MathCon

The Mathematics Firm

Funciones trigonométricas básicas

Propiedades básicas de las funciones trigonométricas:
Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante.

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

Contenido

1 Introducción

Las funciones trigonométricas tienen una larga historia y lista de aplicaciones, en esta lección aprenderemos a encontrar los valores más comunes de la funciones trigonométricas básicas, como $seno$, $coseno$, $tangente$, $cotangente$, $secante$, $cosecante$. También aprenderemos a dibujar sus gráficas, y listaremos algunas de sus propiedades más básicas.

1.1. Ángulos en grados y radianes

Las dos maneras más comunes de denotar un ángulo es por grados y por radianes(números reales). La relación que tienen los ángulos con los radianes se muestra en la siguiente tabla.

Valores entre grados y radianes más comunes									
$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2
La función $\operatorname{sen}(x)$

La función seno puede ser definida de diferentes maneras, la forma más común de hacerlo es a partir de un triángulo rectángulo.

La función *seno* de un ángulo α se define, como el cociente del cateto opuesto al ángulo α, sobre la hipotenusa del triángulo.

$$Sen(\alpha) = \frac{a}{c}$$

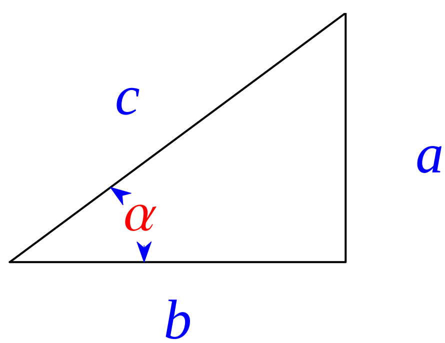


Figura 2: El valor del seno y coseno en el círculo unitario.

2.1. El valor del seno para algunos ángulos comunes

Para calcular el valor del *seno* en algunos ángulos comunes, hay que trasladar al triángulo en consideración al círculo unitario, ya que de esta manera se podrán obtener algunos valores de la función *seno* de forma explícita. Como $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$ donde a es el cateto opuesto y c la hipotenusa, por ser el círculo unitario $c = 1$. Por lo tanto $\operatorname{sen}(\alpha)$ es igual a la longitud del segmento rojo de la figura 2.

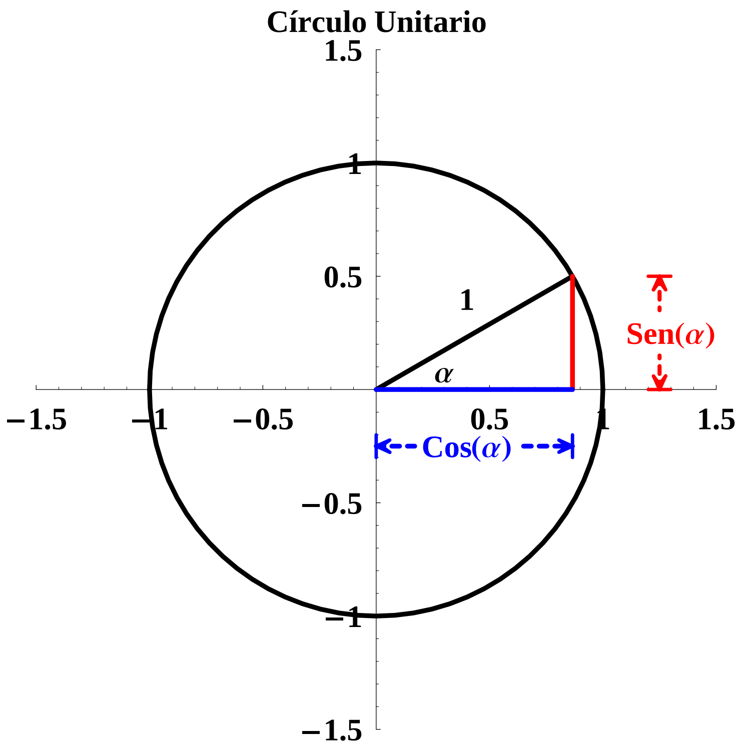


Figura 2: El valor del seno y coseno en el círculo unitario.

Los valores de ángulos más simples a obtener, son los valores siguientes: $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$. Como se observa en la figura 3, el *seno* toma los valores de $0, 1, 0, -1, 0$ respectivamente para estos primeros ángulos.

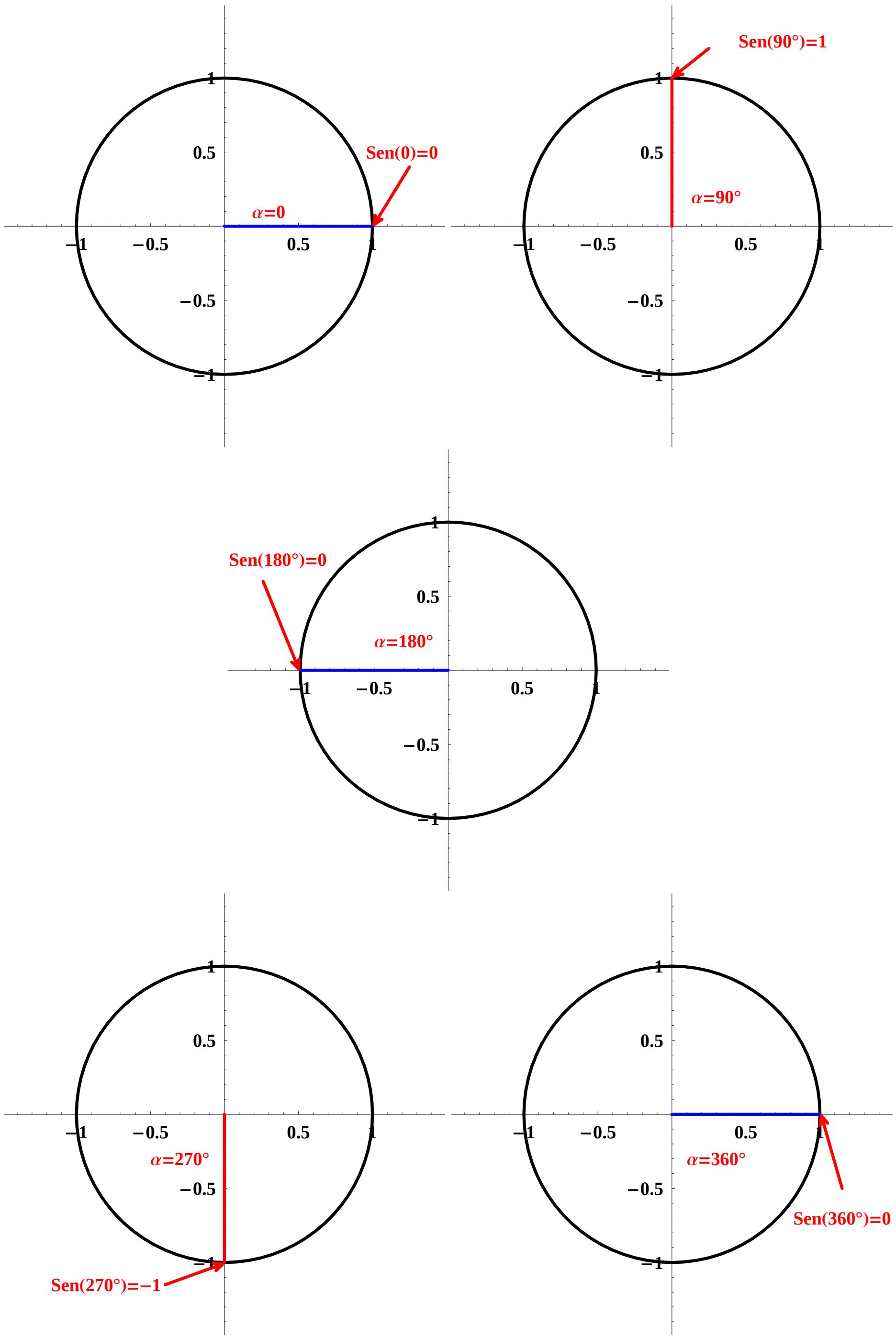


Figura 3: El valor del seno para $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

En las siguientes subsecciones calcularemos el valor explícito del *seno* para otros ángulos comunes. Se trabajaran esencialmente dos triángulos, el triángulo rectángulo de $30°$ y $60°$ como ángulos internos, y el triángulo rectángulo isosceles de $45°$.

2.2. El valor del seno para $30°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 30°$ se calcula considerando los triángulos $\triangle\ ACB, \triangle\ ABD$ en círculo unitario como se muestra en la figura 4:

1. El ángulo $\angle BAC$ es el ángulo de 30°.
2. El ángulo $\angle ACB$, es de $90°$, porque el triángulo $\triangle\ ACB$ es rectángulo.
3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de $60°$.
4. También el ángulo $\angle D$, es de $60°$, derivado del reflejo del triángulo $\triangle\ ACB$.
5. Así el triángulo $\triangle\ ABD$ es equiangular, por lo tanto equilátero.
6. Entonces el lado DB tiene como longitud 1.
7. Como el ángulo es de 30°, entonces el segmento AC biseca al lado BD, entonces la longitud de BC es $\frac{1}{2}$.
8. Lo anterior muestra que el $seno$ de 30° es $\frac{1}{2}$.

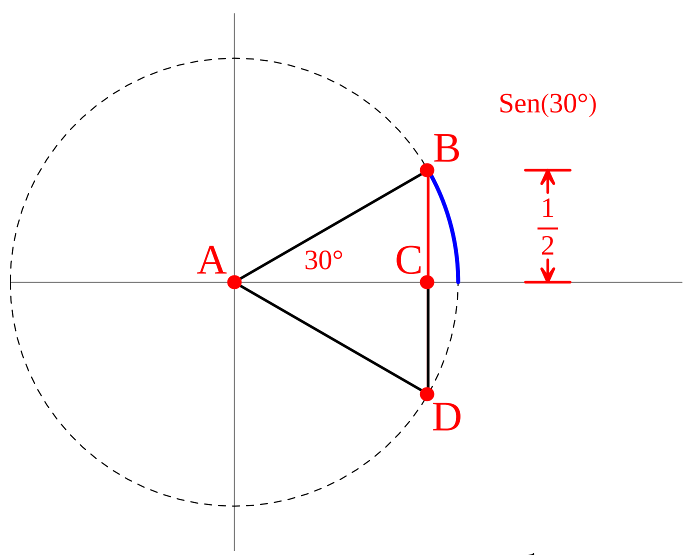


Figura 4: $Sen(\pi/6) = \text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$.

2.3. El valor del seno para $45°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 45°$, se calcula al considerar el triángulo $\triangle\ ACB$, en el círculo unitario como se muestra en la figura 5:

1. El ángulo $\angle A$ es el ángulo de $45°$.
2. El ángulo $\angle C$, es de $90°$, porque el triángulo $\triangle\ ACB$ es rectángulo.

3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de 45°.
4. Por lo tanto el triángulo $\triangle\ ABC$ es isosceles.
5. Entonces el lado AC tiene la misma longitud del lado BC.
6. Por el teorema de pitágoras, $|AC|^2 + |BC|^2 = 1$, pero $|AC| = |BC|$, es decir $2|BC|^2 = 1$, entonces $|BC|$ es $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
7. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de 45° es $\frac{\sqrt{2}}{2}$, multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

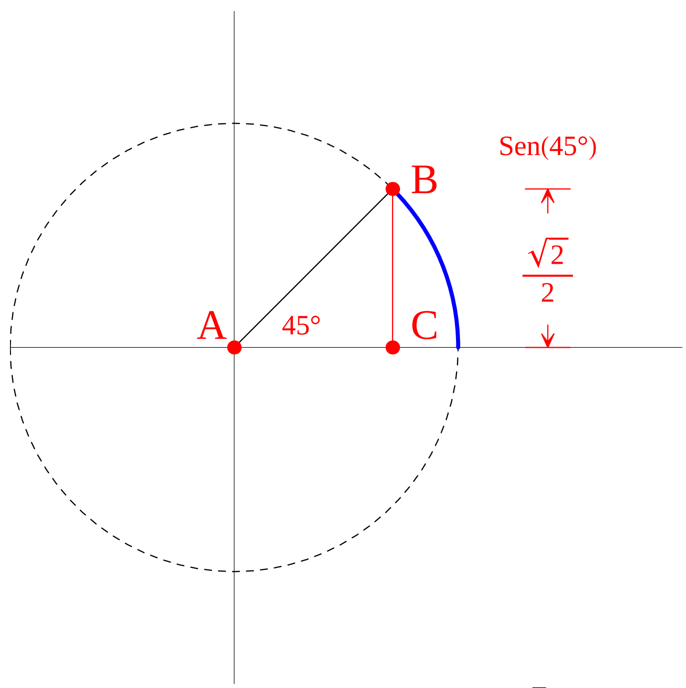


Figura 5: $\mathrm{sen}(\pi/4) = \mathrm{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.4. El valor del seno para 60°

El valor del $seno$ en $\alpha = 60^\circ$, se calcula al considerar el triángulo $\triangle\ ACB$ en el círculo unitario como se muestra en la figura 6:

1. El ángulo $\angle A$ es el ángulo de 60°.
2. El ángulo $\angle C$, es de 90°, porque el triángulo $\triangle\ ACB$ es rectángulo.
3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de 30°.
4. Entonces, del triángulo de la figura 4, del seno de 30°, tenemos que el lado $|AC| = \frac{1}{2}$.

5. Por el teorema de pitágoras, $|AC|^2 + |CB|^2 = 1$, pero $|AC| = \frac{1}{2}$, entonces $|CB|^2 = 1 - \frac{1}{4}$, lo que implica que $|CB|^2 = \frac{3}{4}$, o sea $|CB| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de 60° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

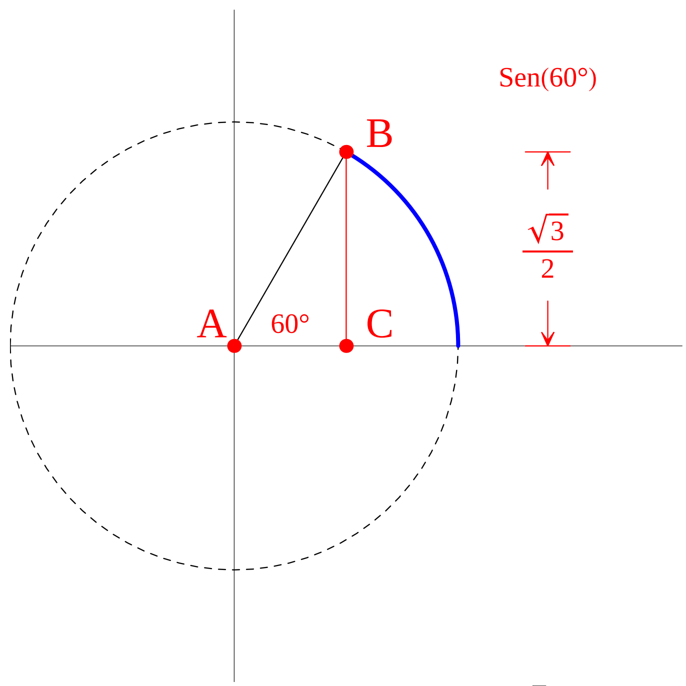


Figura 6: $\text{sen}(\pi/3) = \text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.5. El valor del seno para $120°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 120°$, se calcula considerando el triángulo $\triangle ACB$ en el círculo unitario como se muestra en la figura 7:

1. En $seno$ del ángulo 120°, es la longitud del segmento $|BC|$.
2. El ángulo $\angle A$ es de 60°.
3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de 30°.
4. El triángulo $\triangle ACB$ es congruente al $\triangle ACB$ del caso 60°.
5. Por lo tanto $|BC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de 120° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

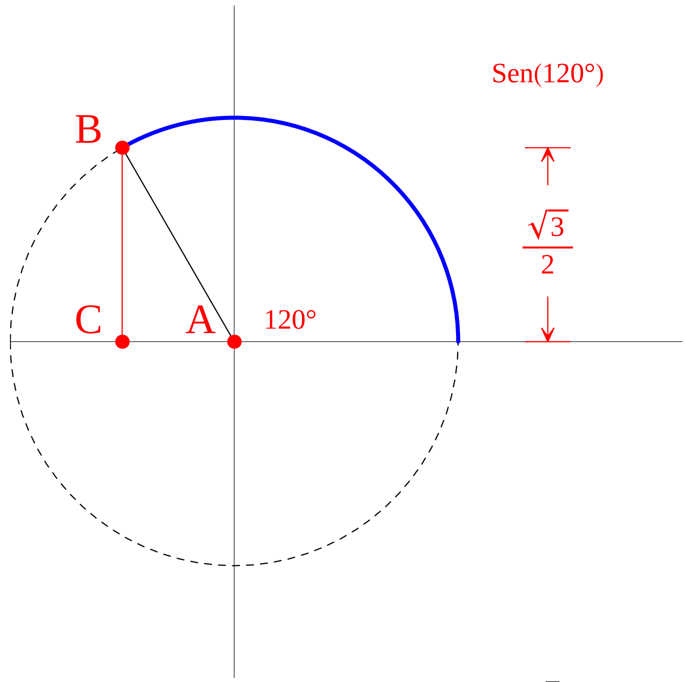


Figura 7: $\operatorname{sen}(2\pi/3) = \operatorname{sen}(120°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.6. El valor del seno para $135°$

El valor del *seno* en $\alpha = 135°$, se calcula considerando el triángulo $\triangle BCA$ en el círculo unitario como se muestra en la figura 8:

1. En *seno* del ángulo $135°$, es la longitud del segmento $|BC|$.
2. El ángulo $\angle A$ es de $45°$.
3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de $45°$.
4. El triángulo $\triangle BCA$ es congruente al $\triangle BCA$ del caso $45°$.
5. Por lo tanto $|BC| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. Lo anterior quiere decir que el *seno* de $120°$ es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

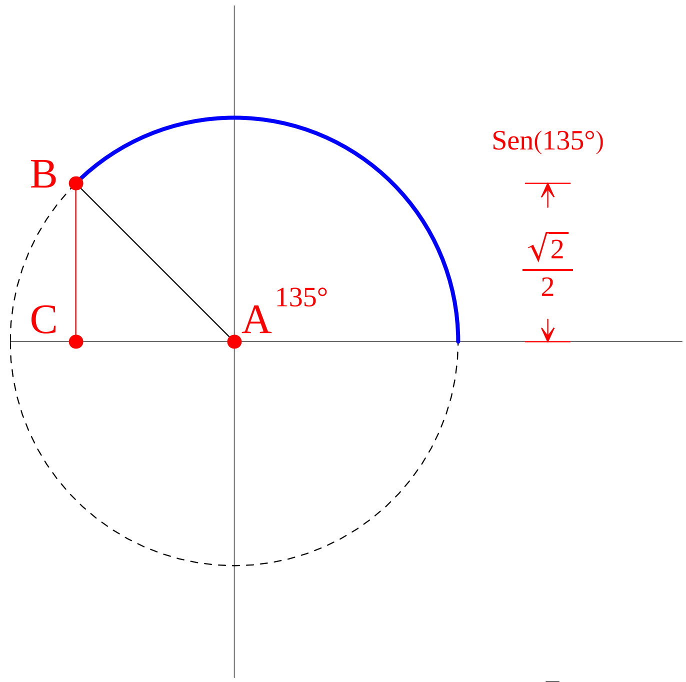


Figura 8: $\mathrm{sen}(3\pi/4) = \mathrm{sen}(135°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.7. El valor del seno para $150°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 150°$, se calcula considerando el triángulo $\triangle BCA$ en el círculo unitario como se muestra en la figura 9:

1. En $seno$ del ángulo $135°$, es la longitud del segmento $|BC|$.
2. El ángulo $\angle A$ es de $45°$.
3. Por lo tanto el ángulo $\angle B$, es de $45°$.
4. El triángulo $\triangle BCA$ es congruente al $\triangle BCA$ del caso $45°$.
5. Por lo tanto $|BC| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $120°$ es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

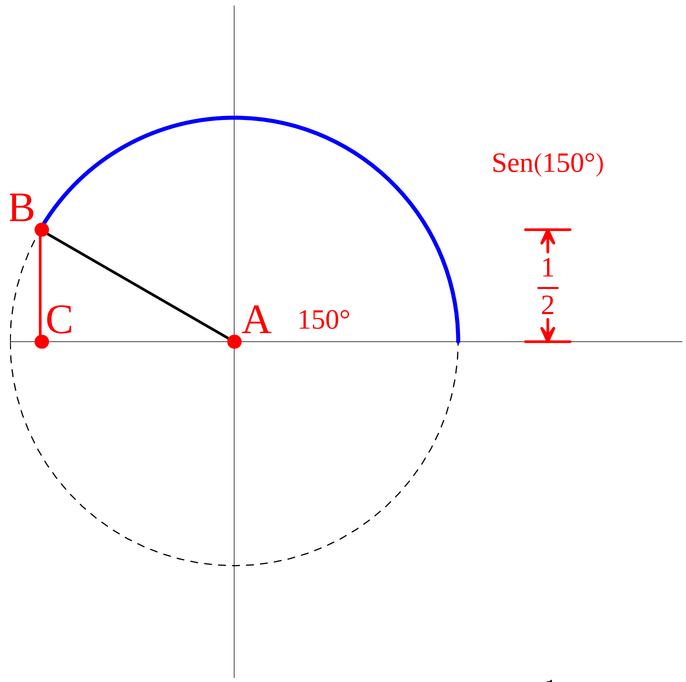


Figura 9: $Sen(5\pi/6) = Sen(150^\circ) = \dfrac{1}{2}$.

2.8. El valor del seno para $210°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 210°$, se calcula considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 10:

1. En $seno$ del ángulo $210°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $30°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $210°$ es $-\dfrac{1}{2}$.

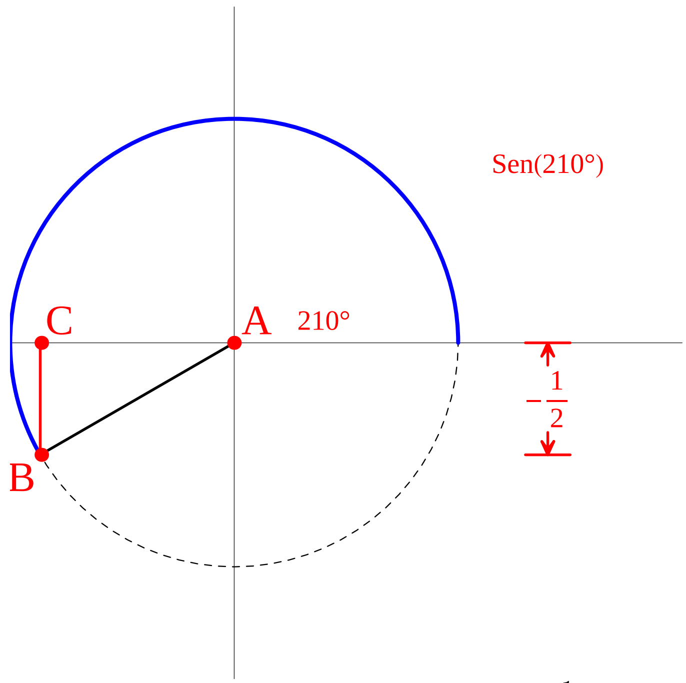


Figura 10: $Sen(7\pi/6) = Sen(210°) = -\dfrac{1}{2}$.

2.9. El valor del seno para $225°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 225°$, se calcula considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 11:

1. En $seno$ del ángulo $210°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $30°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $210°$ es $-\frac{1}{2}$.

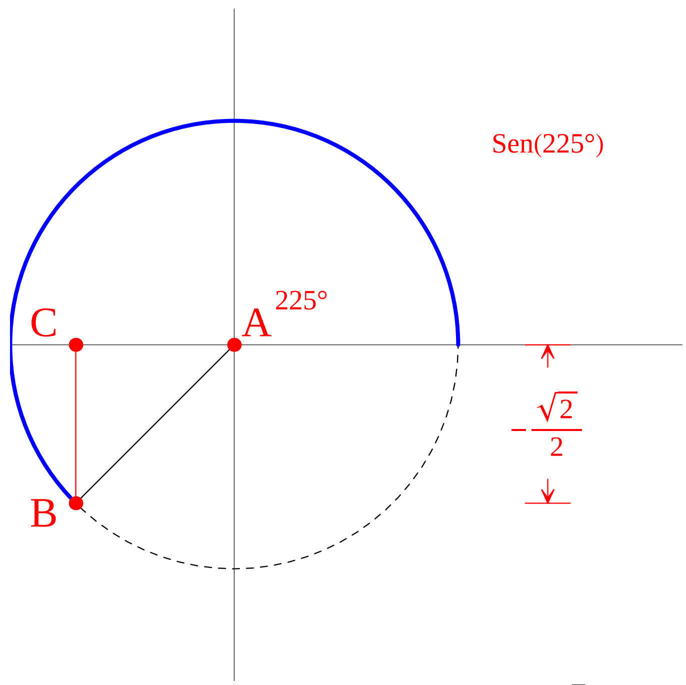


Figura 11: $Sen(5\pi/4) = Sen(210°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.10. El valor del seno para $240°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 240°$, se puede calcular considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 12:

1. En $seno$ del ángulo $240°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $30°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $240°$ es $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

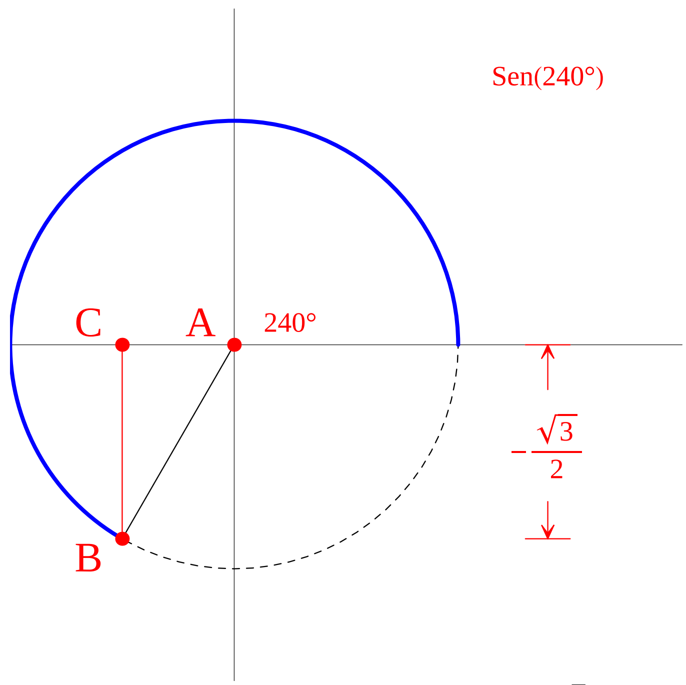


Figura 12: $Sen(4\pi/3) = Sen(240°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.11. El valor del seno para $300°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 300°$, se puede calcular considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 13:

1. En $seno$ del ángulo $300°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $30°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $300°$ es $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

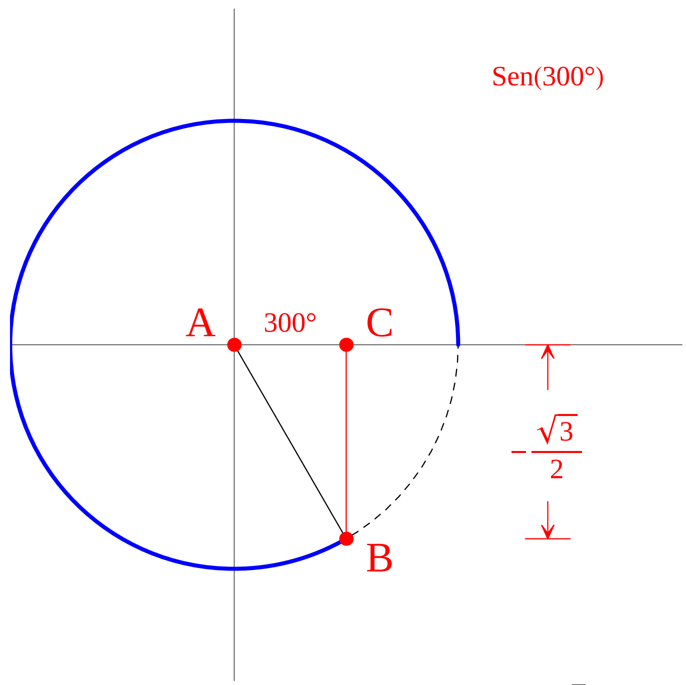


Figura 13: $Sen(4\pi/3) = Sen(240°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.12. El valor del seno para $315°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 315°$, se puede calcular considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 14:

1. En $seno$ del ángulo $315°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $45°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $300°$ es $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

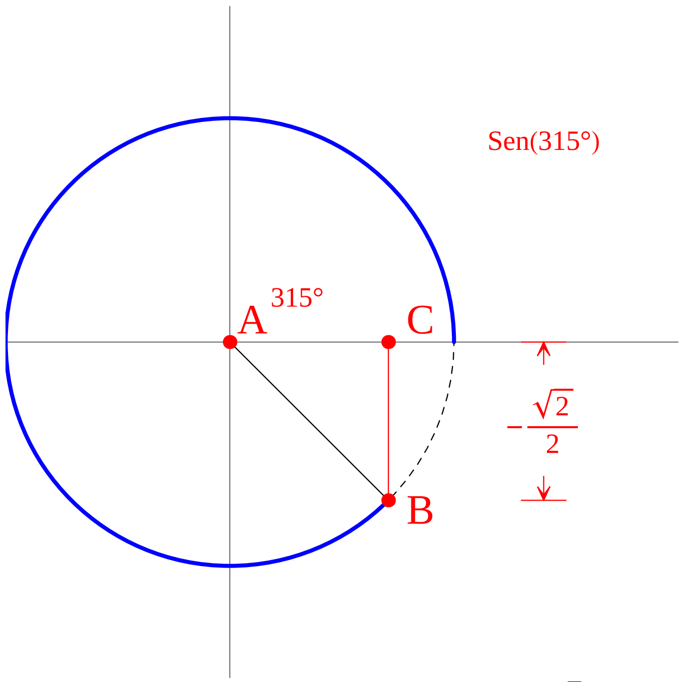


Figura 14: $Sen(7\pi/4) = Sen(315°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.13. El valor del seno para $330°$

El valor del $seno$ en $\alpha = 330°$, se puede calcular considerando el triángulo en el círculo unitario como se muestra en la figura 15:

1. En $seno$ del ángulo $330°$, es la longitud del segmento $|BC|$. En este caso la longitud es negativa.
2. El triángulo a considerar es congruente al caso de $30°$
3. Lo anterior quiere decir que el $seno$ de $315°$ es $-\frac{1}{2}$.

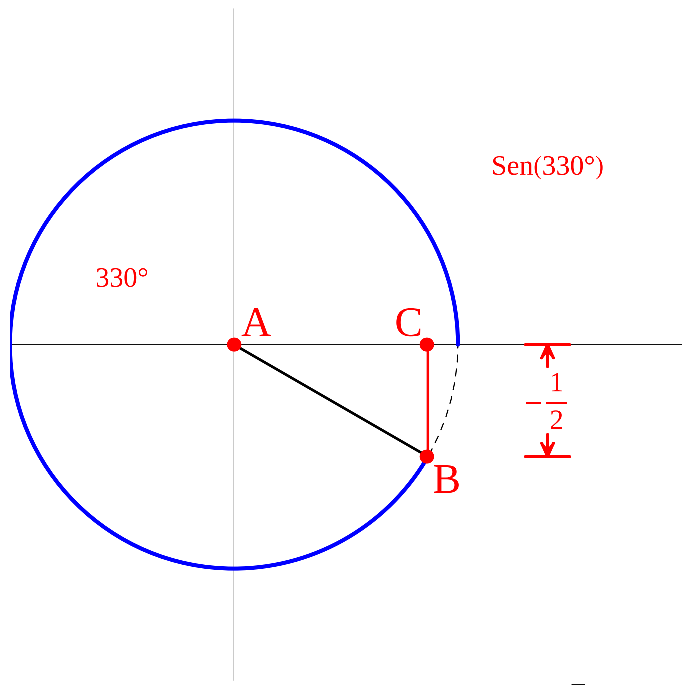


Figura 15: $Sen(7\pi/4) = Sen(315°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.14. Construcción de la gráfica del seno

La construcción de la gráfica del *seno* se puede realizar de la manera como se muestra paso a paso en las siguientes figuras. Se considera que la función es continua y derivable, es decir que no hay saltos en la gráfica y la línea de la función es una curva. En esta construcción debe observarse que la línea azul en el círculo se mueve girando varios ángulos que al trasladarlos a la línea del eje x estos ángulos se convierten números reales. La gráfica que se forma (la línea roja) se dibuja de manera continua, cosa que podemos suponer libremente aquí. Finalmente debemos observar que de esta manera dibujamos la gráfica del *seno* en el intervalo de ángulos $[0, 360°]$ o equivalentemente $[0, 2\pi]$, sin embargo esto mismo lo podemos extender a todos los ángulos. El periodo de 2π del *seno* se sigue por la periodicidad del círculo.

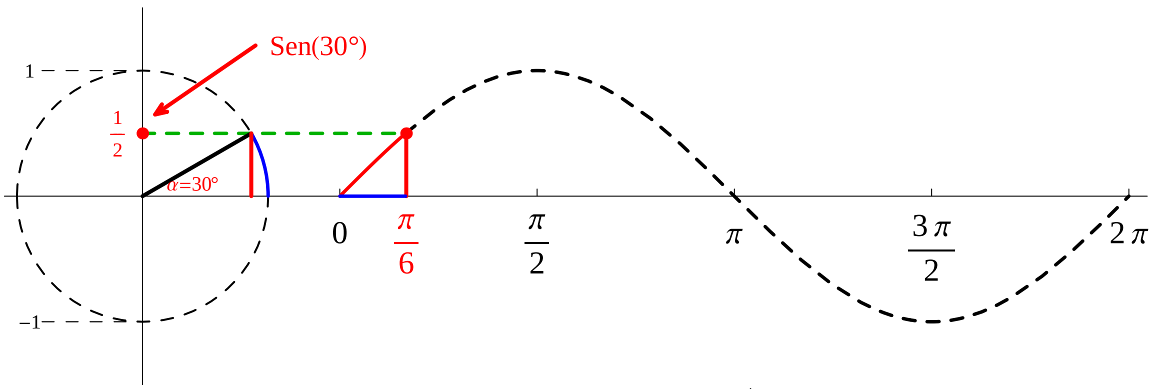


Figura 16: $\operatorname{sen}(30°) = \operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$.

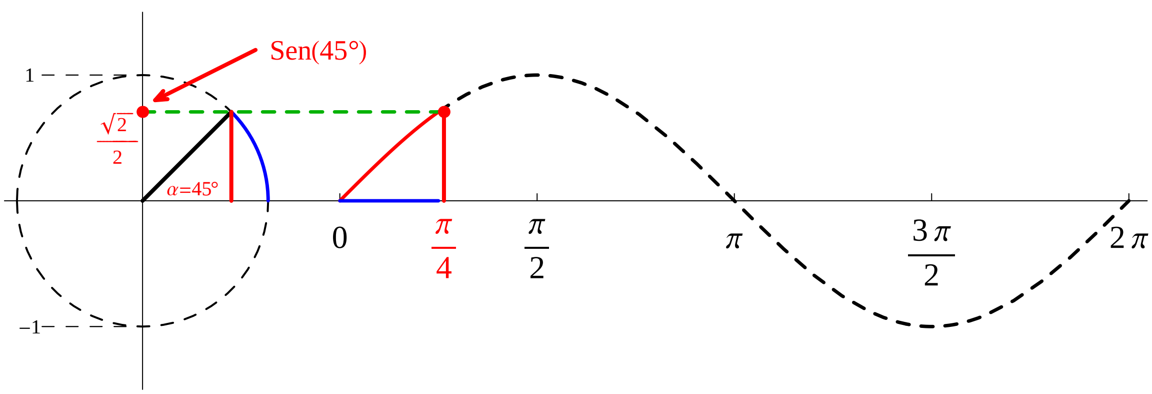


Figura 17: $\operatorname{sen}(45°) = \operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

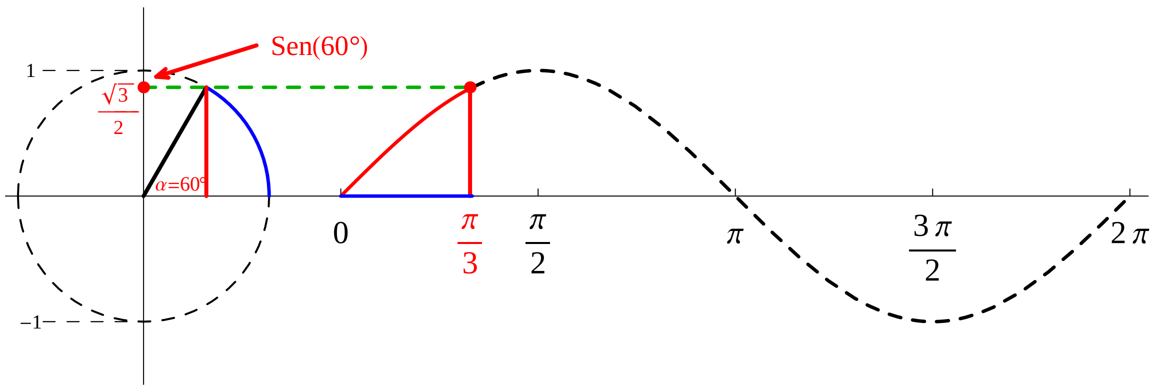


Figura 18: $\mathrm{sen}(60°) = \mathrm{sen}(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

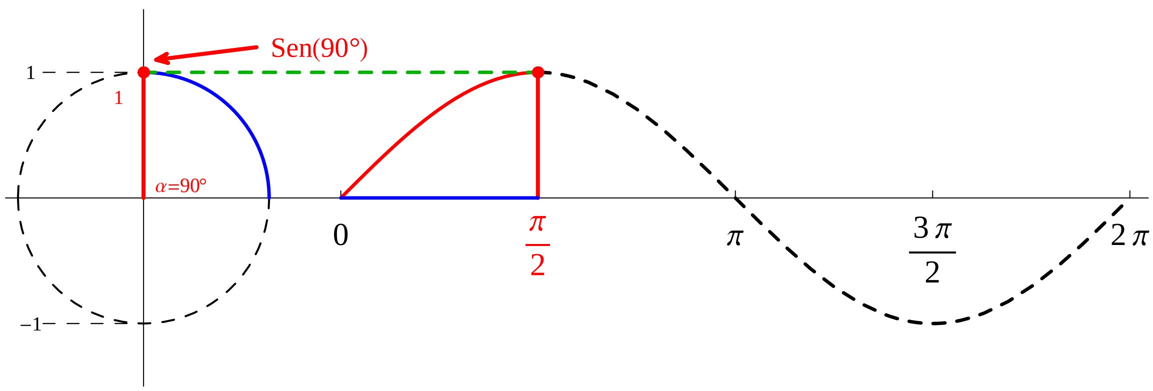


Figura 19: $\mathrm{sen}(90°) = \mathrm{sen}(\pi/2) = 1$.

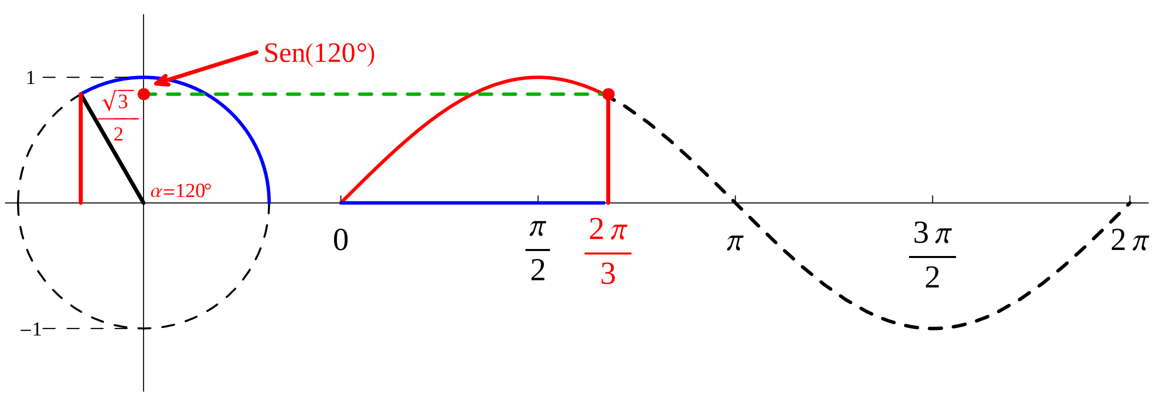


Figura 20: $\mathrm{sen}(120°) = \mathrm{sen}(2\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

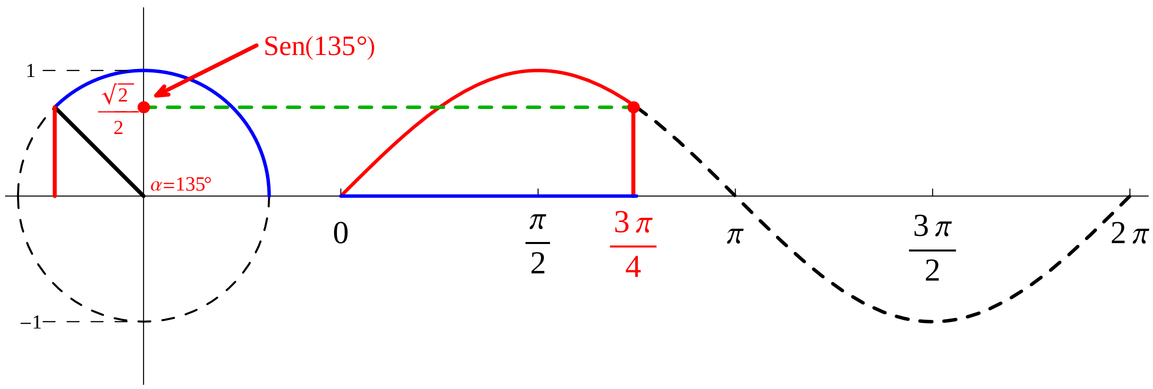


Figura 21: $\mathrm{sen}(135°) = \mathrm{sen}(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

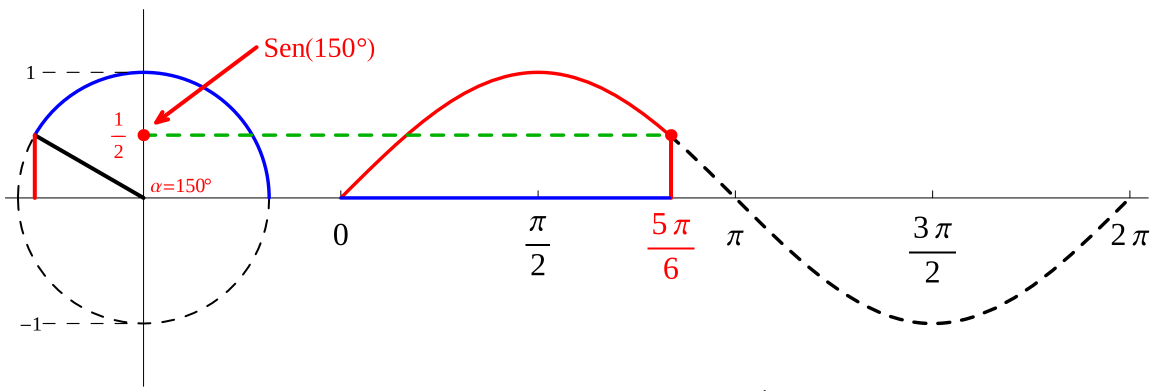


Figura 22: $\mathrm{sen}(150°) = \mathrm{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$.

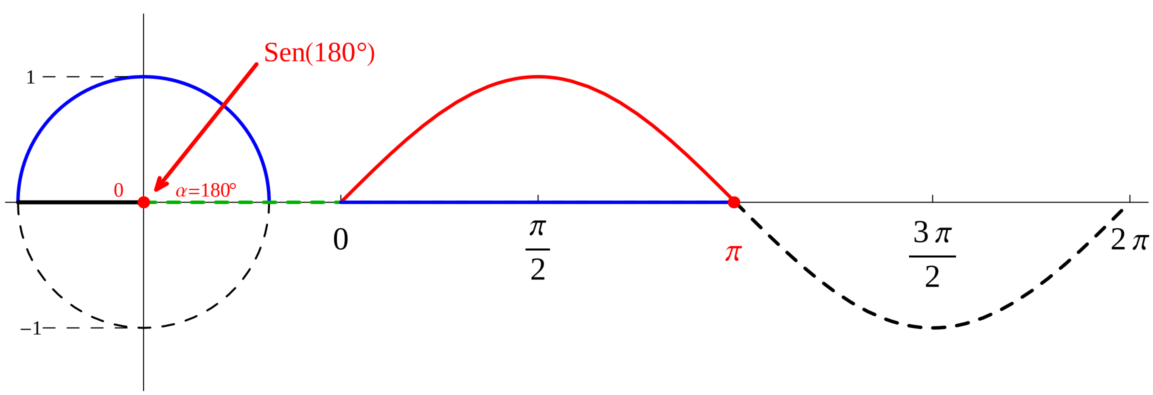


Figura 23: $\mathrm{sen}(180°) = \mathrm{sen}(\pi) = 0$.

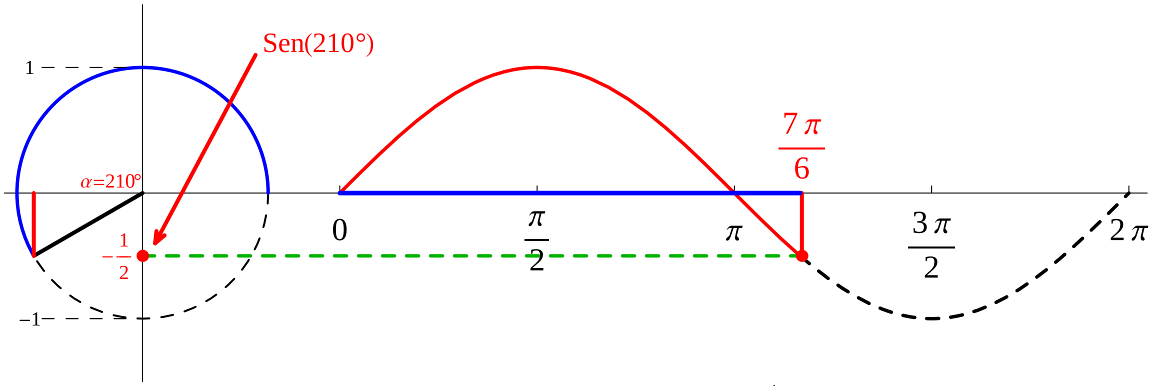


Figura 24: $\mathrm{sen}(210°) = \mathrm{sen}(7\pi/6) = -\dfrac{1}{2}$.

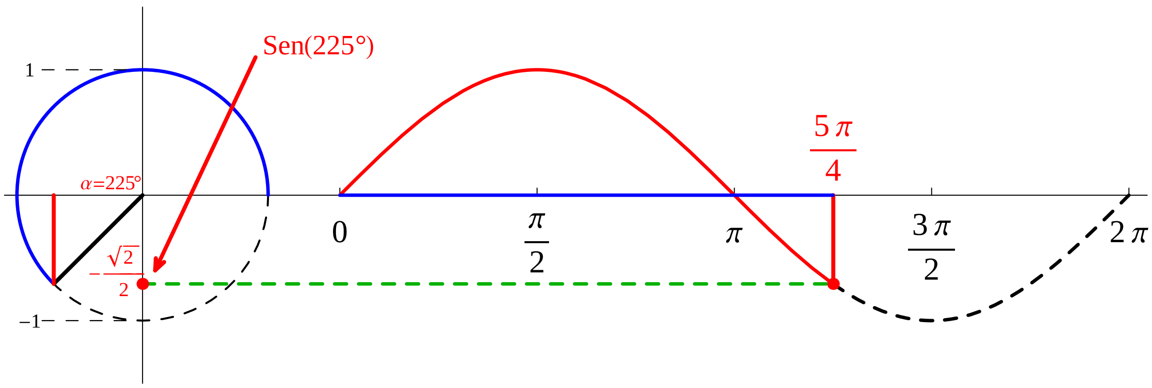


Figura 25: $\mathrm{sen}(225°) = \mathrm{sen}(5\pi/4) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

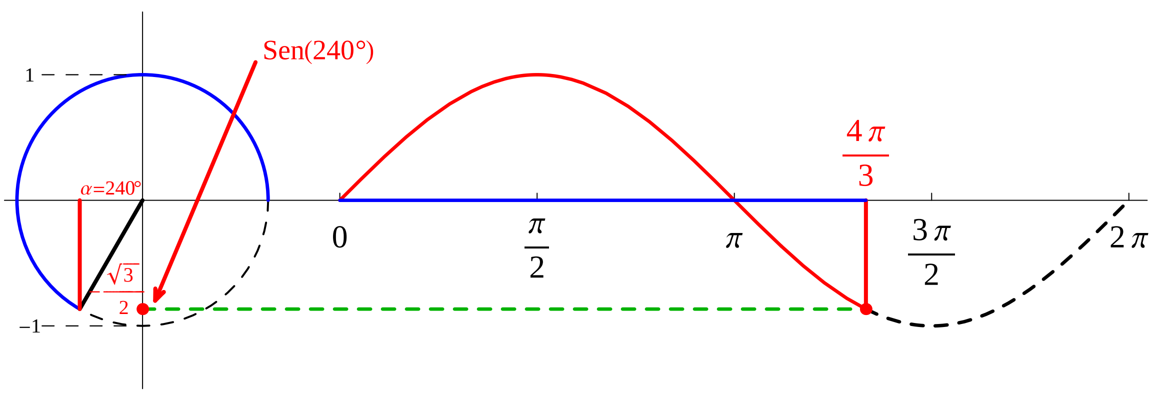


Figura 26: $\mathrm{sen}(240°) = \mathrm{sen}(4\pi/3) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

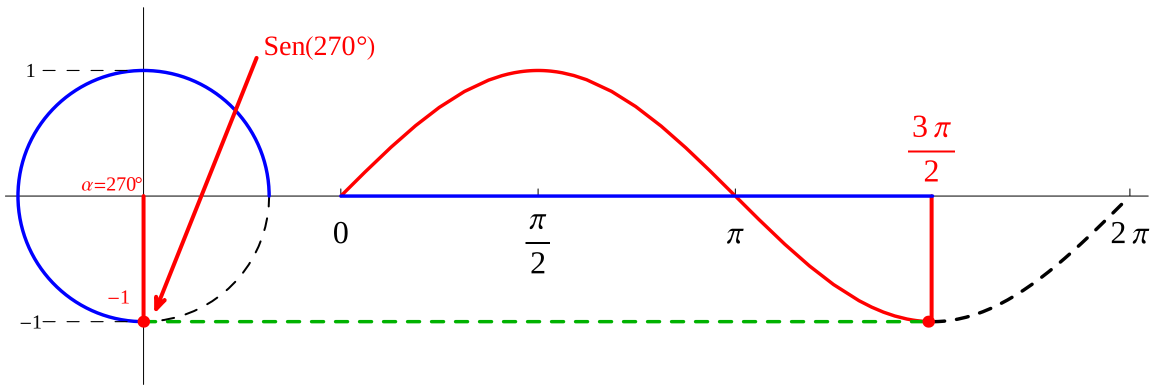


Figura 27: $\operatorname{sen}(270^\circ) = \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$.

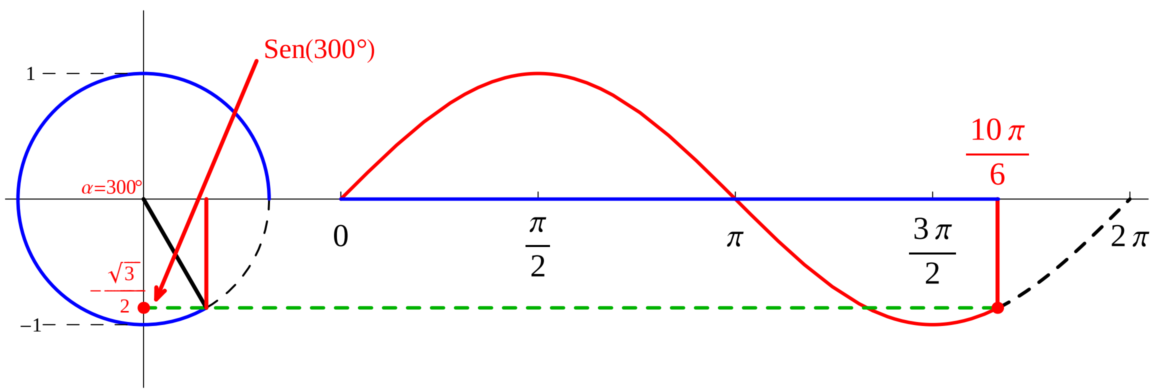


Figura 28: $\operatorname{sen}(300^\circ) = \operatorname{sen}(5\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

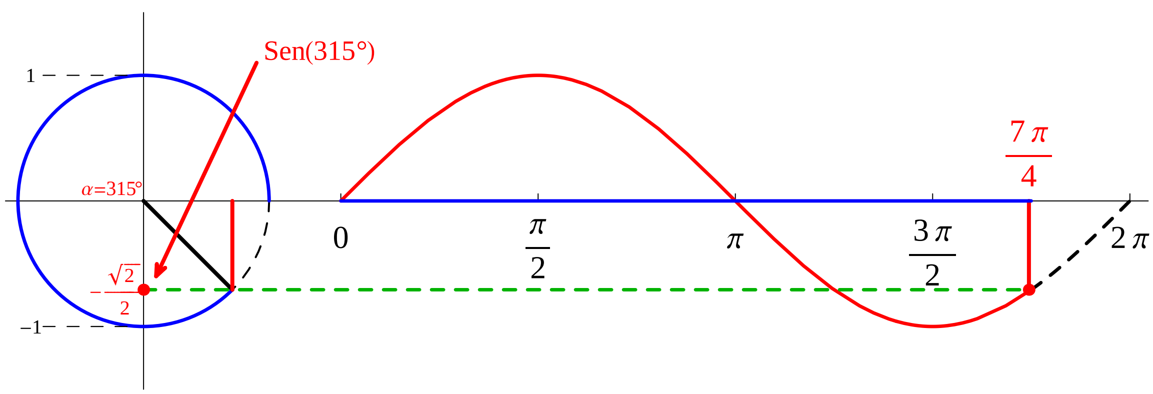


Figura 29: $\operatorname{sen}(315^\circ) = \operatorname{sen}(7\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

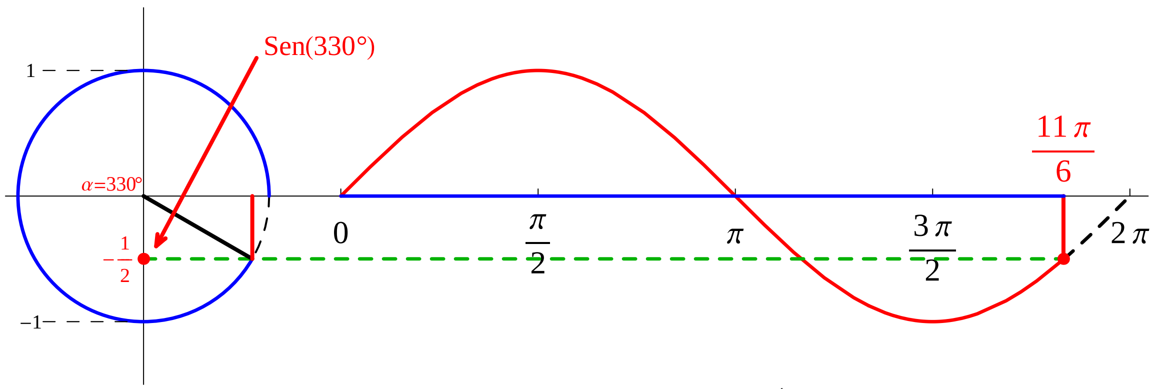


Figura 30: $\operatorname{sen}(330°) = \operatorname{sen}(11\pi/6) = -\frac{1}{2}$.

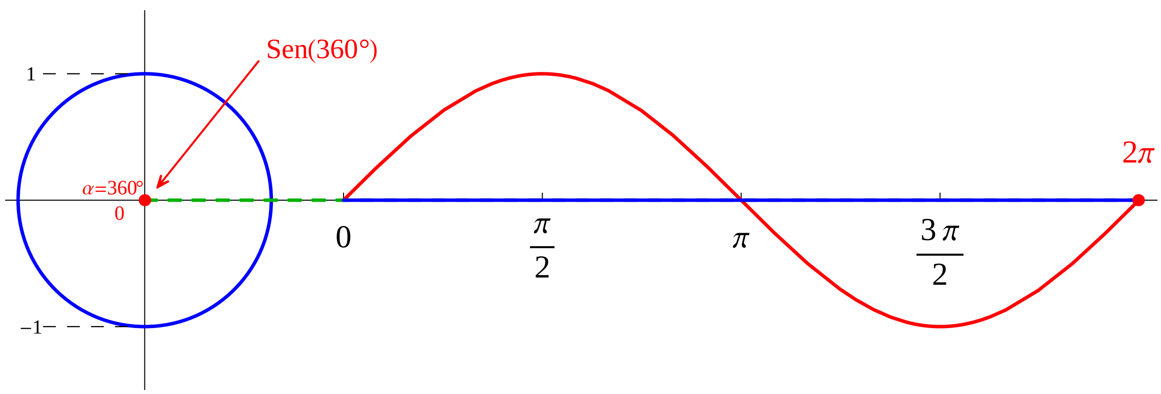


Figura 31: $\operatorname{sen}(360°) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$.

Finalmente la gráfica del $seno$ queda de la siguiente manera:

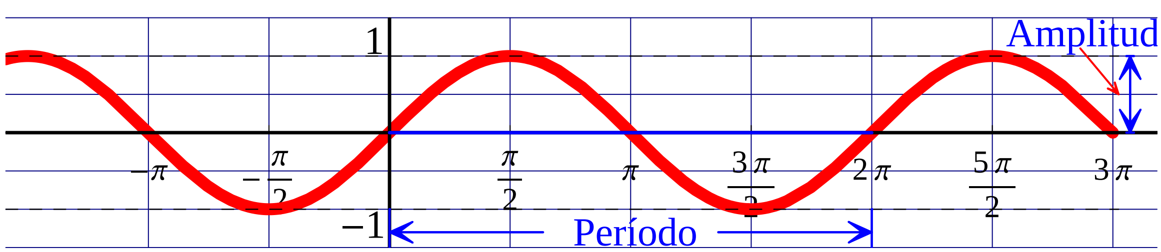


Figura 32: $\operatorname{sen}(x)$.

2.15. Propiedades básicas de la función $\operatorname{sen}(x)$

De la gráfica de la función $seno$ podemos inferir algunas de sus propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función $seno$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango (imagen del dominio) al intervalo $[-1, 1]$

$$\operatorname{sen}(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

2. La función $seno$ es impar, es decir $sen(-x) = -sen(x)$.
3. La función $seno$ tiene un periodo 2π, es decir $sen(x) = sen(x + k2\pi)$.
4. La función $seno$ esta acotada por 1, es decir $|sen(x)| \leq 1$.
5. La función $seno$ tiene máximos (el 1) en $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. La función $seno$ tiene mínimos (el -1) en $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3

La función $\cos(x)$

En esta sección haremos lo que corresponde para la función *coseno*.

Observación 1 *Es muy importante observar que con el trabajo hecho para la función seno, es posible calcular una gran cantidad de valores similares para otras funciones trigonométricas como cos, tan, cot, sec, csc. Lo que hay que hacer es simplemente usar las relaciones de triángulos rectángulos.*

De la definición del coseno y siguiendo la misma figura de como se calculó el seno para valores comunes, obtenemos los siguientes valores.

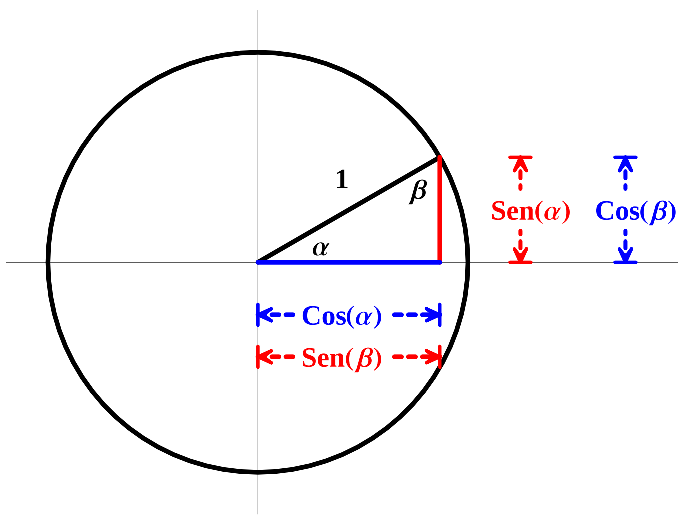


Figura 33: El valor del *seno* y *coseno* en el círculo unitario.

Observación 2 *De la figura 33 observamos lo siguiente: el "seno"de un ángulo es igual al "coseno"del ángulo complementario (su suma es $90°$). Es decir*

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \mathrm{sen}(90° - \alpha)$$

ya que $\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$ *y* $\cos(\alpha) = \mathrm{sen}(\beta)$ *con* $\alpha + \beta = 90°$.

De hecho podemos usar esta relación y los valores obtenidos del $seno$ para obtener los valores del $coseno$, como se hace en la siguiente subsección.

3.1. El valor del coseno para valores comunes

Aunque de manera didáctica podemos deducir los valores del coseno de la misma manera que se obtuvieron los del seno, a partir de las figuras. Aquí lo haremos usando las fórmulas de la observación 2, por dos razones, la primera: evitar aumentar el número de figuras y la segunda: para mostrar una manera diferente en la obtención de los valores del coseno.

Además podemos considerar ángulos negativos, por definición los ángulos negativos giran en sentido contrario (en sentido a las manecillas de un reloj) a los ángulos positivos (en sentido contrario a las manecillas de un reloj).

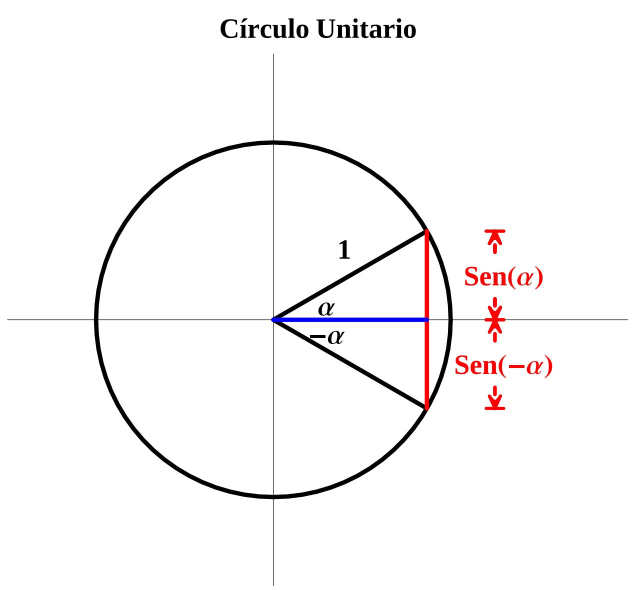


Figura 34: El valor del seno y $-$seno.

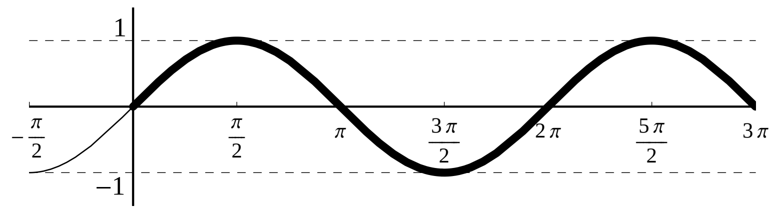
$\cos(\alpha)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$				
$\cos(0^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 0^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ)$	=	1
$\cos(90^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 90^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(0^\circ)$	=	0
$\cos(180^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 180^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-90^\circ)$	=	-1
$\cos(270^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 270^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-180^\circ)$	=	0
$\cos(360^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 360^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-270^\circ)$	=	1
$\cos(30^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 30^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(60^\circ)$	=	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(45^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 45^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(45^\circ)$	=	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(60^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 60^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(30^\circ)$	=	$\frac{1}{2}$
$\cos(120^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 120^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-30^\circ)$	=	$-\frac{1}{2}$
$\cos(135^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 135^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-45^\circ)$	=	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(150^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 150^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-60^\circ)$	=	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(210^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 210^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-120^\circ)$	=	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(225^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 225^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-135^\circ)$	=	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(240^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 225^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-150^\circ)$	=	$-\frac{1}{2}$
$\cos(300^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 300^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-210^\circ)$	=	$\frac{1}{2}$
$\cos(315^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 315^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-225^\circ)$	=	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(330^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(90^\circ - 330^\circ)$	=	$\operatorname{sen}(-240^\circ)$	=	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.2. Gráfica de la función coseno

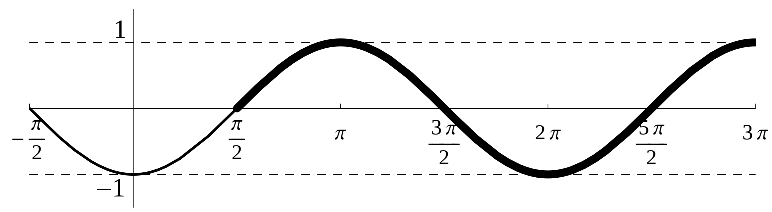
De la teoría general de gráficas y con la fórmula $\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$ podemos obtener la gráfica de la función *coseno*. Es la misma gráfica que el *seno* pero recorrida sobre el eje x, 90°, es decir $\pi/2$ (ver tutorial sobre gráficas).

Hay varias formas de constatar que la gráfica de la función *coseno* es la misma gráfica que la función *seno* recorrida $\pi/2$. Lo que hay que mostrar es que $\cos(x) = \operatorname{sen}(x - 90^\circ)$.

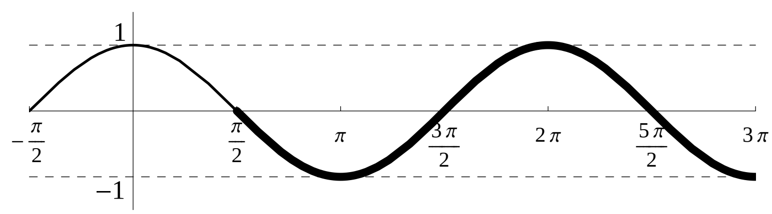
1. Sabemos que $\cos(x) = \operatorname{sen}(90^\circ - x)$, pero la función *seno* es impar, es decir $\operatorname{sen}(90^\circ - x) = -\operatorname{sen}(x - 90^\circ)$. Por tanto para obtener la gráfica del *coseno* hay que tomar la gráfica del *seno* recorrerla 90° y hacer una reflexión respecto del eje x.



$sen(x)$



$sen(x - 90°)$



$-sen(x - 90°)$

2. Otra forma de ver la relación del $seno$ y el $coseno$ se deriva del triángulo unitario donde se puede observar la relación de triángulos semejantes que hay entre el que se forma con un ángulo α y con el ángulo $\alpha + 90°$. De hecho la gráfica la podemos también obtener recorriendo la gráfica del $seno$ $90°$ a la izquierda.

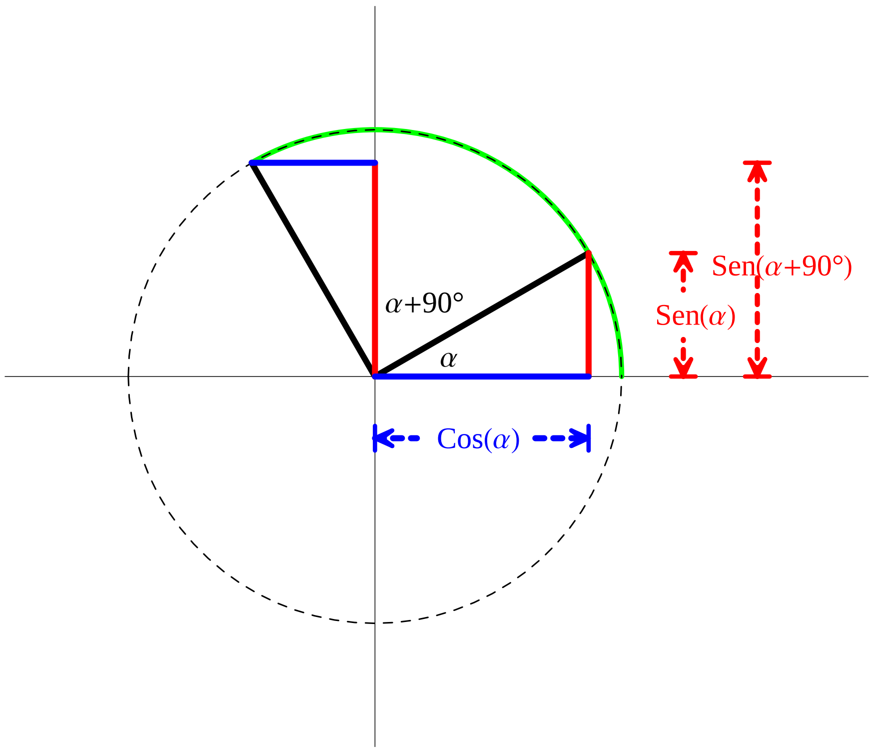


Figura 32: $Cos(x)$.

Por todo lo anterior, la gráfica del *coseno* queda de la siguiente forma:

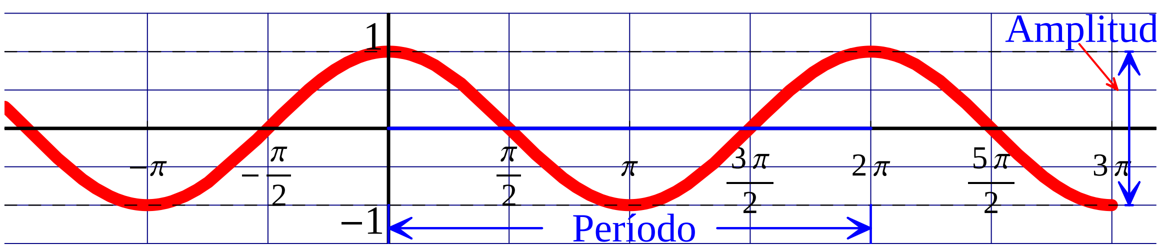


Figura 32: $Cos(x)$.

3.3. Propiedades básicas de la función $\cos(x)$

De la gráfica de la función *coseno* podemos inferir algunas de las propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función *coseno* tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango (imagen del dominio) al intervalo $[-1, 1]$

$$\cos(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

2. La función *coseno* es par, es decir $\cos(-x) = \cos(x)$.

3. La función $coseno$ tiene un periodo 2π, es decir $cos(x) = cos(x + k2\pi)$.
4. La función $coseno$ esta acotada por 1, es decir $|cos(x)| \leq 1$.
5. La función $coseno$ tiene máximos (el 1) en $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. La función $coseno$ tiene mínimos (el -1) en $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

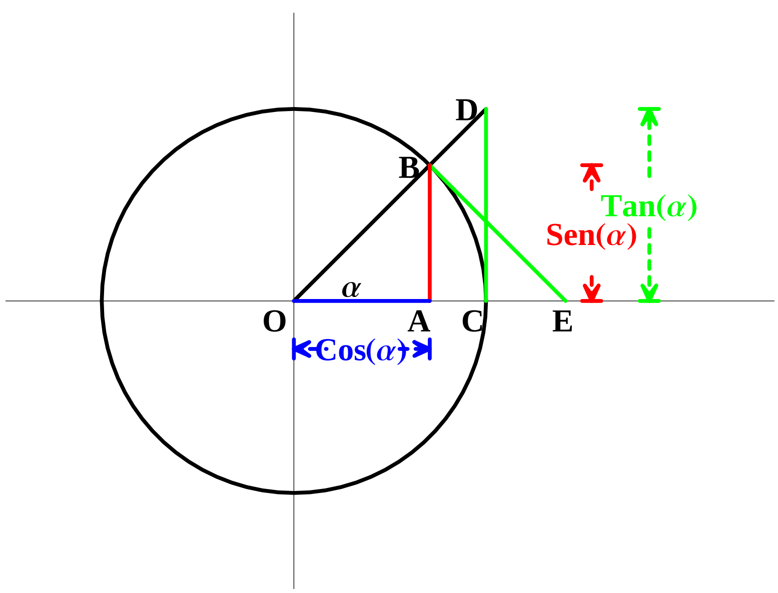
4

La función $\tan(x)$

las propiedades básicas de la función tangente se pueden derivar de su definición.

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

De la siguiente figura se tiene que los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$ son semejantes, por lo tanto se cumple la relación $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{CD}{OC}$. Por otra parte la definición de la función *tangente* dice que $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{AB}{OA}$, por la anterior igualdad $\tan(\alpha) = \dfrac{CD}{OC}$, pero $OC = 1$, entonces $\tan(\alpha) = CD$. De la misma manera, si consideramos el triángulo $\triangle OBE$ es semejante, de hecho igual al triángulo $\triangle OCD$, esto quiere decir que la tangente es también la longitud del segmento BE.

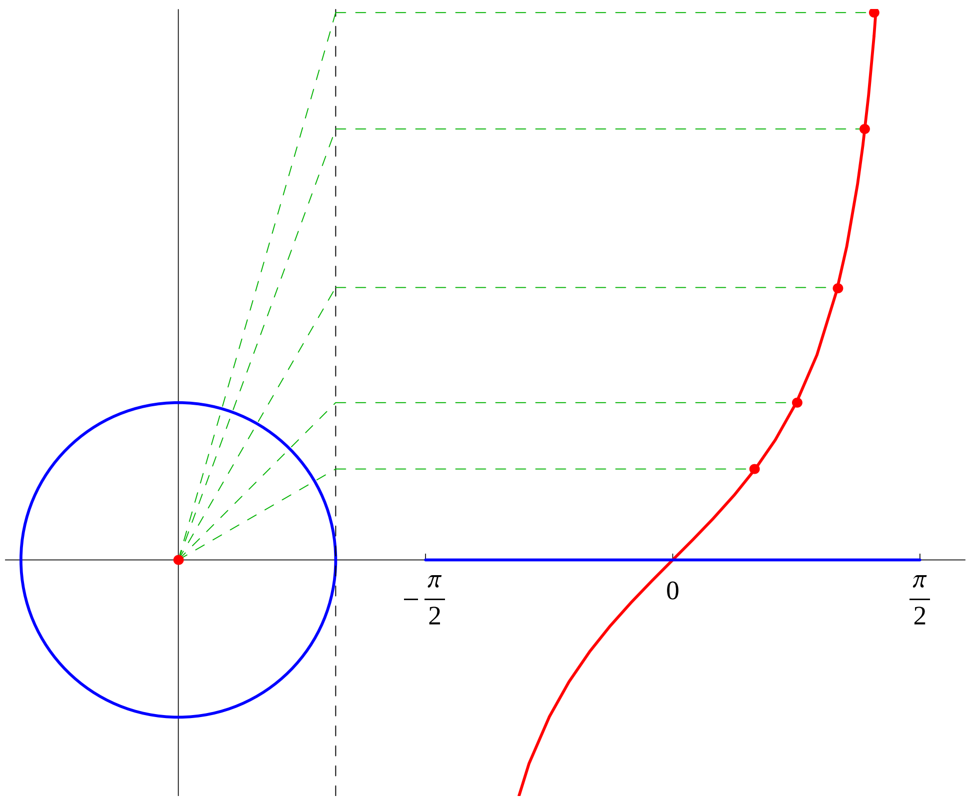


El valor del seno y coseno del círculo unitario.

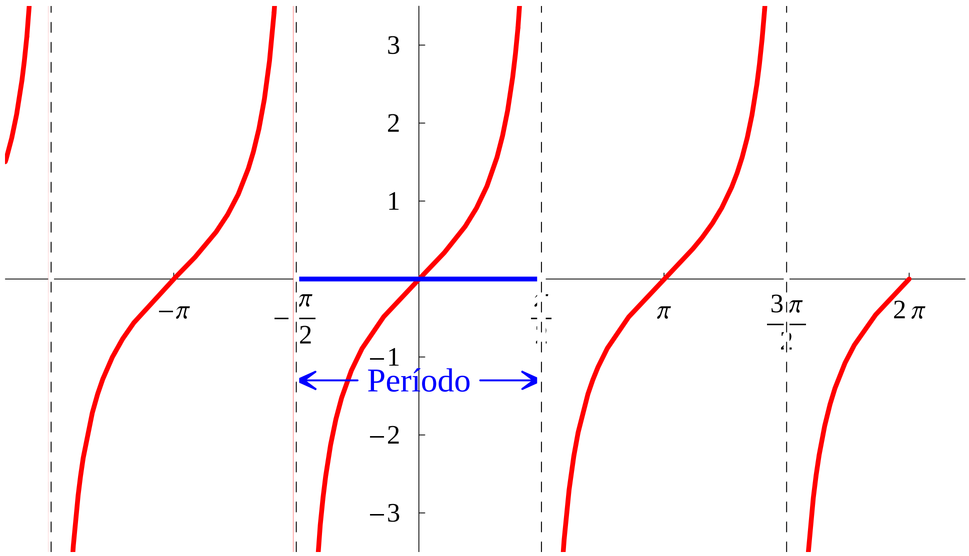
4.1. El valor de la Tangente para valores comunes

Los valores comunes de la función $tangente$ pueden ser derivados inmediatamente de la definición y de los valores correspondientes del $seno$ y $coseno$. Con objeto de no repetir los valores, estos pueden verse en la tabla del resumen de valores.

4.2. Gráfica de la función $\tan(x)$



Obtención de la gráfica de la tangente.



Gráfica de la función tangente.

4.3. Propiedades básicas de la función $\tan(x)$

A partir de la gráfica de la función *tangente* podemos inferir algunas de las propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función *tangente* no esta definida en los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. La función *tangente* tiene dominio $\mathbb{R} - \{x|x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$ y rango (imagen del dominio) a los reales $\mathbb{R}$
$$\tan(x) : \mathbb{R} - \{x|x = \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}.$$

3. La función *tangente* es impar, es decir $\tan(-x) = -\tan(x)$.

4. La función *tangente* tiene un periodo π, es decir $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$.

5. La función *tangente* no esta acotada.

6. La función *tangente* no tiene máximos.

7. La función *tangente* no tiene mínimos.

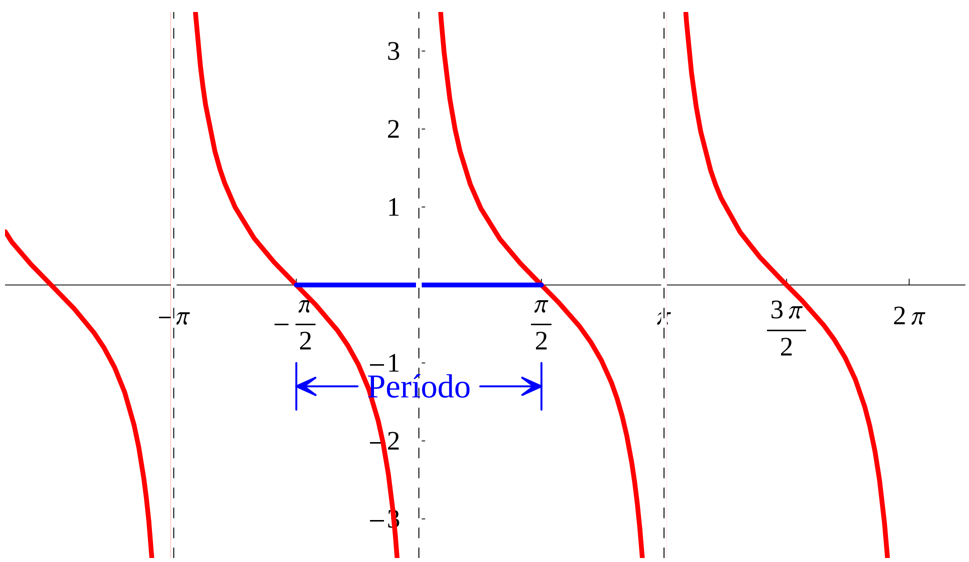
5

La función $\cot(x)$

Las propiedades básicas de la función tangente se pueden derivar de su definición.

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

5.1. Gráfica de la función $\cot(x)$



Gráfica de la función cotangente.

5.2. El valor de la cotangente para valores comunes

Los valores comunes de la función *cotangente* pueden ser derivados inmediatamente de la definición y de los valores correspondientes del *seno* y *coseno*. Con objeto de no repetir los valores, estos pueden verse en la tabla del resumen de valores.

5.3. Propiedades básicas de la función $\cot(x)$

A partir de la gráfica de la función $cotangente$ podemos inferir algunas de las propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función $cotangente$ no esta definida en los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. La función $cotangente$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{x|x = k\pi\}$ y rango (imagen del dominio) a los reales $\mathbb{R}$
$$\tan(x) : \mathbb{R} - \{x|x = k\pi\} \to \mathbb{R}.$$
3. La función $cotangente$ es impar, es decir $\cot(-x) = -\cot(x)$.
4. La función $cotangente$ tiene un periodo π, es decir $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$.
5. La función $cotangente$ no esta acotada.
6. La función $cotangente$ no tiene máximos.
7. La función $cotangente$ no tiene mínimos.

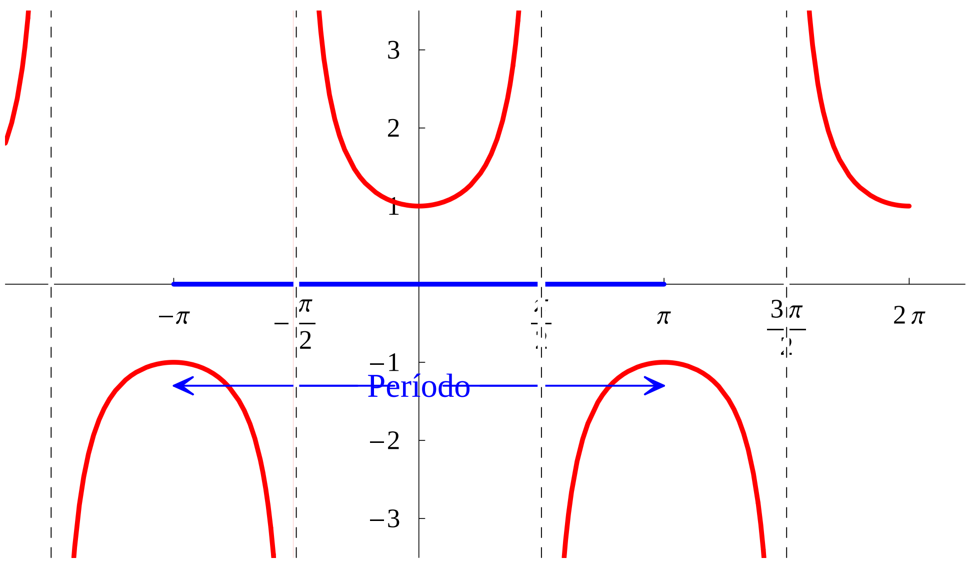
6

La función $\sec(x)$

las propiedades básicas de la función secante se pueden derivar de su definición.

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

6.1. Gráfica de la función $\sec(x)$



Gráfica de la función secante.

6.2. El valor de la secante para valores comunes

Los valores comunes de la función *secante* pueden ser derivados inmediatamente de la definición y de los valores correspondientes del *coseno*. Con objeto de no repetir los valores, estos pueden verse en la tabla del resumen de valores.

6.3. Propiedades básicas de la función $\sec(x)$

A partir de la gráfica de la función $secante$ podemos inferir algunas de las propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función $secante$ no esta definida en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. La función $secante$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{x|x = \frac{\pi}{2} + \pi k\}$ y rango (imagen del dominio) a los reales $\mathbb{R} - (-1, 1)$
$$\tan(x) : \mathbb{R} - \{x|x = \frac{\pi}{2} + \pi k\} \to \mathbb{R} - (-1, 1).$$

3. La función $secante$ es par, es decir $\sec(-x) = \sec(x)$.

4. La función $secante$ tiene un periodo 2π, es decir $\tan(x) = \tan(x + 2k\pi)$.

5. La función $secante$ no esta acotada.

6. La función $secante$ no tiene máximos globales, pero en los intervalos
$$((2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2})$$
se alcanza el máximo local -1 en $(2k + 1)\pi$.

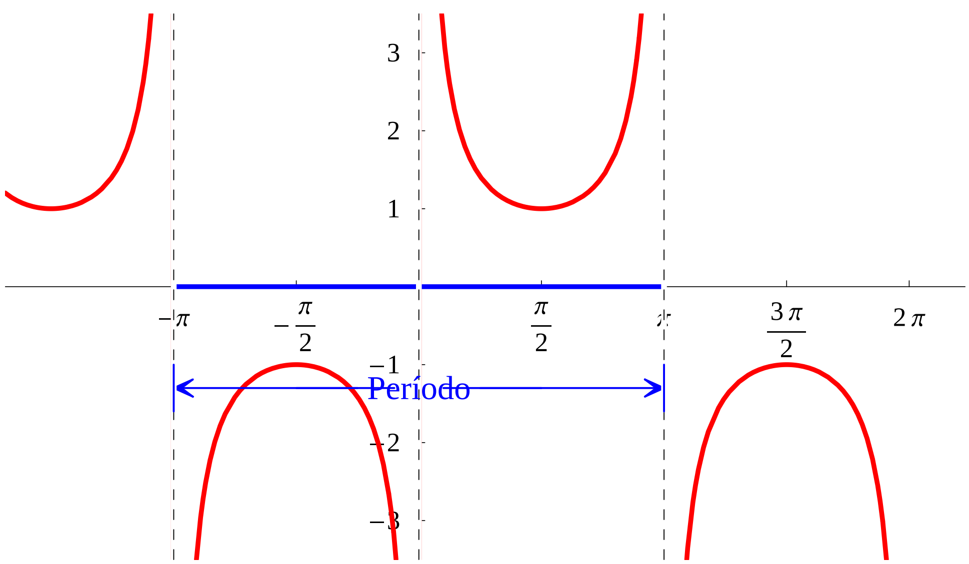
7. La función $secante$ no tiene mínimos globales, pero en los intervalos
$$((2k)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k)\pi + \frac{\pi}{2})$$
se alcanza el mínimo local 1 en $(2k)\pi$.

7 La función $\csc(x)$

las propiedades básicas de la función cosecante se pueden derivar de su definición.

$$\sec(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

7.1. Gráfica de la función $\csc(x)$



Gráfica de la función cosecante.

7.2. Propiedades básicas de la función $\csc(x)$

A partir de la gráfica de la función *cosecante* podemos inferir algunas de las propiedades básicas, como las siguientes:

1. La función *cosecante* no esta definida en los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. La función $cosecante$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{x|x = k\pi\}$ y rango (imagen del dominio) a los reales $\mathbb{R} - (-1, 1)$
$$\csc(x) : \mathbb{R} - \{x|x = k\pi\} \to \mathbb{R} - (-1, 1).$$
3. La función $cosecante$ es impar, es decir $\csc(-x) = -\csc(x)$.
4. La función $cosecante$ tiene un periodo 2π, es decir $\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$.
5. La función $cosecante$ no esta acotada.
6. La función $cosecante$ no tiene máximo global, pero tiene máximos locales -1, en $\dfrac{\pi(3 + 4k)}{2}$.
7. La función $cosecante$ no tiene mínimo global, pero tiene mínimos locales 1, en $\dfrac{\pi(1 + 4k)}{2}$.

8

Resumen de valores comunes

grados	radianes	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	0	1	0	no existe	1	no existe
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	no existe	0	no existe	1
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180°	π	0	-1	0	no existe	-1	no existe
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
270°	$\frac{2}{3}\pi$	-1	0	no existe	0	no existe	-1
300°	$\frac{10}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
360°	2π	0	1	0	no existe	1	no existe

9

Relaciones trigonométricas

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\csc\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\cot\alpha$	$\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$		$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$		$\dfrac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
$\csc\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

10

Funciones trigonométricas inversas

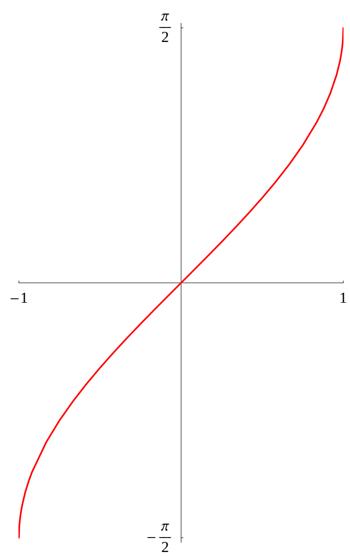
Todas las funciones trigonométricas antes mencionadas tienen inversa en un intervalo donde la función sea biyectiva.

10.1. La función $\operatorname{arc\,sen}$

La función $\operatorname{arc\,sen}$ esta definida en el intervalo $[-1,1]$.

$$\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

10.2. Gráfica de la función $\operatorname{arc\,sen}$



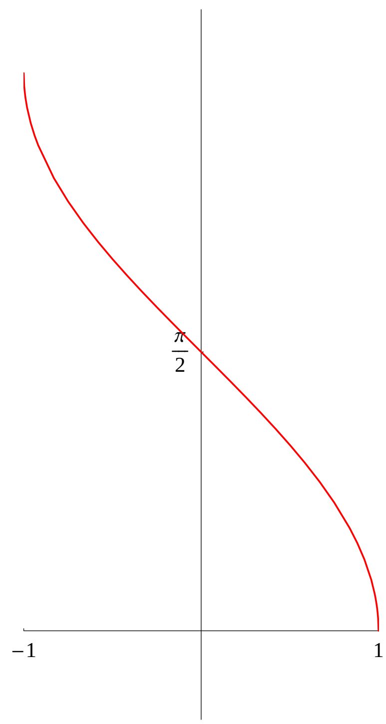
Gráfica de la función arcoseno.

10.3. La función $\arccos$

La función $\arccos$ esta definida en el intervalo $[-1, 1]$.

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

10.4. Gráfica de la función $\arccos$



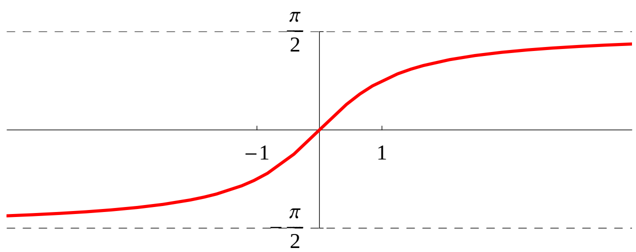
Gráfica de la función arcoseno.

10.5. La función arctan

La función arctan esta definida en $\mathbb{R}$.

$$\arctan : \mathbb{R} \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

10.6. Gráfica de la función arctan



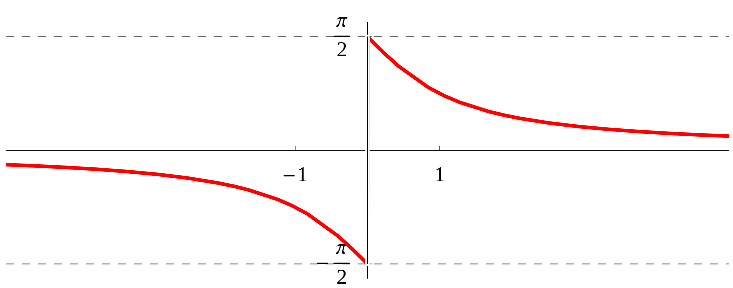
Gráfica de la función arcotangente.

10.7. La función arccot

La función arccot esta definida en $\mathbb{R}$.

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \to (\frac{-\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}).$$

10.8. Gráfica de la función arccot



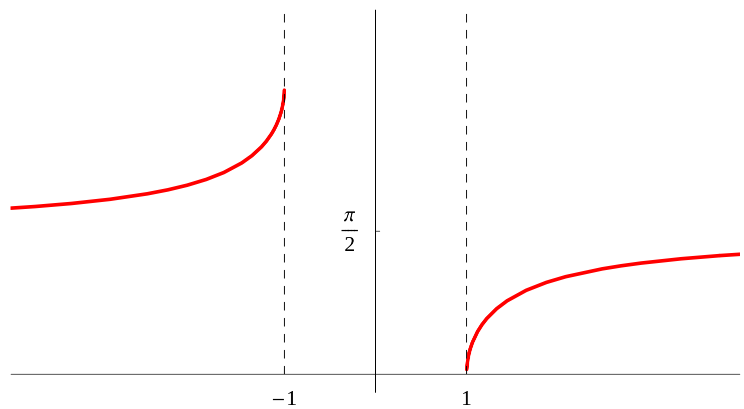
Gráfica de la función arcocotangente.

10.9. La función arcsec

La función arcsec esta definida en $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi].$$

10.10. Gráfica de la función arcsec



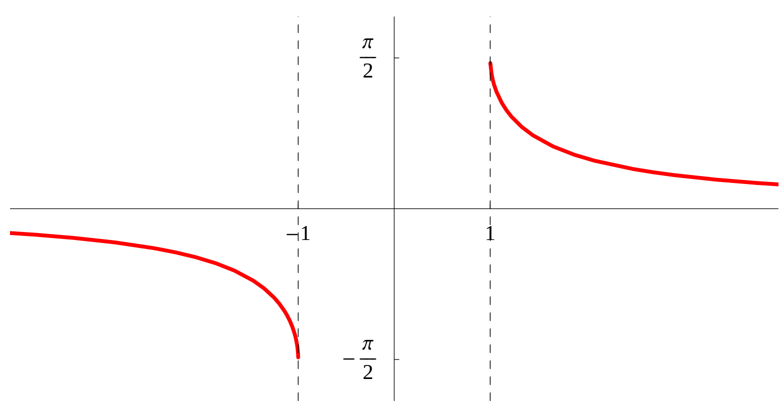
Gráfica de la función arcosecante.

10.11. La función arccsc

La función arccsc esta definida en $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \rightarrow [\frac{-\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}].$$

10.12. Gráfica de la función arccsc



Gráfica de la función arcoseno.

11

La función $a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$

12

La función $a\cos(bx+c)+d$

13

La función $a\tan(bx+c)+d$

14

Funciones hiperbólicas

15

Identidades trigonométricas

16 Aplicaciones

Solicite información acerca de la versión completa de este documento de 100 hojas.