MATEMÁTICAS BÁSICAS

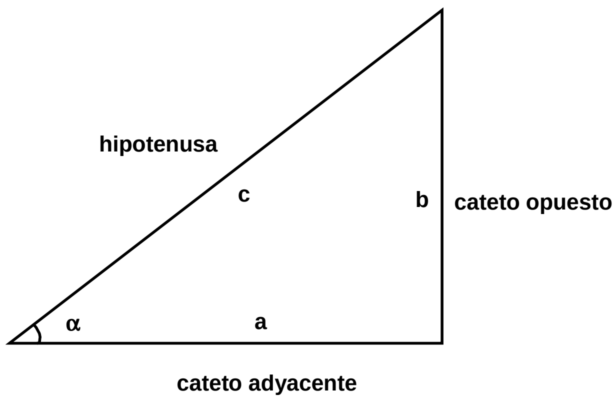
TRIGONOMÉTRIA

RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto. Las semirrectas se llaman lado inicial y final. Al origen común se le denomina vértice del ángulo. Los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj y los negativos en el mismo sentido.

La trigonometría estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos[1]. Su etimología proviene de trigono *triángulo* y metría *medida*.

Sea el siguiente triángulo rectángulo:



Se definen las siguientes razones[2] trigonométricas directas para el ángulo α:

seno: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$

coseno: $\cos\alpha = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$

tangente: $\tan\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \dfrac{b}{a}$

cotangente: $\cot\alpha = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \dfrac{a}{b}$

secante: $\sec\alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \dfrac{a}{c}$

cosecante: $\csc\alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \dfrac{c}{b}$

En términos de variables, las funciones trigonométricas son:

$$y = \operatorname{sen}\ x$$
$$y = \cos\ x$$
$$y = \tan\ x$$
$$y = \cot\ x$$
$$y = \sec\ x$$
$$y = \csc\ x$$

[1] Recuérdese que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.
[2] Se entiende como razón al cociente que compara dos cantidades.

De las definiciones anteriores, se puede concluir que:

$$\tan\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x} \qquad \cot\ x = \frac{\cos\ x}{\text{sen}\ x} = \frac{1}{\tan\ x}$$

$$\sec\ x = \frac{1}{\cos\ x} \qquad \csc\ x = \frac{1}{\text{sen}\ x}$$

En caso de tener el valor de la razón trigonométrica, para obtener el ángulo, se aplica la razón trigonométrica inversa. Las seis razones trigonométricas inversas para el ángulo α son las siguientes:

seno inverso: $\alpha = \text{sen}^{-1}\ x$ cotangente inversa: $\alpha = \cot^{-1} x$

coseno inverso: $\alpha = \cos^{-1} x$ secante inversa: $\alpha = \sec^{-1} x$

tangente inversa: $\alpha = \tan^{-1} x$ cosecante inversa: $\alpha = \csc^{-1} x$

En términos de variables, las funciones trigonométricas inversas se definen como[3]:

$$y = \text{sen}^{-1}\ x \qquad y = \cot^{-1} x$$

$$y = \cos^{-1} x \qquad y = \sec^{-1} x$$

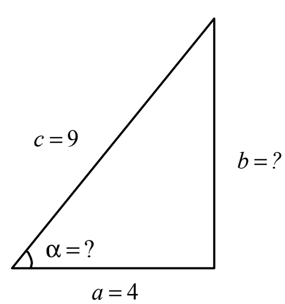
$$y = \tan^{-1} x \qquad y = \csc^{-1} x$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para resolver triángulos rectángulos, basta con conocer sólo dos datos. Las demás características se pueden deducir aplicando las expresiones anteriores y el teorema de Pitágoras que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale a la suma de los cuadrados de los catetos. Esto es: $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplos.
Dados los siguientes triángulos, obtener los datos que faltan:

1)



[3] Es importante señalar que existen otras dos notaciones para las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, para la función trigonométrica inversa del seno es equivalente escribir: $y = \text{sen}^{-1}\ x = \text{ang sen}\ x = \text{arc sen}\ x$, que respectivamente significan ángulo cuyo seno y arco cuyo seno. Lo mismo sucede para las otras cinco funciones de este tipo.

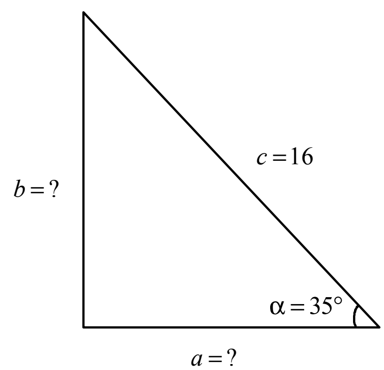
Solución.

Se sabe que $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo tanto, despejando a se tiene:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{81-16} = \sqrt{65} \approx 8.062$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{65}}{9} = 0.895 \Rightarrow \alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.895) \approx 63.50°$$

2)

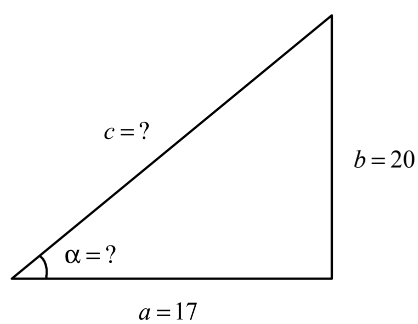


Solución.

Por la definición de coseno: $\cos 35° = \frac{a}{16} \Rightarrow a = 16(0.8191) \approx 13.106$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16^2 - 13.1064^2} = \sqrt{256 - 171.77} = \sqrt{84.23} \approx 9.177$$

3)



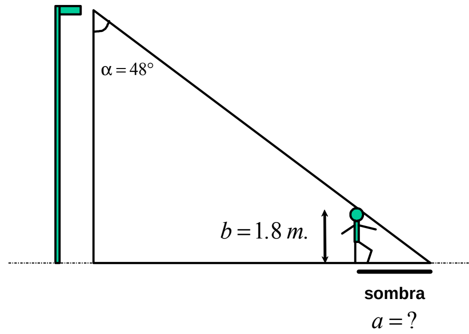
Solución.

Se sabe que $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo tanto, se tiene:

$$c = \sqrt{17^2 + 20^2} = \sqrt{289 + 400} = \sqrt{689} \approx 26.248$$

$$\tan\alpha = \frac{20}{17} = 1.176 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1.176) \approx 49.63°$$

4) Determinar la longitud de la sombra que se proyecta en el suelo por una persona de 1.80 metros parada cerca de un arbotante cuya iluminación tiene un ángulo $48°$.



Solución.
Si se sabe que la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, y como α es $48°$, el ángulo que se forma con el suelo es $180° - 90° - 48° = 42°$. Por lo tanto, se tiene:

$$\tan 42° = \frac{1.80}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1.80}{\tan 42°} \approx \frac{1.80}{0.900} \approx 2\ metros$$

MEDIDAS DE UN ÁNGULO

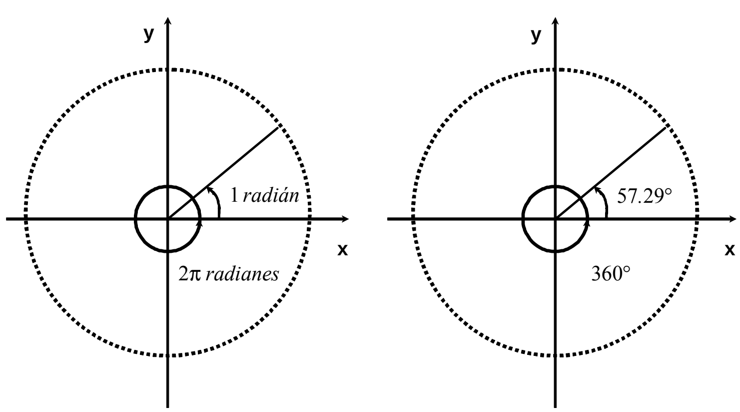
Las unidades de medida de ángulos mas conocidas son los grados, minutos y segundos. Este tipo de medidas está basada en la división en partes iguales de una circunferencia. Las equivalencias son las siguientes:

$360° =$ un giro completo alrededor de una circunferencia

$180° = \frac{1}{2}$ vuelta alrededor de una circunferencia

$90° = \frac{1}{4}$ de vuelta

$1° = \frac{1}{360}$ de vuelta, etc.



$$360° = 2\pi\ radianes$$

También se puede definir otra unidad angular, el radián, que en las aplicaciones físicas es más práctico y directo que trabajar con grados.

La magnitud de un ángulo medido en radianes está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio. El valor de este ángulo es independiente del valor del radio; por ejemplo, al dividir una pizza en diez partes iguales, el ángulo de cada pedazo permanece igual, independiente si la pizza es chica, mediana o familiar.

De esta forma, se puede calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; solo basta multiplicar el radio por el ángulo en radianes.

$$longitud\ de\ arco\ de\ la\ circunferencia = (ángulo\ en\ radianes)(radio\ de\ la\ circ\inf erencia)$$

Ya que se conoce el perímetro de una circunferencia de radio unitario $(2\pi r = 2\pi)$, entonces el ángulo de una circunferencia completa, medido en radianes es 2π. Como además se sabe que este mismo ángulo, medido en grados mide $360°$, entonces se puede definir una equivalencia: $1\ radián = \frac{360°}{2\pi} \approx 57.29°$.

A partir de esta igualdad, se puede determinar que:

Grados	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Para convertir un ángulo de grados a radianes o viceversa, lo que debe hacerse es una regla de tres, considerando que: $360° = 2\pi \quad radianes$.

Ejemplo.
Transformar $15°$ a radianes.
Solución.

$$\left.\begin{array}{l} 360° = 2\pi \quad radianes \\ 15° = x \quad radianes \end{array}\right\}$$

. Por lo tanto: $x = \frac{15°(2\pi \quad radianes)}{360°} = \frac{\pi}{12} \quad radianes$

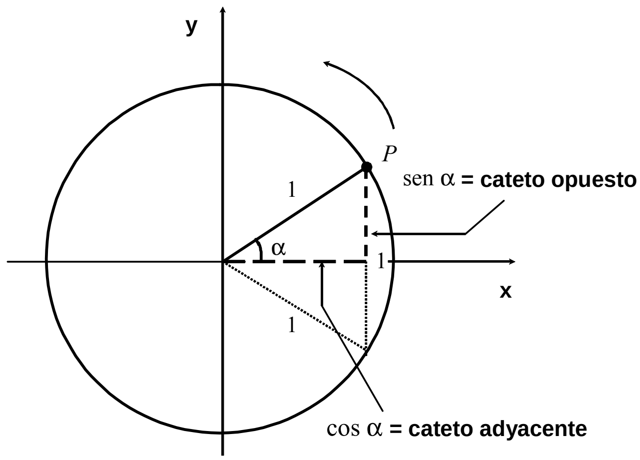
Ejemplo.
Transformar $\frac{2\pi}{5}$ radianes a grados.
Solución.

$$\left.\begin{array}{l} 360° = 2\pi \quad radianes \\ x° = \frac{2\pi}{5} \quad radianes \end{array}\right\}$$

. Por lo tanto: $x = \frac{360°\left(\frac{2\pi}{5} \quad radianes\right)}{2\pi \quad radianes} = 72°$.

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Se llama así a una circunferencia de radio uno y con el centro en el origen de un sistema coordenado. Se puede considerar que el punto P que se utiliza para calcular las razones trigonométricas es el de intersección de uno de los vértices un triángulo equilátero unitario con el círculo trigonométrico cuyo centro coincide con otro de los vértices del triángulo. Esta consideración permite determinar el comportamiento de los segmentos en el plano que representan gráficamente las razones seno y coseno, tal y como se muestra en la siguiente figura:

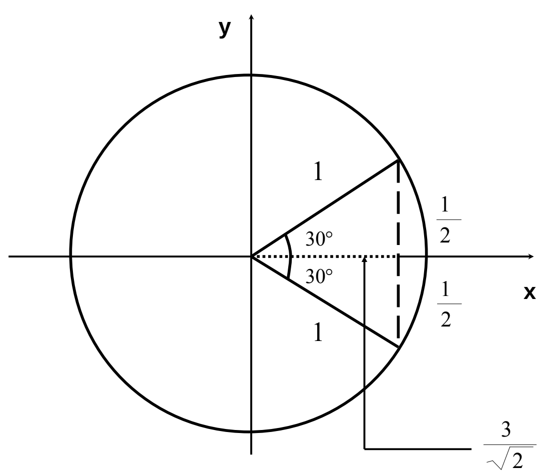


VALORES NOTABLES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la figura anterior, al mover el ángulo en la dirección mostrada, los segmentos verticales representan las razones seno y los horizontales las razones coseno. Estos valores dependen de la orientación de los segmentos, por lo que ellos determinan el signo de estas razones.

Además, debido a que la tangente es igual al cociente del seno entre el coseno, que la cotangente, la secante y la cosecante son los recíprocos de la tangente, coseno y seno respectivamente, con saber la magnitud y signo de estas últimas se pueden obtener los valores de las primeras.

Los valores notables de las funciones trigonométricas se obtienen a partir de sus definiciones considerando los valores de los catetos y de la hipotenusa. Por ejemplo, para calcular los valores para $30°$ se puede construir la siguiente figura:



Teniendo en cuenta que se forma un triángulo equilátero unitario en el triángulo rectángulo, el valor de la hipotenusa es uno, el del cateto opuesto es su mitad y, aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que el valor del cateto adyacente que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, el valor del seno de 30° es $\frac{1}{2}$, el valor del coseno de 30° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y en consecuencia: $\tan 30^{\circ}=\frac{\text{sen } 30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Aplicando las expresiones $\cot x=\frac{\cos x}{\text{sen } x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ y $\csc x=\frac{1}{\text{sen } x}$ se obtienen los valores respectivos.

La tabla siguiente condensa estas cifras, además de los valores más notables de las funciones trigonométricas[4]:

Función	Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen } x$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan x$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	−∞	0
$\cot x$		∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	−∞	0	∞
$\sec x$		1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	−∞	1
$\csc x$		∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	−∞	-1	∞

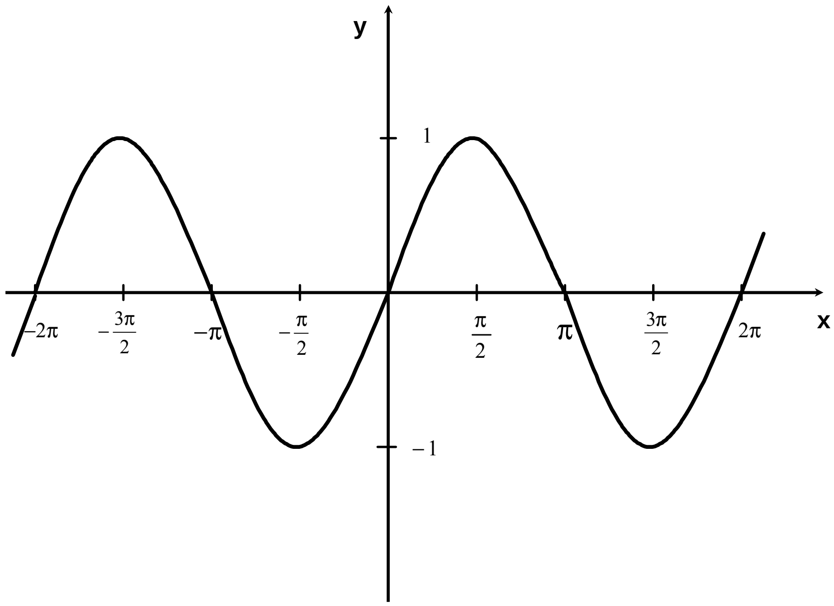
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

FUNCIÓN SENO $y=\text{sen } x$

A partir del comportamiento del cateto opuesto del círculo trigonométrico unitario, la gráfica de la función seno empieza de cero en 0°, va aumentando paulatinamente hasta llegar a uno en 90°. Después va disminuyendo hasta llegar a cero en 180°. Posteriormente disminuye negativamente hasta llegar a -1 en 270°. Finalmente, va aumentando hasta regresar a cero en 360°, donde el proceso se repite indefinidamente.

La siguiente figura muestra su gráfica:

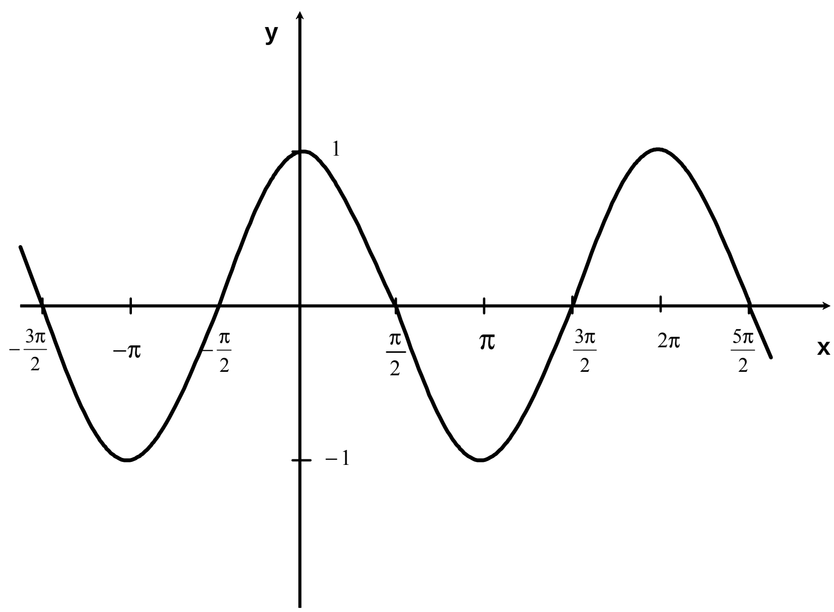
[4] Es importante señalar que los datos que aparecen con el símbolo ∞ es consecuencia de la división por cero que algebraicamente no existe, pero que geométricamente implican que las gráficas tienen discontinuidad en dichos puntos ya que tienden a infinito.



El dominio de la función seno es el intervalo abierto $(-\infty,\infty)$ y el rango es $[-1,1]$.

FUNCIÓN COSENO $y=\cos x$

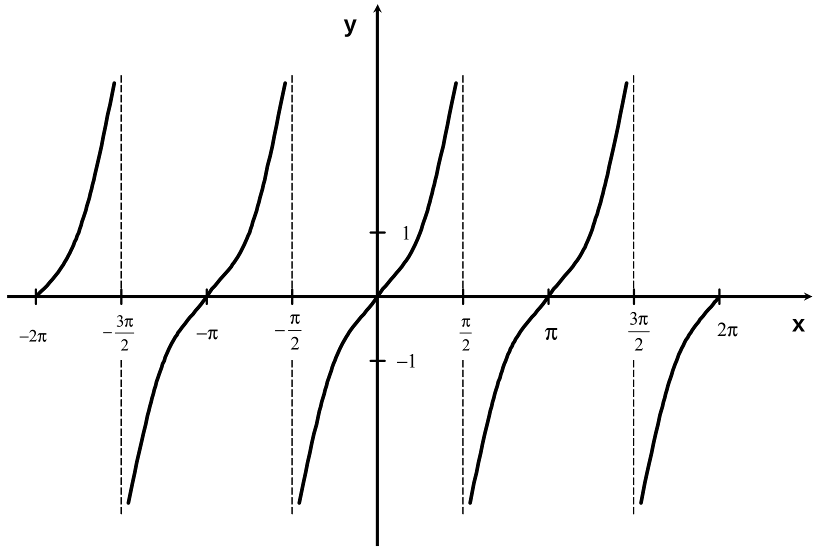
De forma similar, el comportamiento del cateto adyacente del círculo trigonométrico unitario, la gráfica de la función coseno empieza en uno en $0°$, va disminuyendo paulatinamente hasta llegar a cero en $90°$. Después sigue disminuyendo hasta llegar a -1 en $180°$. Posteriormente crece hasta llegar a cero en $270°$. Finalmente, sigue aumentando hasta regresar a 1 en $360°$. Esto se repite indefinidamente, como muestra en la gráfica siguiente:



El dominio de la función coseno es el intervalo abierto $(-\infty,\infty)$ y el rango es $[-1,1]$.

Considerando que las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se pueden deducir a partir del seno y coseno, se pueden graficar aplicando la relación respectiva en cada punto. Estas gráficas se muestran a continuación:

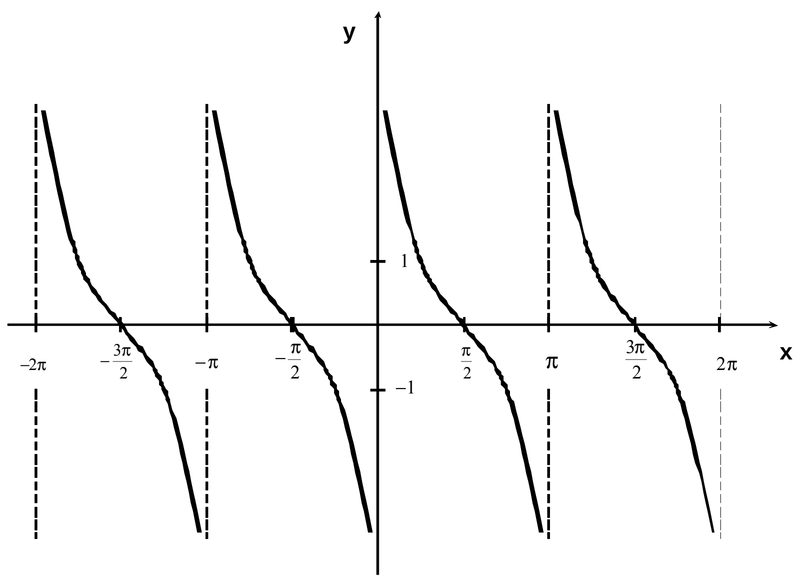
FUNCIÓN TANGENTE $y = \tan\ x$



Por ser una función discontinua, el dominio de la función tangente es: D$=\left\{x\in \mathbf{R}\ \middle|\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi,\quad n\in \mathbf{Z}\right\}$

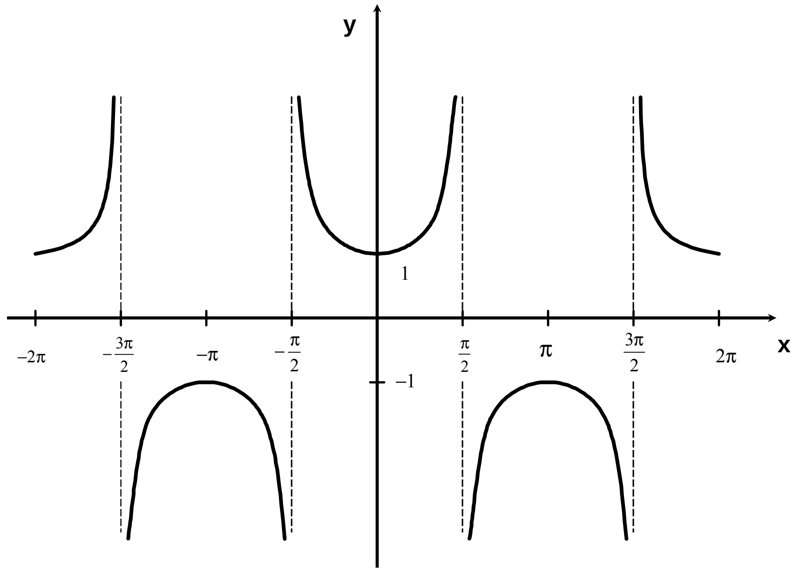
y el rango es (-∞, ∞).

FUNCIÓN COTANGENTE $y=\cot\ x$



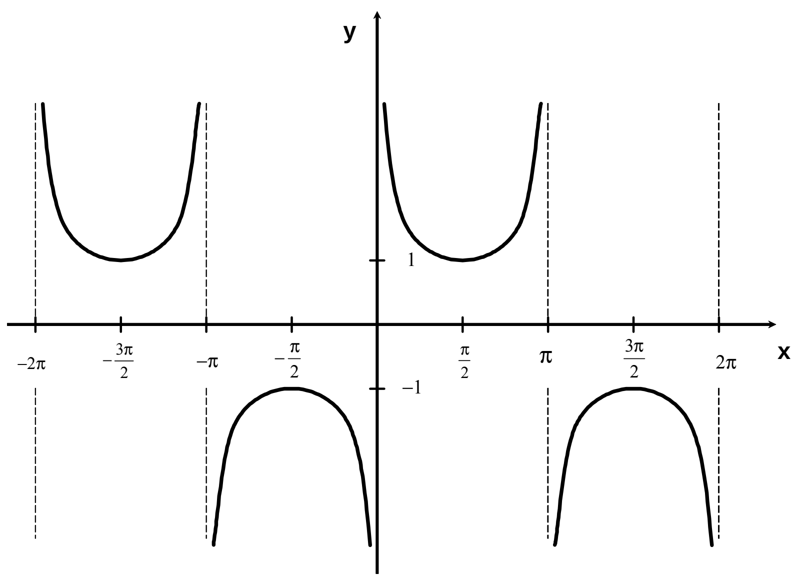
También, al ser una función discontinua, el dominio de la función cotangente es D $=\left\{x\in \mathbf{R}\ \middle|\ x\neq n\cdot\pi,\quad n\in \mathbf{Z}\right\}$ y el rango es $(-\infty,\infty)$.

FUNCIÓN SECANTE $y = \sec x$



Por ser una función discontinua, el dominio de la función secante es $D = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbf{Z} \right\}$ y el rango es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

FUNCIÓN COSECANTE $y = \csc x$



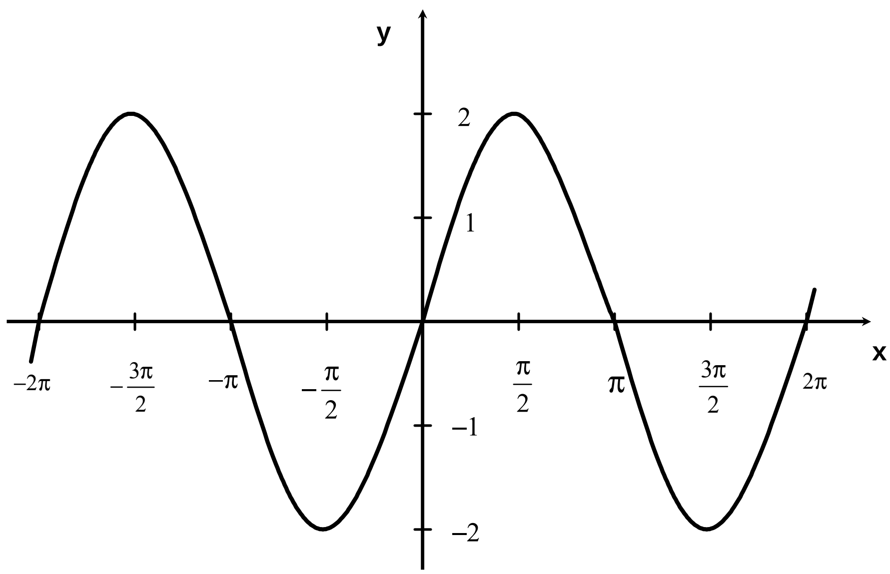
También, al ser una función discontinua, el dominio de la función cosecante es D $= \{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq n \cdot \pi, \quad n \in \mathbf{Z} \}$ y el rango es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una función periódica es aquella que cumple que: $f(x)=f(x+p)$, donde p es el periodo diferente de cero. En general, una función trigonométrica presenta tres parámetros fundamentales: *Amplitud* (A), *Frecuencia* k y *Fase* (α)[5]. La primera es la que cambia el tamaño de la función, la segunda modifica el grado de repetición, y la última determina el desplazamiento de la función. Por ejemplo, específicamente para la función seno se tiene: $f(x)=A\cdot \text{sen}\,(kx+\alpha)$. Cabe señalar que un signo $(+)$ en la fase, implica que la función se adelante (o sea, se corre a la izquierda) y un signo $(-)$ en la fase implica que la función se atrase (o sea, se corre a la derecha).

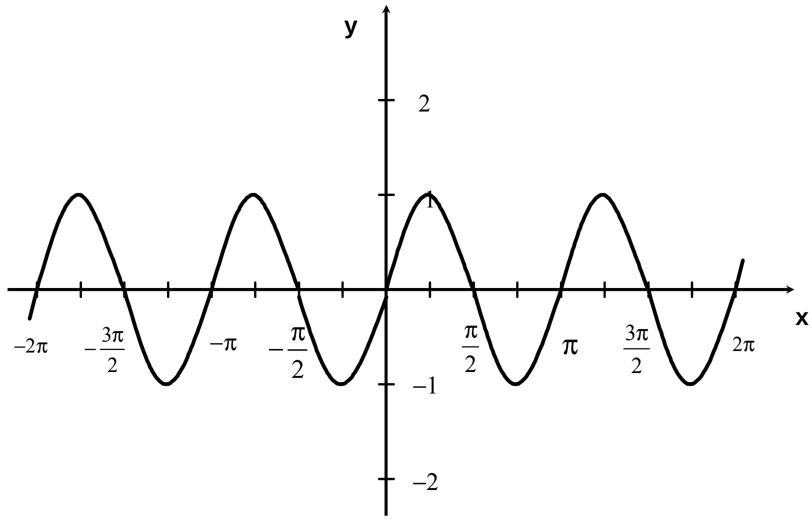
Ejemplo.
Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2\cdot \text{sen}\,(x)$
Solución:
Se aprecia como en la gráfica la amplitud es el doble (dos veces más grande) que la función $f(x)=\text{sen}\ x$, sin embargo la frecuencia y la fase no cambian



b) $f(x)=\text{sen}\,(2x)$
Solución.
En este caso, en la gráfica la frecuencia es del doble (se repite más), sin embargo la amplitud y la fase no cambian

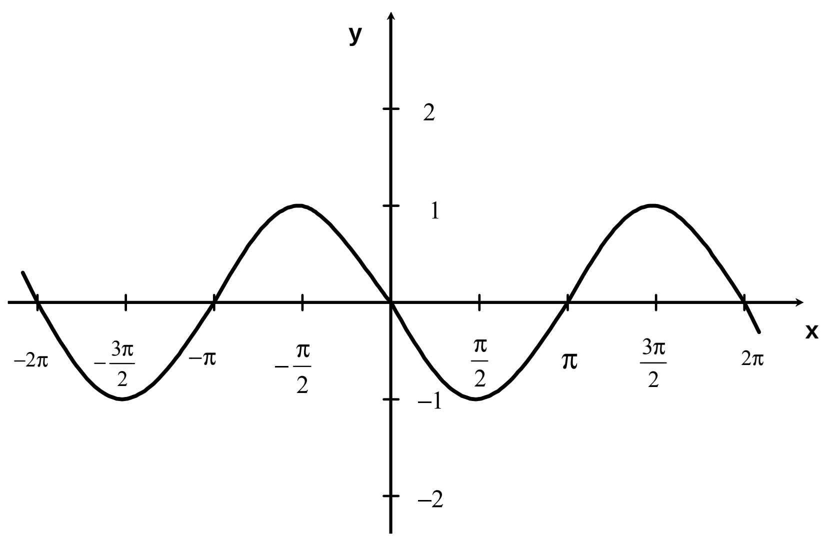
[5] En el caso que la amplitud sea uno, k sea cero, que no exista defasamiento y sólo se sume una constante c, la forma de la gráfica no cambia, sólo se desplaza c unidades (dependiendo de su signo) sobre el eje y.



c) $f(x)=\text{sen}\,(x+\pi)$

Solución.

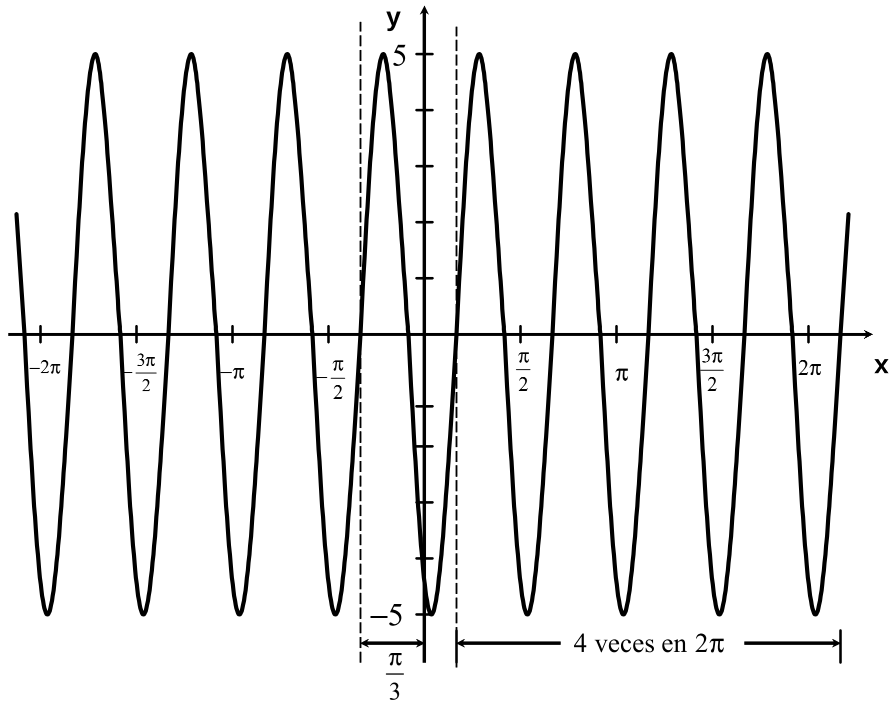
La gráfica muestra como la función se adelanta π unidades (por el signo +), sin embargo la amplitud y la frecuencia no cambian



d) $f(x)=5\text{sen}\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

Solución.

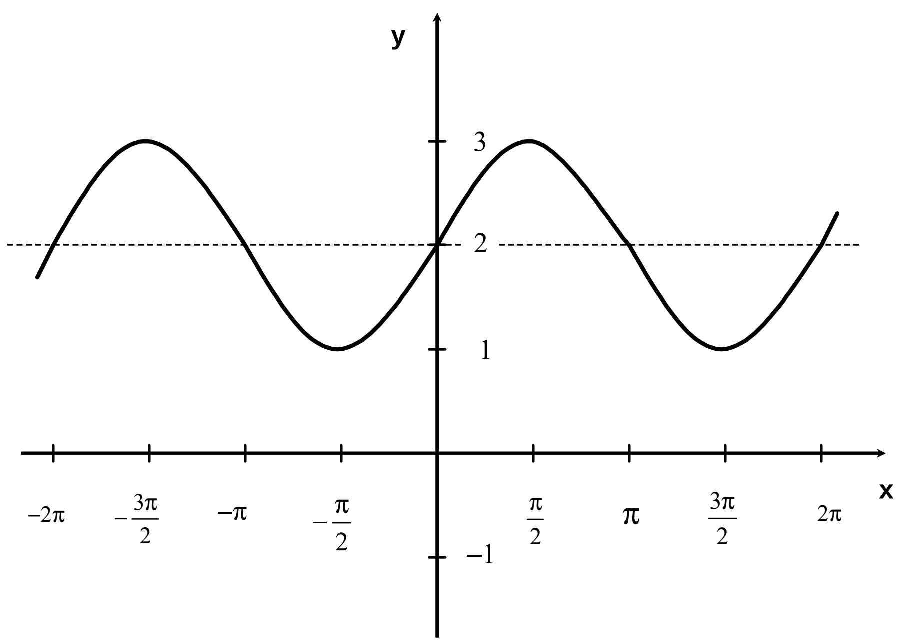
Aquí se modifican todos los parámetros: la gráfica tiene una amplitud de 5 (es muy grande), tiene una frecuencia de 4 (se repite más) y se atrasa $\frac{\pi}{3}$ unidades (por el signo –).



e) $f(x)=2+\text{sen}\,(x)$

Solución.

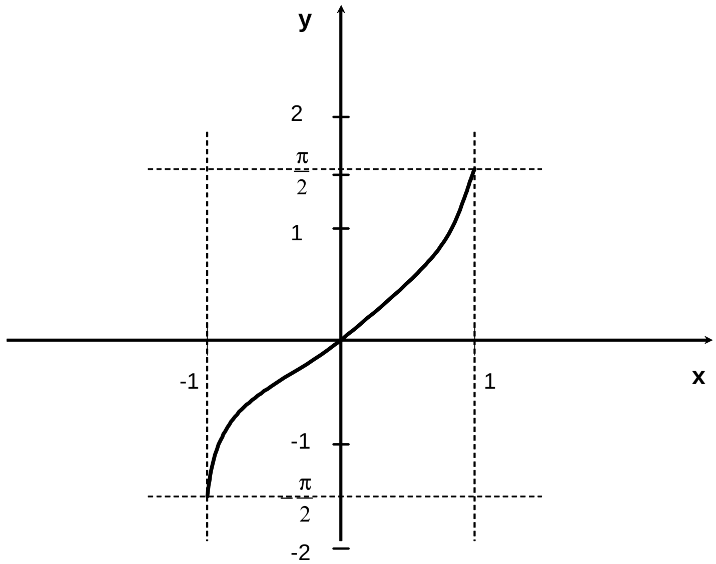
En este caso no se modifica ningún parámetro: la gráfica es igual a la función $f(x)=\text{sen}\,(x)$, sólo que se desplaza 2 unidades hacia arriba.



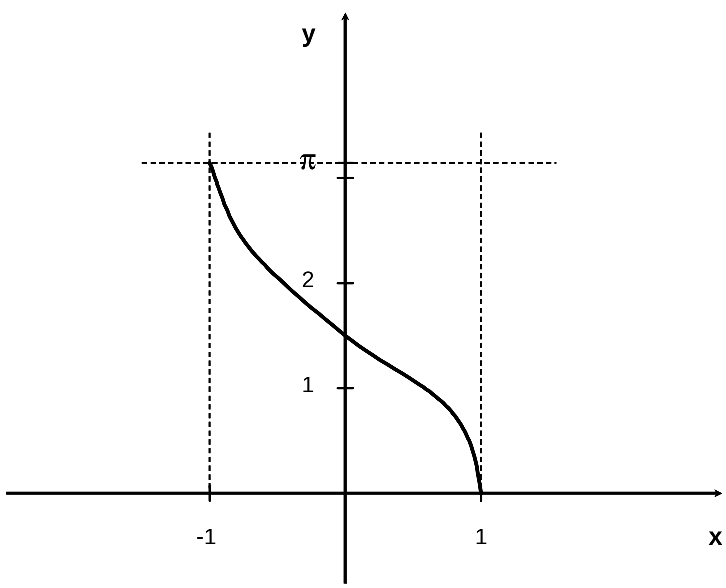
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas no son inyectivas, esto significa que para un cierto valor de la imagen existe un número infinito de valores de x. Esto significa que estas funciones no tienen inversa, sin embargo, pueden tenerla si se consideran ciertos intervalos donde cumplan con la definición de función y cuya tabulación para cada una se deduce a partir de los valores expuestos en la sección II.5. Esto se muestra a continuación:

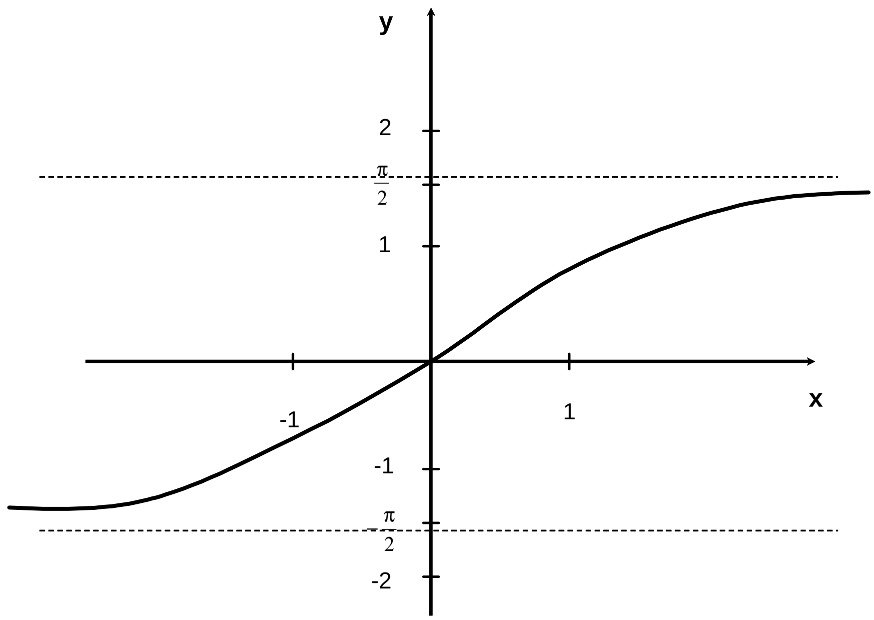
- Función $f(x)=\operatorname{sen}^{-1}x$. Su dominio es $[-1,1]$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.



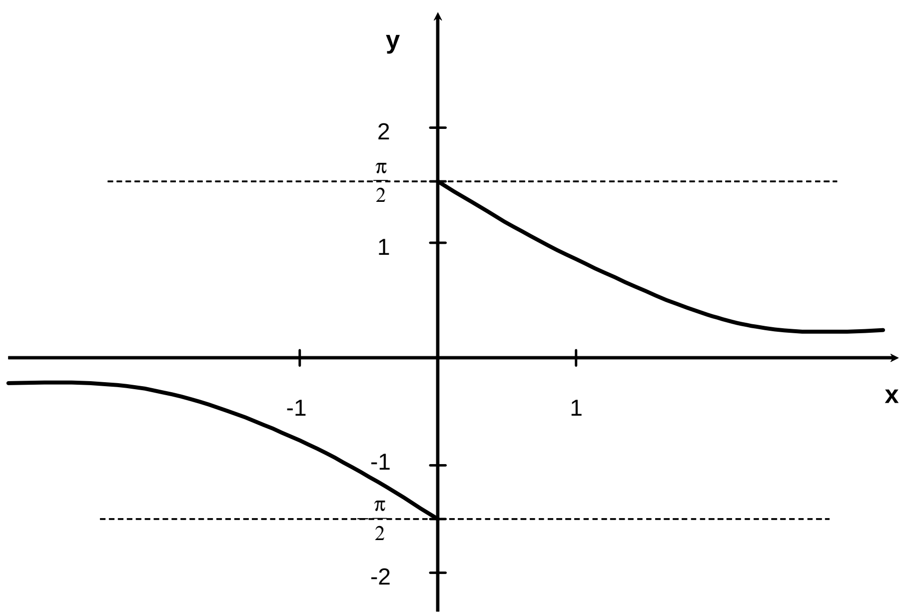
- Función $f(x)=\cos^{-1}x$. Su dominio es $[-1,1]$ y su imagen es $[0,\pi]$.



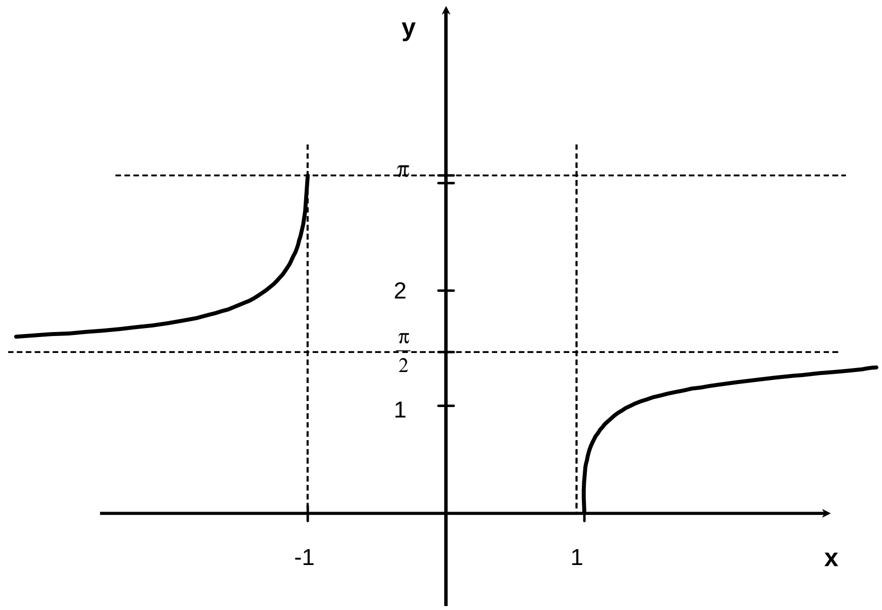
- Función $f(x)=\tan^{-1} x$. Su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen es $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



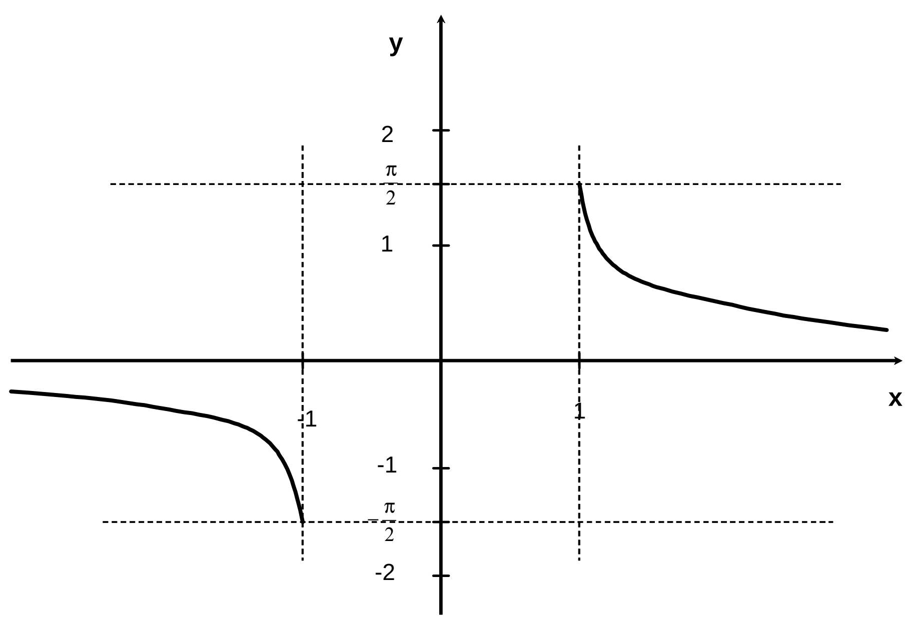
- Función $f(x)=\cot^{-1} x$. Su dominio es $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.



- Función $f(x)=\sec^{-1} x$. Su dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y su imagen es $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.



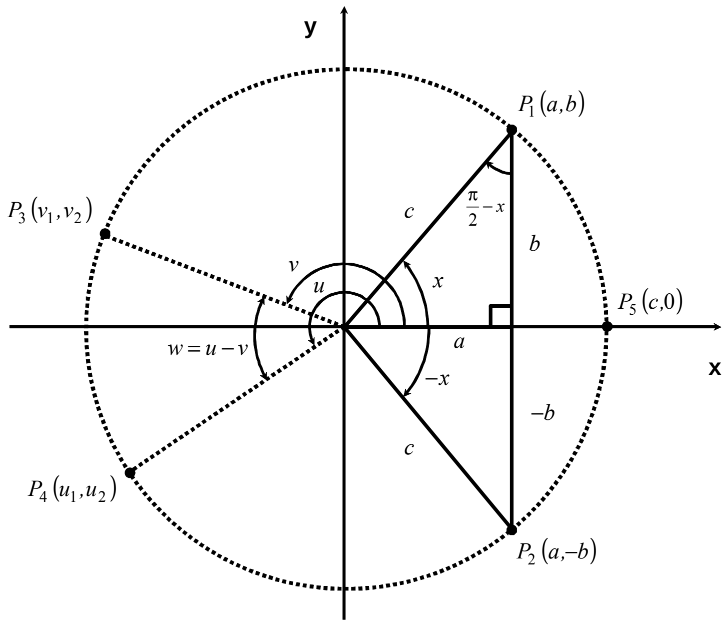
- Función $f(x)=\csc^{-1} x$. Su dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Se han mencionado algunas de las identidades trigonométricas, sin embargo es conveniente hacer un sumario para tener una mejor referencia. No es necesario aprenderse todas las identidades de memoria, por ello, se mencionan por grupos de importancia.

Considérese la siguiente figura:



IDENTIDADES PRINCIPALES[6]

a) Relaciones inversas

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Demostraciones:

Multiplicando por $\frac{1}{c}$ en la definición de tangente: $\tan x = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

[6] Utilizando con reiteración una o más fórmulas del grupo c), conocidas como fórmulas de reducción, es posible calcular el seno de x y el coseno de x, para cualquier valor de x, en función del seno y del coseno de ángulos entre 0° y 90°. Utilizando las fórmulas de los grupos a) se pueden calcular los valores de la tangente, cotangente, secante y cosecante de x en función del seno y del coseno. Por tanto, es suficiente tabular los valores del seno y el coseno de x para valores de x entre 0° y 90°. En la práctica, para evitar cálculos tediosos, se suelen también tabular las otras cuatro funciones para los mismos valores de x. Sin embargo, desde la popularización de las calculadoras y las computadoras, las tablas de funciones trigonométricas han caído en desuso.

Multiplicando por $\frac{1}{c}$ en la definición de cotangente: $\cot x = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Aplicando el recíproco en la definición de secante: $\sec x = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\cos x}$

Aplicando el recíproco en la definición de cosecante: $\csc x = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) Identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Demostración:
Si en la expresión del teorema de Pitágoras se divide cada término entre c^2 se tiene:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \therefore \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

c) Identidades expresando funciones trigonométricas en términos de sus complementos

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \sec x = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Demostraciones:

Si en el triángulo de la figura, el ángulo en el cual se aplican las funciones trigonométricas es $\frac{\pi}{2} - x$, entonces se tiene que el cateto opuesto y el cateto adyacente se intercambian, por lo tanto, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{a}{c} = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{c} = \operatorname{sen} x, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{a} = \cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{a}{b} = \tan x, \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{c}{b} = \csc x, \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{c}{a} = \sec x$$

d) Periodicidad de funciones trigonométricas. El seno el coseno, la secante y la cosecante tienen periodos de 2π, mientras que la tangente y la cotangente tienen un periodo de π.

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad \tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\cot(x + \pi) = \cot x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x \qquad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

Demostraciones:
En las gráficas de las funciones $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ se aprecia como los valores se repiten cada 2π radianes, así que al aplicar sus respectivas identidades recíprocas, las funciones $y = \csc x$ y $y = \sec x$ también presentan esa misma periodicidad. Por su parte, en la gráfica de la función $y = \tan x$ se muestra como los valores se repiten cada π radianes, así que al aplicar su identidad recíproca, la función $y = \cot x$ también posee esa misma periodicidad.

e) Identidades para ángulos negativos. El seno, la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares, es decir que cumplen con $f(-x) = -f(x)$. Por su parte, el coseno y la secante son funciones pares, es decir cumplen con $f(x) = f(-x)$.

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\cot(-x) = -\cot x \qquad \sec(-x) = \sec x \qquad \csc(-x) = -\csc x$$

Demostraciones:
Si en la figura anterior, se hace crecer x desde 0 hasta 2π, el punto P_1 recorre la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj y el punto P_2, correspondiente a $-x$, recorre la circunferencia pero en el sentido inverso. Así que aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas se tiene:

$$\text{sen}(-x) = \frac{-b}{c} = -\text{sen } x \qquad \cos(-x) = \frac{a}{c} = \cos x \qquad \tan(-x) = \frac{-b}{c} = -\tan x$$
$$\cot(-x) = \frac{c}{-b} = -\tan x \qquad \sec(-x) = \frac{c}{a} = \sec x \qquad \csc(-x) = \frac{c}{-b} = -\csc x$$

f) Identidades trigonométricas de dos ángulos

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x \qquad \text{sen}(x-y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y \qquad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen } x \cdot \text{sen } y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

Demostraciones:
Sean u y v dos números reales cualesquiera expresados en radianes y su diferencia se establece como $w = u - v$. Si los puntos de los lados terminales de los ángulos indicados en una circunferencia unitaria $(c = 1)$ son respectivamente $P_4(u_1, u_2)$, $P_3(v_1, v_2)$ entonces, por definición se tiene:

$$\cos u = u_1, \quad \cos v = v_1 \quad \cos(u - v) = w_1$$
$$\text{sen } u = u_2, \quad \text{sen } v = v_2 \quad \text{sen}(u - v) = w_2$$

Se aprecia que la distancia entre P_5 y P_1 debe ser igual a la distancia entre P_3 y P_4 porque los ángulos miden lo mismo.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

elevando al cuadrado y simplificando las expresiones de los radicales:

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2$$

Por ser una circunferencia unitaria, se cumple que: $w_1^2 + w_2^2 = u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$, entonces:

$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = u_1v_1 + u_2v_2$, así que sustituyendo se tiene:

$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \text{sen } u \cdot \text{sen } v$

si se renombra a las variables como: $u = x$ y $v = y$, se llega a:

$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen } x \cdot \text{sen } y$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\text{sen}(-y) = -\text{sen } y$ y $\cos(-y) = \cos y$, entonces:

$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos(-y) + \text{sen } x \cdot \text{sen}(-y) \quad \Rightarrow \quad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y$

Por otra parte, aplicando la identidad de complemento para el coseno:

$$\text{sen}(x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos y + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \text{sen } y$$

reduciendo:

$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\text{sen}(-y) = -\text{sen } y$ y $\cos(-y) = \cos y$, entonces:

$\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cdot \cos(-y) + \text{sen}(-y) \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x$

Por otra parte, aplicando la identidad de la tangente:

$$\tan(x + y) = \frac{\text{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y}$$

Si se divide el numerador y el denominador entre $\cos x \cdot \cos y \neq 0$:

$$\tan(x + y) = \frac{\text{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\cos y} + \frac{\text{sen } y}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos y}}{\frac{\cos x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\cos y} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } y}{\cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\tan(-y) = -\tan y$, entonces:

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \cdot \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

g) <u>Identidades de doble ángulo</u>

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x$

$$\tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Demostraciones:

Si se hace $y = x$ en la identidad $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x$, se tiene:

$\text{sen}(x + x) = \text{sen } 2x = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = 2\text{sen } x \cdot \cos x$

Si se hace $y = x$ en la identidad $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y$, se tiene:

$\cos(x + x) = \cos 2x = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

pero además se sabe que: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x - 1 = -\text{sen}^2 x$

por lo tanto: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x - 1$

pero también se sabe que: $\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$

por lo tanto: $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\left(1-\text{sen}^2 x\right)-1=2-2\text{sen}^2 x-1=1-2\text{sen}^2 x$

Si se hace $y=x$ en la identidad $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$, se tiene:

$$\tan 2x=\frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\cdot\tan x}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

IDENTIDADES SECUNDARIAS

h) <u>Identidades trigonométricas que involucran cuadrados</u>

$$\sec^2 x=1+\tan^2 x \qquad\qquad \csc^2 x=1+\cot^2 x$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x=1$, se divide cada término entre $\cos^2 x$:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \tan^2 x+1=\sec^2 x \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x=1+\tan^2 x$$

Si en la identidad $\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x=1$, se divide cada término entre $\text{sen}^2 x$:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}=\frac{1}{\text{sen}^2 x} \quad \Rightarrow \quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x \quad \Rightarrow \quad \csc^2 x=1+\cot^2 x$$

i) <u>Identidades que expresan funciones trigonométricas en términos de sus complementos</u>

$$\text{sen}(\pi-x)=\text{sen } x \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \tan(\pi-x)=\tan x$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\text{sen}(x-y)=\text{sen } x\cdot\cos y-\text{sen } y\cdot\cos x$, se sustituye $x=\pi$ y $y=x$:

$$\text{sen}(\pi-x)=\text{sen }\pi\cdot\cos x-\text{sen } x\cdot\cos\pi=0\cdot\cos x-\text{sen } x\cdot(-1)=\text{sen } x$$

Si en la identidad $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\text{sen } x\cdot\text{sen } y$, se sustituye $x=\pi$ y $y=x$:

$$\cos(\pi-x)=\cos\pi\cdot\cos x+\text{sen }\pi\cdot\text{sen } x=-1\cdot\cos x+(0)\cdot\text{sen } x=-\cos x$$

Si en la identidad $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$, se sustituye $x=\pi$ y $y=x$:

$$\tan(\pi-x)=\frac{\tan\pi+\tan x}{1-\tan\pi\cdot\tan x}=\frac{0+\tan x}{1+\tan 0\cdot\tan x}=\frac{\tan x}{1}=\tan x$$

j) <u>Identidades trigonométricas de medio ángulo</u>

$$\text{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2\, x$, se despeja $\text{sen}^2\, x$ se tiene que: $\text{sen}^2\, x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

ahora, si se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\, \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Si en la identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, se despeja $\cos^2 x$ se tiene que: $\cos^2 x = \frac{1 + 2\cos 2x}{2}$

ahora, si se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

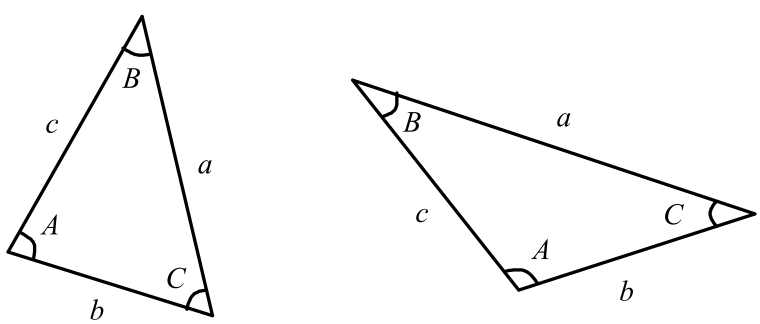
Si en la identidad $\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo oblicuángulo es un triángulo que no es rectángulo. Puede ser un triángulo agudo (si sus tres ángulos son menores de $90°$) o puede ser un triángulo obtuso (si uno de sus tres ángulos es mayor de $90°$).

Por convención, se establece que los ángulos de un triángulo oblicuo son A, B, C y sus lados opuestos se identifican como a, b y c respectivamente. Esto se muestra en las siguientes figuras:



Triángulo agudo **Triángulo obtuso**

La trigonometría de los triángulos oblicuos no es tan fácil como la de los triángulos rectángulos, pero hay dos teoremas de la geometría que son muy utilizados en trigonometría. Estos son llamados la “ley de los senos” y la “ley de los cosenos”.

LEY DE LOS SENOS

Dadas las figuras anteriores, la ley de los senos establece que:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Esta ley tiene tres igualdades y se puede usar en dos formas:

Primero, si se conocen dos ángulos y el lado opuesto de ellos, se puede determinar el otro lado.

Ejemplo.

Si $A=30°,\ B=45°,\ a=16$, entonces, aplicando esta ley: $\frac{\operatorname{sen} 30°}{16}=\frac{\operatorname{sen} 45°}{b}$ que resolviendo para b se tiene que $b=\frac{16\cdot\operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 30°}=22.62$.

Segundo, si se conocen dos lados y el ángulo opuesto de uno de ellos, entonces también se puede determinar el ángulo opuesto del otro lado.

Ejemplo.

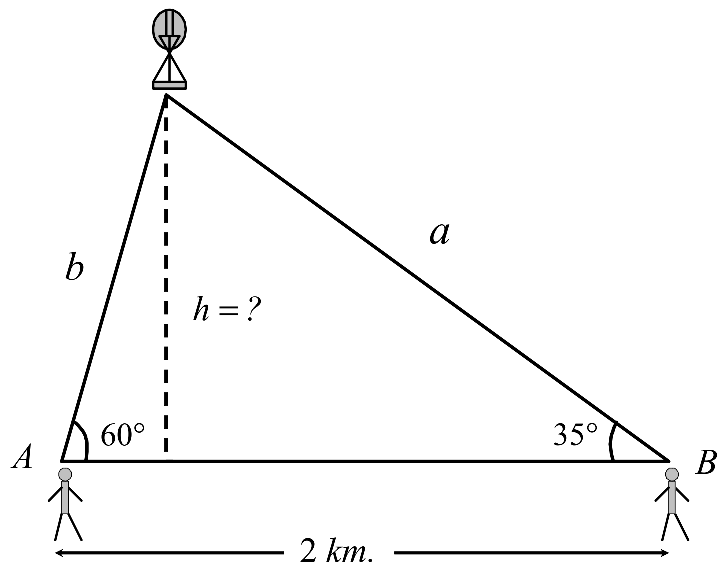
Si $a=25,\ b=15,\ A=40°$, entonces, aplicando esta ley: $\frac{\operatorname{sen} 40°}{25}=\frac{\operatorname{sen} B}{15}$, resolviendo para B se tiene que: $\operatorname{sen} B=\frac{15\cdot\operatorname{sen} 40°}{25}=0.3856$. Por lo tanto, $B=\operatorname{sen}^{-1}(0.3856)=22.68°$.

Nótese como puede no ser la respuesta correcta, ya que hay dos ángulos entre $0°$ y $180°$ que tienen el mismo valor del seno (el segundo es el complemento del primero). Así que en este caso, también puede ser el ángulo obtuso $180°-22.68°=157.32°$. Esta situación es indeterminada, ya que conociendo dos lados y el ángulo opuesto de uno de ellos no siempre es suficiente para determinar el triángulo.

Ejemplo.
En una llanura, un niño observa a $60°$ un globo aerostático. A 2 kilómetros de distancia, su primo mira el mismo globo pero a $35°$
a) ¿a qué distancia está cada niño del globo?
b) ¿a qué altura se encuentra el globo del nivel de los niños?

Solución.
a) Haciendo un dibujo, es fácil deducir que se forma un triángulo. El ángulo faltante es $180°-60°-35°=85°$. Por lo tanto: $A=60°,\ B=35°,\ C=85,\ c=2\ Km.$, entonces, aplicando esta ley: $\frac{\operatorname{sen} 85°}{2}=\frac{\operatorname{sen} 60°}{a}=\frac{\operatorname{sen} 35°}{b}$. La distancia del globo y el niño A es: $b=\frac{2\cdot\operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 85°}=1.15\ Km.$

Por su parte, la distancia del globo y el niño B es: $a=\frac{2\cdot\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 85°}=1.73\ Km.$



b) En el triángulo de la izquierda se cumple que: $\text{sen}\,60° = \frac{h}{1.15}$, por lo que la altura pedida es: $h = 1.15 \cdot \text{sen}\ 60° \approx 1\ km.$

LEY DE LOS COSENOS

Considerando las figuras anteriores, esta ley establece que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Como puede apreciarse es semejante al teorema de Pitágoras excepto por el último término. En el caso de que C sea un ángulo recto, el término desaparece (porque $\cos 90° = 0$). Así que la ley de los cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras.

Como cada triángulo da tres ecuaciones para la ley de los cosenos, se pueden permutar las letras como se quiera, esto significa que las otras dos versiones son:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{y} \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

Al igual que la ley de los senos, esta ley relaciona los tres lados del triángulo con los tres ángulos, así que se puede usar en dos formas:

Primero, si se conoce un ángulo y los dos lados adyacentes, se puede determinar el lado opuesto.

Ejemplo.
Si $C = 60°,\ a = 5,\ b = 8$
aplicando la ley de los cosenos se tiene:

$$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)\cos 60°$$

$$c^2 = 25 + 64 - 40 = 49 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{49} = 7$$

Segundo, si se conocen los tres lados de un triángulo, entonces se puede encontrar cualquier ángulo.

Ejemplo.
Si $a = 5,\ b = 6,\ c = 7$, entonces, aplicando la ley de los cosenos se tiene: $7^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos C$

$$\Rightarrow \quad \cos C = \frac{49 - 25 - 36}{-60} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad C = \cos^{-1}(0.2) = 78.46°$$

Es importante hacer notar que cuando un triángulo es obtuso, el coseno de C es negativo.

Ejemplo.
Supóngase que los tres lados son: $a = 5,\ b = 6,\ c = 10$. entonces, aplicando la ley de los cosenos se tiene: $10^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos C \quad \Rightarrow \quad \cos C = \frac{100 - 25 - 36}{-60} = \frac{49}{-60} = -0.8166$

$\Rightarrow \quad C = \cos^{-1}(-0.8166)$. Pero como se sabe que el coseno de un ángulo obtuso es negativo, se debe calcular apropiadamente, esto es $C = \cos^{-1}(-0.8166) = 144.75°$. Si se tomara el valor positivo del argumento, lo que se encuentra es el suplemento de C , esto es: $\cos^{-1}(0.8166) = 35.25°$.

APLICACIONES

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la Física, Química y en casi todas las ramas de la Ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

La trigonometría es de gran importancia para la teoría de la proyección estereográfica y en la geodesia. Es también el fundamento de los cálculos astronómicos. Por ejemplo, la solución del llamado triángulo astronómico se utiliza para encontrar la latitud y longitud de un punto, la hora del día, la posición de una estrella y otras magnitudes. Además, ha tenido gran utilidad para calcular la distancia que separa la Tierra del Sol, distancias de los planetas al Sol, distancias a las estrellas, diámetros de los planetas, confección de calendarios, etc.

La medida de ángulos en grados es ampliamente usada en Ingeniería y en Física, principalmente en Astronomía, navegación y Topografía. El método más corriente de localizar una estrella, o un punto en la superficie de la Tierra, es utilizar su distancia angular en grados, minutos y segundos a ciertos puntos o líneas de referencia fijadas. Los posiciones en la superficie de la Tierra se miden en grados de latitud norte o sur del ecuador y grados de longitud este u oeste del meridiano principal, que normalmente es el meridiano que pasa por Greenwich en Inglaterra.

Debido a que la trigonometría trabaja con ángulos se necesitan instrumentos para medir estos, como el goniómetro, el teodolito, la regla paraláctica, etc. Hoy en día resulta difícil imaginar cualquier actividad de construcción en la que no intervenga la trigonometría. La imagen del topógrafo tomando ángulos es muy común.

Particularmente los conceptos vistos en esta unidad pueden aplicarse en:

- En mecánica, los movimiento armónicos
- Las poleas y movimientos rotativos.
- La construcción de un canal pluvial.
- En acústica, las ondas de radio son un ejemplo de las funciones trigonométricas: el sonido generado es la suma de las ondas producidas por ambas.
- La determinación de superficies (por ejemplo en la agrimensura) y mediciones de tipo cíclicas.
- La torre Eiffel, además de una bella y conocida obra de arte, es, toda ella, un compendio de propiedades matemáticas, entre otras, la de la indeformabilidad de los triángulos que constituyen su estructura.