entre $x^4 - 3x^2 + 9$.
3. $\boldsymbol{7x^2 + 3x - 10}$ es divisible entre $7x + 10$ y entre $x - 1$

Teorema

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\boldsymbol{f(x) = p(x)q(x) + r(x)}$$

*donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ se conoce como el **cociente** y el polinomio $r(x)$ se conoce como el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Decimos que $g(x)$ es un factor de $f(x)$, si $f(x)$ es divisible por $g(x)$:

1. $\boldsymbol{x^4 - 81}$ es divisible entre x^2+9, entre x^2-9, entre $x+3$ y entre $x-3$.
2. $\boldsymbol{x^6 + 27}$ es divisible entre x^2+3 y entre x^4-3x^2+9.
3. $\boldsymbol{7x^2 + 3x - 10}$ es divisible entre $7x+10$ y entre $x-1$

Teorema

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\boldsymbol{f(x) = p(x)q(x) + r(x)}$$

*donde $r(x) = 0$ o el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ se conoce como el **cociente** y el polinomio $r(x)$ se conoce como el **residuo** en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.*

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & \underline{\,x^2+1\,} \end{array}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\ \hline \end{array}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\ \cline{6-6} -3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \end{array}$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\ \cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\ \cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 =$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\
\cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 = (3x^2 + 2x - 4)$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\
\cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1)$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\
\cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1) - 3x - 2$$

o también

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6}{x^2 + 1} =$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2+2x-4 \\ \cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1) - 3x - 2$$

o también

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6}{x^2 + 1} = (3x^2 + 2x - 4) - \frac{3x + 2}{x^2 + 1}.$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Divida $3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$ entre $x^2 + 1$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +2x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x^2 + 1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2 + 2x - 4 \\ \cline{1-5}
0 & 2x^3 & -4x^2 & -x & -6 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & -4x^2 & -3x & -6 & \\
 & & 4x^2 & & 4 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & -3x & -2 &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6 = (3x^2 + 2x - 4)(x^2 + 1) - 3x - 2$$

o también

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6}{x^2 + 1} = (3x^2 + 2x - 4) - \frac{3x + 2}{x^2 + 1}.$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio
$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4.$
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4.$
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x-c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4.$
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teorema (Teorema del factor)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x-c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x-c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio
$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4.$
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teorema (Teorema del factor)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x-c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo:
Por medio del teorema del factor, demostrar que $x-5$ es un factor de
$f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20.$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4$.
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teorema (Teorema del factor)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo:
Por medio del teorema del factor, demostrar que $x - 5$ es un factor de $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio
$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4.$
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teorema (Teorema del factor)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo:
Por medio del teorema del factor, demostrar que $x - 5$ es un factor de
$f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20$.

Solución: $f(5) = 5^3 - 8(5)^2 + 19(5) - 20 = 125 - 200 + 95 - 20 = 0.$

Teoremas del residuo y del factor

Teorema (Teorema del residuo)

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo:
Calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

Solución:
$f(-3) = (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 = 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4$.
Se puede comprobar fácilmente el resultado efectuando la división ejercicio!

Teorema (Teorema del factor)

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo:
Por medio del teorema del factor, demostrar que $x - 5$ es un factor de $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20$.

Solución: $f(5) = 5^3 - 8(5)^2 + 19(5) - 20 = 125 - 200 + 95 - 20 = 0$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline 2 & 7 & 10 & 8 & \end{array}$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline 2 & 7 & 10 & 8 & \end{array}$$

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 =$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline 2 & 7 & 10 & 8 & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (2x^2 + 7x + 10)$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\
\downarrow & 4 & 14 & 20 & \\
\hline
{\color{blue}2} & {\color{blue}7} & {\color{blue}10} & {\color{red}8} &
\end{array}
$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = ({\color{blue}2}x^2 + {\color{blue}7}x + {\color{blue}10})(x - 2) +$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline 2 & 7 & 10 & 8 & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (2x^2 + 7x + 10)(x - 2) + 8$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccr|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline \color{blue}{2} & \color{blue}{7} & \color{blue}{10} & \color{red}{8} & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (\color{blue}{2}x^2 + \color{blue}{7}x + \color{blue}{10})(x-2) + \color{red}{8}$$

Ejemplo: Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$. Utilice división sintética para hallar $f(2)$.

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccr|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline 2 & 7 & 10 & 8 & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (2x^2 + 7x + 10)(x - 2) + 8$$

Ejemplo: Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$. Utilice división sintética para hallar $f(2)$.

Solución:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\ \downarrow & 4 & 14 & 20 & \\ \hline {\color{blue}2} & {\color{blue}7} & {\color{blue}10} & {\color{red}8} & \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = ({\color{blue}2}x^2 + {\color{blue}7}x + {\color{blue}10})(x - 2) + {\color{red}8}$$

Ejemplo: Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$. Utilice división sintética para hallar $f(2)$.

Solución:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ \downarrow & 2 & 4 & 2 & 8 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & {\color{red}7} & \end{array}$$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\
\downarrow & 4 & 14 & 20 & \\
\hline
\color{blue}{2} & \color{blue}{7} & \color{blue}{10} & \color{red}{8} &
\end{array}
$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (\color{blue}{2}x^2 + \color{blue}{7}x + \color{blue}{10})(x - 2) + \color{red}{8}$$

Ejemplo: Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$. Utilice división sintética para hallar $f(2)$.

Solución:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\
\downarrow & 2 & 4 & 2 & 8 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & \color{red}{7} &
\end{array}
$$

Teorema del residuo $\Longrightarrow$ $f(2) = 7$

Algoritmo de la división para polinomios

Ejemplo: Halle el residuo de dividir $2x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x - 2$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & 3 & -4 & -12 & 2 \\
\downarrow & 4 & 14 & 20 & \\
\hline
\color{blue}{2} & \color{blue}{7} & \color{blue}{10} & \color{red}{8} &
\end{array}
$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (\color{blue}{2}x^2 + \color{blue}{7}x + \color{blue}{10})(x-2) + \color{red}{8}$$

Ejemplo: Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$. Utilice división sintética para hallar $f(2)$.

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\
\downarrow & 2 & 4 & 2 & 8 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & \color{red}{7} &
\end{array}
$$

$$\text{Teorema del residuo} \quad \Longrightarrow \quad f(2) = \color{red}{7}$$

Teorema fundamental del álgebra

Teorema (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio $f(x)$ de grado positivo con coeficientes complejos posee al menos un cero complejo.

Polinomio $f(x)$	Forma factorizada	Ceros de $f(x)$
$5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5x(x-(3+2i))(x-(3-2i))$	$0, \quad 3 \pm 2i$
$-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+i)(x-i)$	$-\frac{1}{3}, \quad \pm i$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Teorema fundamental del álgebra

Teorema (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio $f(x)$ de grado positivo con coeficientes complejos posee al menos un cero complejo.

Polinomio $f(x)$	Forma factorizada	Ceros de $f(x)$
$5x^3-30x^2+65x$	$5x(x-(3+2i))(x-(3-2i))$	$0,\quad 3\pm 2i$
$-6x^3-2x^2-6x-2$	$-6\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+i)(x-i)$	$-\frac{1}{3},\quad \pm i$

Teorema (Teorema de factorización completa para polinomios)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n>0$, entonces existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que $f(x)=a(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)$, donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Notemos que cada número z_k es un cero de $f(x)$.

Teorema fundamental del álgebra

Teorema (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio $f(x)$ de grado positivo con coeficientes complejos posee al menos un cero complejo.

Polinomio $f(x)$	Forma factorizada	Ceros de $f(x)$
$5x^3 - 30x^2 + 65x$	$5x(x-(3+2i))(x-(3-2i))$	$0, \quad 3 \pm 2i$
$-6x^3 - 2x^2 - 6x - 2$	$-6\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x+i)(x-i)$	$-\dfrac{1}{3}, \quad \pm i$

Teorema (Teorema de factorización completa para polinomios)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que $f(x) = a(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n)$, donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Notemos que cada número z_k es un cero de $f(x)$.

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14\,x^5 + 73\,x^4 - 172\,x^3 + 176\,x^2 - 64\,x$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14x^5 + 73x^4 - 172x^3 + 176x^2 - 64x =$$

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14x^5 + 73x^4 - 172x^3 + 176x^2 - 64x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14x^5 + 73x^4 - 172x^3 + 176x^2 - 64x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x-c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x)=0$.

Ejemplo:

$$f(x) \;=\; x^6-14\,x^5+73\,x^4-172\,x^3+176\,x^2-64\,x \;=\; x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n>0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14x^5 + 73x^4 - 172x^3 + 176x^2 - 64x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 =$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14x^5 + 73x^4 - 172x^3 + 176x^2 - 64x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 - x - 2)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14\,x^5 + 73\,x^4 - 172\,x^3 + 176\,x^2 - 64\,x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 - x - 2) =$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) \;=\; x^6 - 14\,x^5 + 73\,x^4 - 172\,x^3 + 176\,x^2 - 64\,x \;=\; x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 \;=\; x^3(x^2 - x - 2) \;=\; x^3(x+1)(x-2)$$

Ceros: $0, 0, 0, -1, 2$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Número de ceros de un polinomio

Definición

Si un factor, digamos $x - c$, se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplo:

$$f(x) = x^6 - 14\,x^5 + 73\,x^4 - 172\,x^3 + 176\,x^2 - 64\,x = x(x-1)^2(x-4)^3$$

Ceros: 0 es cero de multiplicidad 1, 1 es un cero de multiplicidad 2 y 4 es un cero de multiplicidad 3.

Teorema (Número exacto de ceros de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n ceros.

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 - x - 2) = x^3(x+1)(x-2)$$

Ceros: $0, 0, 0, -1, 2$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo:

$$x^2 - 2x - 1 =$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo:

$$x^2 - 2\,x - 1 =$$

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo:

$$x^2 - 2\,x - 1 = \left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo:

$$x^2 - 2\,x - 1 = \left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo:

$$x^2 - 2\,x - 1 = \left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$$

Teorema (Suma y producto de ceros)

La suma y el producto de los ceros del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0\,, \quad a_n \neq 0$$

vienen dados en términos de sus coeficientes por medio de

$$\textit{Suma de ceros} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad y \quad \textit{Producto de ceros} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Ceros conjugados

Teorema (Ceros irracionales conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ *es un cero irracional de* $p(x)$ *(*u *no es cuadrado perfecto), entonces* $c_2 = s - t\sqrt{u}$ *también es un cero de* $p(x)$.

Ejemplo:

$$x^2 - 2\,x - 1 = \left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)$$

Teorema (Suma y producto de ceros)

La suma y el producto de los ceros del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0\,, \quad a_n \neq 0$$

vienen dados en términos de sus coeficientes por medio de

$$\textit{Suma de ceros} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad y \quad \textit{Producto de ceros} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ *es un cero cero complejo de* $p(x)$*, entonces* $\bar{z} = a - bi$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ *es un cero cero complejo de* $p(x)$*, entonces* $\bar{z} = a - bi$ *también es un cero de* $p(x)$.

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ es un cero cero complejo de $p(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $p(x)$.

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

Solución:

Ceros: $-3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 4i$ y $1 + 4i$

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ *es un cero cero complejo de* $p(x)$*, entonces* $\bar{z} = a - bi$ *también es un cero de* $p(x)$*.*

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

Solución:

Ceros: $-3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 4i$ y $1 + 4i$

Factores: $x - (-3 + 2i)$, $x - (-3 - 2i)$, $x - (1 - 4i)$ y $x - (1 + 4i)$,

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ es un cero cero complejo de $p(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $p(x)$.

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

Solución:

Ceros: $-3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 4i$ y $1 + 4i$

Factores: $x - (-3 + 2i)$, $x - (-3 - 2i)$, $x - (1 - 4i)$ y $x - (1 + 4i)$,

$$f(x) = [x - (-3 + 2i)][x - (-3 - 2i)][x - (1 - 4i)][x - (1 + 4i)]$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ es un cero cero complejo de $p(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $p(x)$.

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

Solución:

Ceros: $-3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 4i$ y $1 + 4i$

Factores: $x - (-3 + 2i)$, $x - (-3 - 2i)$, $x - (1 - 4i)$ y $x - (1 + 4i)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (-3 + 2i)][x - (-3 - 2i)][x - (1 - 4i)][x - (1 + 4i)] \\ &= [x^2 + 6x + 13][x^2 - 2x + 16] \\ &= x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 70x + 208 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros conjugados

Teorema (Ceros complejos conjugados)

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

son reales y si $z = a + bi$ es un cero cero complejo de $p(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también es un cero de $p(x)$.

Ejemplo: encuentre un polinomio de grado cuatro que tenga coeficientes reales y ceros $-3 + 2i$, $1 - 4i$.

Solución:

Ceros: $-3 + 2i$, $-3 - 2i$, $1 - 4i$ y $1 + 4i$

Factores: $x - (-3 + 2i)$, $x - (-3 - 2i)$, $x - (1 - 4i)$ y $x - (1 + 4i)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (-3 + 2i)][x - (-3 - 2i)][x - (1 - 4i)][x - (1 + 4i)] \\ &= [x^2 + 6x + 13][x^2 - 2x + 16] \\ &= x^4 + 4x^3 + 17x^2 + 70x + 208 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0.
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n.

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

Posibles ceros racionales

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0.
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n.

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} =$$

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0.
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n.

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} =$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1},$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0.
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n.

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

$f(-1) = 3\,,$

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0.
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n.

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f\,(x) = x^5 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

$$f(-1) = 3\,, \quad f(1) = 1\,,$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f\,(x) = x^5 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

$$f(-1) = 3\,, \quad f(1) = 1\,, \quad f(-2) = 4\,,$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *tiene coeficientes enteros y* c/d *es un cero racional de* $f(x)$ *tal que* c *y* d *no posean un factor primo común, entonces*

- *el numerador* c *del cero es un factor del término constante* a_0*.*
- *el denominador* d *del cero es un factor del término constante* a_n*.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f\,(x) = x^5 - 3\,x^3 + 4\,x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \; \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

$$f(-1) = 3\,, \quad f(1) = 1\,, \quad f(-2) = 4\,, \quad f(2) = 24$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Ceros racionales

Teorema

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no posean un factor primo común, entonces

- *el numerador c del cero es un factor del término constante a_0.*
- *el denominador d del cero es un factor del término constante a_n.*

Ejemplo: Muestre que el polinomio

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2$$

no tiene ceros racionales.

Solución:

$$\text{Posibles ceros racionales} = \frac{\text{factores de } 2}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}$$

$$f(-1) = 3, \quad f(1) = 1, \quad f(-2) = 4, \quad f(2) = 24$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

$$\text{Posibles ceros racionales}: \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 12, \ \pm 24$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \; = \; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

$$\text{Posibles ceros racionales}: \; \pm 1\,,\; \pm 2\,,\; \pm 3\,,\; \pm 4\,,\; \pm 6\,,\; \pm 8\,,\; \pm 12\,,\; \pm 24$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \; = \; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \;=\; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

$$\text{Posibles ceros racionales}: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \;=\; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

$$\text{Posibles ceros racionales}: \ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \ = \ x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm1\,,\ \pm2\,,\ \pm3\,,\ \pm4\,,\ \pm6\,,\ \pm8\,,\ \pm12\,,\ \pm24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -9 & -4 & -4 \\ \downarrow & -4 & 8 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \;=\; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

$$\text{Posibles ceros racionales : } \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -9 & -4 & -4 \\ \downarrow & -4 & 8 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x+3)(x^2-2x-1)$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \;=\; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -9 & -4 & -4 \\ \downarrow & -4 & 8 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x+3)(x^2-2x-1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) \;=\; x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -9 & -4 & -4 \\ \downarrow & -4 & 8 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x+3)(x^2-2x-1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Ceros racionales

Ejemplo: Halle todas las soluciones racionales de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0$$

Solución:

$$f(x) = x(x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24)$$

Posibles ceros racionales : $\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3\,,\ \pm 4\,,\ \pm 6\,,\ \pm 8\,,\ \pm 12\,,\ \pm 24$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -13 & -25 & 50 & 24 & 2 \\ \downarrow & 2 & 10 & -6 & -62 & -24 & \\ \hline 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x^4+5x^3-3x^2-31x-12)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -3 & -31 & -12 & -3 \\ \downarrow & -3 & -6 & 27 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & -9 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x^3+2x^2-9x-4)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -9 & -4 & -4 \\ \downarrow & -4 & 8 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = x(x-2)(x+3)(x+3)(x^2-2x-1)$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803