COLEGIO DE BACHILLERES

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

FASCÍCULO 1. RAZÓN DE CAMBIO

Autores: Mario Luis Flores Fuentes
Alberto Luque Luna

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN

El origen del Cálculo Integral se remonta a más de 2 00 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área, ideando el procedimiento que llamaron MÉTODO DE EXHAUCIÓN.

Las ideas esenciales de este método son realmente muy simples. Desde Arquímedes, el desarrollo del Método de Exhaución tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de losa símbolos y técnicas algebraicas se hizo en estudios matemáticos. El álgebra elemental que hoy en día es familiar, en tiempos de Arquímedes era totalmente desconocida, lo cual hacía posible difundir dicho método. Un cambio lento pero revolucionario, en el desarrollo de las notaciones matemáticas empezó en el siglo XVI D. C. Con la introducción de los símbolos algebraicos, revivió el interés por el antiguo Método de Exhaución y en el siglo antes mencionado se descubrieron múltiples resultados, los que como Cavalleri, Torrecelli, Roberval, Fermat, Pascal y Wallis fueron pioneros.

Gradualmente, el Método de Exhaución fue transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo Integral.

Newton y Leibniz separadamente uno del otro, fueron en parte los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo Integral hasta llegar a encontrar problemas que en su tiempo fueron irresolubles, su mayor logro fue el hecho de poder fundir en uno el cálculo integral y la segunda rama importante del cálculo: el Cálculo Diferencial.

La idea central del Cálculo Diferencial es la noción de derivada. Igual que la Integral, la derivada fue originada por un problema de Geometría.

Por lo tanto los cálculos: Integral y Diferencial permiten obtener técnicas para dar solución a problemas que están fuera del alcance de los Métodos Algebraicos.

El objetivo del presente fascículo es analizar tanto cuantitativamente como cualitativamente las razones de cambio instantáneo y promedio, lo cual te permite dar solución a situaciones problemáticas.

La adquisición del conocimiento del cálculo sirve para aumentar la capacidad de retención transferencia de ideas, la toma de decisiones al relacionar el cálculo con otras ciencias, así como también con relación a todos los fenómenos cotidianos que se presentan dentro de lo económico, demográfico, ambiental, biológico, social y físico, entre otros.

# PROPÓSITO

En los fascículos anteriores estudiaste los elementos que conforman la cultura básica de las Matemáticas: Aritmética, Álgebra de Funciones, Geometría Euclidiana, Trigonometría y Geometría Analítica, descubriste su importancia y analizaste su utilidad. Con el estudio de este material profundizarás en el estudio de las funciones y sus aplicaciones, accederás a un nuevo lenguaje y metodología.

A través del estudio de los conceptos: Razón de Cambio Promedio y Razón de Cambio Instantánea, conceptos relativos a los cambios de una magnitud con respecto a otra con la que está relacionada funcionalmente, aprenderás a resolver problemas cuya solución no está al alcance de los métodos algebraicos.

# CAPÍTULO 1

# RAZÓN DE CAMBIO

La producción de acero en Monterrey N.L. (México) en millones de toneladas, durante el año de 1992 a partir del mes de enero se muestra en la tabla.

| | ENE | FEB | MAR | ABR | MAY | JUN | JUL | AGO | SEP | OCT | NOV | DIC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Meses | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Producción en millones de toneladas | 6.7 | 8.5 | 8.9 | 7.8 | 9.7 | 10.5 | 9.3 | 11.2 | 8.8 | 11.7 | 11.5 | 11.9 |

I) Tomando valores consecutivos, ¿para qué intervalo de meses la producción de acero fue mayor y de cuánto fue?

II) ¿Podrías calcular con una muy buena aproximación, qué producción hubo el 15 de junio?

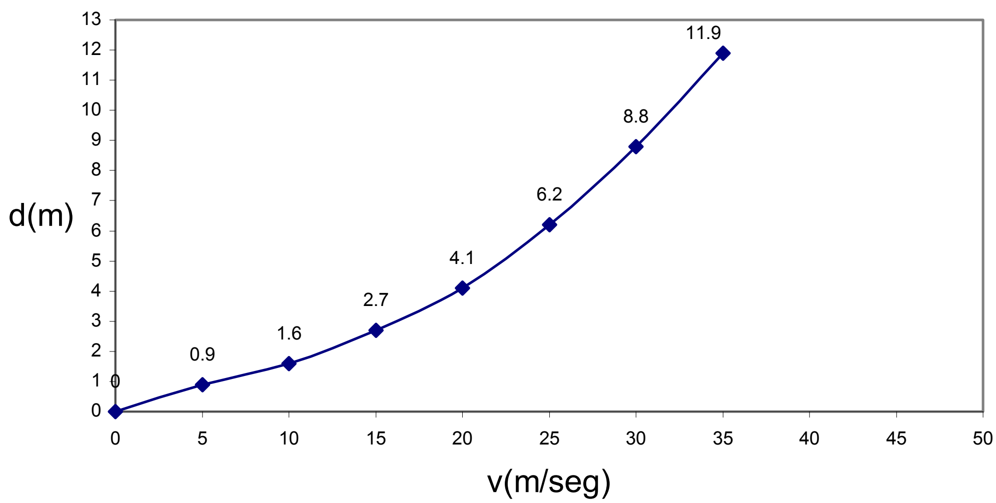
Con el estudio de este capítulo aprenderás los conceptos de Razón de cambio promedio y Razón de cambio instantáneo para que los utilices en la solución de diversos problemas.

## 1.1 RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

En la vida diaria se determinan razones de cambio de diversas situaciones de tipo natural, Económico, Social. Situaciones en las que nos interesa conocer cuál es el más pequeño (mínimo) o más grande (máximo) valor, como aumenta (crece) o disminuye (decrece) ese valor, en un intervalo de tiempo específico, en general problemas donde se estudian fenómenos relativos a la variación de una cantidad que depende de otra, por lo que se hace necesario describir y cuantificar estos cambios a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas como se muestra en los ejemplos siguientes

EJEMPLO

El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno*).* La gráfica 1 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V(m/seg) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con coches manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones:




Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m /seg y en esos momentos esta colocada una barda a 14.0 mts. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra la barda? ¿Por qué?

I) Completa la tabla de acuerdo a los puntos de la gráfica

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidad v (m/seg) | x | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 22.5 | 25 | 30 | 35 |
| Distancia de parada d(m) | y | 0 | | 1.6 | | | | 6.2 | | 11.9 |

II) ¿Cuál es el tiempo promedio de frenado para valores comprendidos:

a) entre los 20 y 30 m/seg.
b) de 30 a 35 m/seg.

El tiempo promedio de frenado, es el aumento de parada para cada cambio en la velocidad, es decir, la razón de cambio en distancia, al cambio en velocidad. Por ejemplo, la razón de cambio de frenado de los 10 a los 20 m/seg es:

$$\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en velocidad}} = \frac{4.1 \quad 1.6}{20 \quad 10} = \frac{2.5}{10} = 0.25\text{seg.}$$

ahora contesta los incisos a y b

de 20 a 30 m/seg el tiempo promedio de frenado es:______________
de 30 a 35 m/seg el tiempo promedio de frenado es:______________

III) Calcula el tiempo promedio de frenado para puntos consecutivos e indica para qué velocidad el tiempo promedio de frenado fue mayor y cuál fue.

Para determinar el tiempo promedio de frenado para puntos consecutivos se utiliza:

$$\boxed{\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en velocidad}}}$$

por lo tanto

de 0 a 5 m/seg $= \frac{0.6 \quad 0}{5 \quad 0} = \frac{0.6}{5} = 0.12\text{seg.}$

de 5 a 10 m/seg $= \frac{1.6 \quad 0.6}{10 \quad 5} = \frac{1}{5} = 0.2\text{seg.}$

completa los demás cálculos de 10 a 15 m/seg.

de 10 a 15 m/seg
de 15 a 20 m/seg
de 22.5 a 25 m/seg
de 25 a 30 m/seg
de 30 a 35 m/seg

Como puedes observar conforme aumenta la velocidad aumenta la distancia de frenado del automóvil, con lo que el tiempo promedio de frenado también va aumentando y por lo tanto debe ser mayor para cuando V = 40 m/seg que para las velocidades anteriores. Al calcular el tiempo promedio de frenado de un auto que viaja a 40 m/seg y cuya distancia de parada es de 14.0 mts. obtenemos:

$$\frac{14.0 \quad 11.9}{40 \quad 35} = \frac{2.1}{5} = 0.42\text{seg.}$$

y como el tiempo y como el tiempo promedio de frenado para un auto que viaja a 35 m/seg. es 0.62 ¿porqué?, entonces para el auto que viaja a 40 m/seg. no le es suficiente la distancia de 14 mts. para frenar, por lo que, el auto irremediablemente chocaría contra la barda y la compañía no podría garantizar que la distancia promedio de parada sea aceptable, con esto, hemos contestado las preguntas iniciales.

Para dar respuesta a las preguntas, utilizamos el cociente:

$$\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en velocidad}}$$

Ya que en "Cálculo" se utiliza la letra griega $\Delta$ (delta) para denotar el cambio o la diferencia, entonces $\Delta d$ es el cambio en distancia y $\Delta v$ el cambio en velocidad por lo que:

$$\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en velocidad}} = \frac{d_2 - d_1}{v_2 - v_1} = \frac{\Delta d}{\Delta v}$$

En general a la diferencia en las coordenadas x de los puntos de la gráfica de una función f se le llama incremento de x, se le denota mediante $\Delta x$ que es igual a $x_2 - x_1$ es decir, $\Delta x = x_2 - x_1$ asimismo, $\Delta y = y_2 - y_1$ al formar el conciente de cambio en y con los cambios en x podemos escribir:

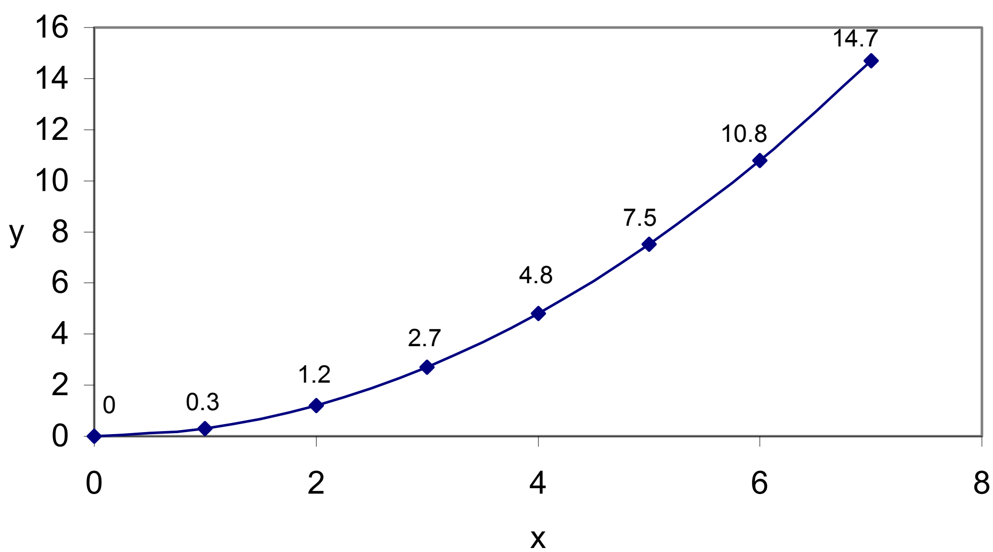
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en donde a este cociente le llamamos "Razón de cambio promedio"

EJEMPLO

En una investigación que se realizó para observar que cantidad de desperdicios en toneladas se tira al océano diariamente en ciertas playas de Acapulco (México), para un período vacacional de una semana se anotaron los siguientes datos:

| | | Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes | Sábado | Domingo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Días ( x) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Ton. de desperdicio (y) | 0 | 0.3 | 1.2 | 2.7 | 4.8 | 7.5 | 10.8 | 14.7 |

I) Si trazas los parejas de valores en el plano cartesiano y los unes te queda una gráfica como la siguiente:




¿Cuál es la razón de cambio promedio de desperdicio que se arroja al mar entre lunes y martes?

Aplicando el concepto de razón de cambio promedio

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1} = \frac{1.2 \quad 0.3}{2 \quad 1} = 0.9\text{ton.}$$

Como ya habrás notado siempre que desees calcular la "razón de cambio promedio" para cualquier pareja de puntos, tiene que formar el cociente:

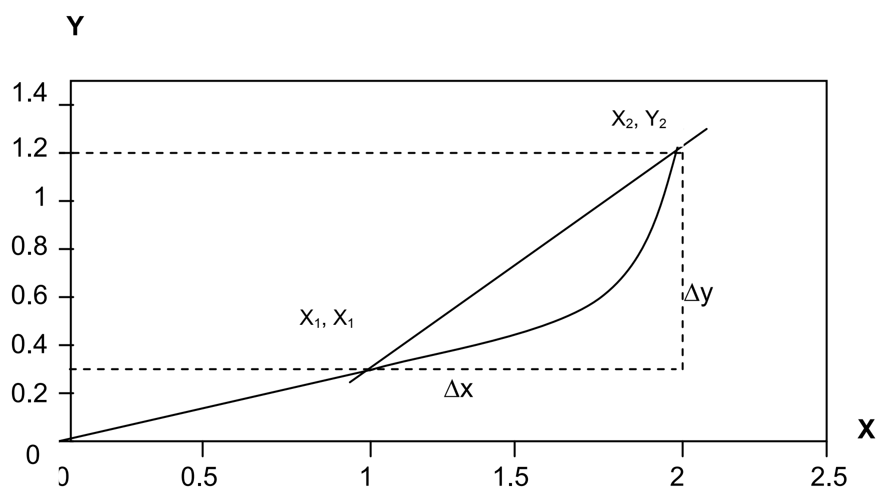
$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

y recordando conceptos de tu curso de matemáticas IV te podrás dar cuenta que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la pendiente de una recta.

Si tomamos a escala una parte de la gráfica y los puntos para los cuales se calculó la razón de cambio promedio (pendiente .) entre lunes y martes, puedes observar claramente que la razón de cambio promedio es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos ($x_1$ ,,$y_1$) y ($x_2$ ,,$y_2$) es:




Por lo que puedes asegurar lo siguiente, cada que realizas los cálculos de razones de cambio promedio, al mismo tiempo estás calculando la pendiente de rectas secantes ( para cada pareja de puntos).

## ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

II) Calcula las razones de cambio promedio (pendientes de rectas secantes) para días consecutivos.

Lunes a martes $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.9\text{ton}$

Martes a miércoles $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Miércoles a jueves $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Jueves a viernes $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Viernes a sábado $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Sábado a domingo $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

Para este ejemplo puedes concluir que al calcular las pendientes de las rectas secantes (razones de cambio promedio) todas resultaron positivas (ángulo de inclinación con respecto al eje x menor de 90º) ahora contesta las preguntas:

¿Qué pendiente fue mayor?
¿Cuál es la razón de cambio promedio de lunes a domingo?

EJEMPLO

Un submarino lanza un proyectil, la altura en metros por encima del nivel del mar, está dada por la función cuadrática:

$f(x) = -12x^2 + 72x - 60$

donde x es el tiempo en segundos.

Vamos a construir una tabla calculando valores para x desde 1 a 5 y tornando intervalos de tamaño 0.5 entonces.

para x = 1

$f_{(1)} = -12(1)^2 + 72(1) - 6\ 0$
$= -12(1) + 72 - 60$
$= 0$

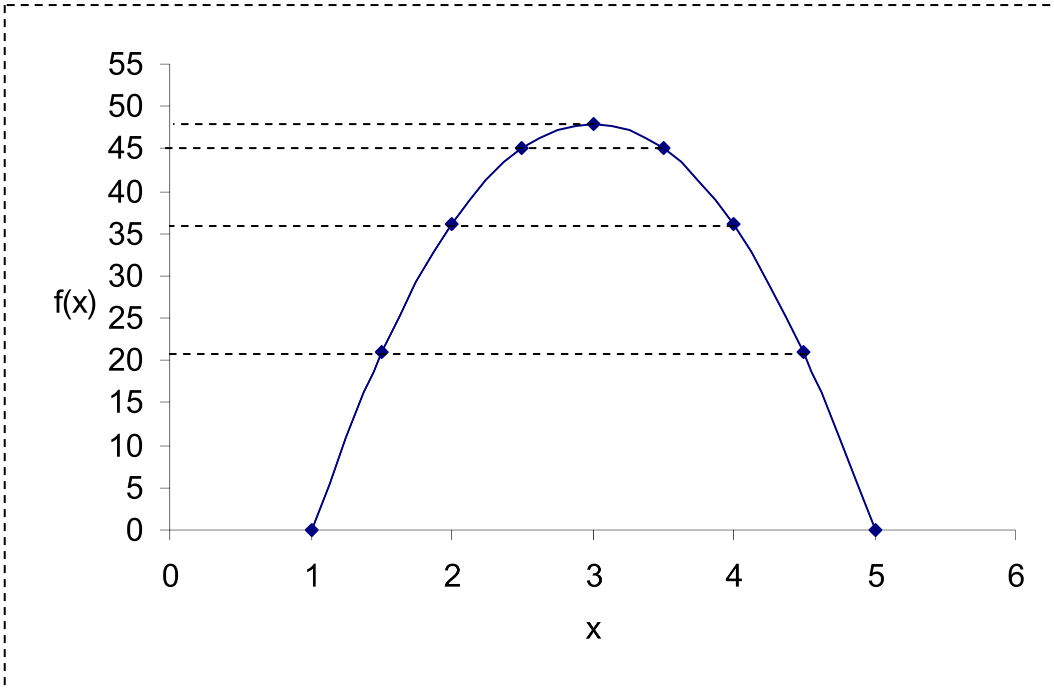
para x = 1.5

$f_{(1.5)} = -12(1.5)^2 + 72(1.5) - 6\ 0$
$= -12(2.25) + 108 - 60$
$= -27 + 108 – 60$
$= 21$

Ahora calcula el valor numérico de $f_{(2)}$, $f_{(2.5)}$, $f_{(3)}$, $f_{(3.5)}$, $f_{(4)}$ , $f_{(4.\ 5)}$ Y $f_{(5)}$; anota los resultados obtenidos en una tabla y comprueba que son los siguientes:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo x | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
| Altura f(x) | 0 | 21 | 36 | 45 | 48 | 45 | 36 | 21 | 0 |

Al graficar estos resultados en el plano cartesiano y esbozar la gráfica de la función queda:




Ahora calculemos las pendientes de las rectas secantes (razones de cambio promedio) para puntos sucesivos como se ha hecho anteriormente

de $P_1$ a $P_2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21 \quad 0}{1.5 \quad 1} = \frac{21}{0.5} = 42$$

de $P_2$ a $P_3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{36 \quad 21}{2 \quad 1.5} = \frac{15}{0.5} = 30$$

de $P_3$ a $P_4$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_4$ a $P_5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_5$ a $P_6$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_6$ a $P_7$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_7$ a $P_8$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_8$ a $P_9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

También vamos a calcular las pendientes de las rectas secantes para parejas de puntos que se encuentran a la misma altura.
para $P_1$ y $P_9$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 \quad 0}{5 \quad 1} = \frac{0}{4} = 0$$

de $P_2$ a $P_8$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21 \quad 21}{4.5 \quad 1.5} = \frac{0}{3} = 0$$

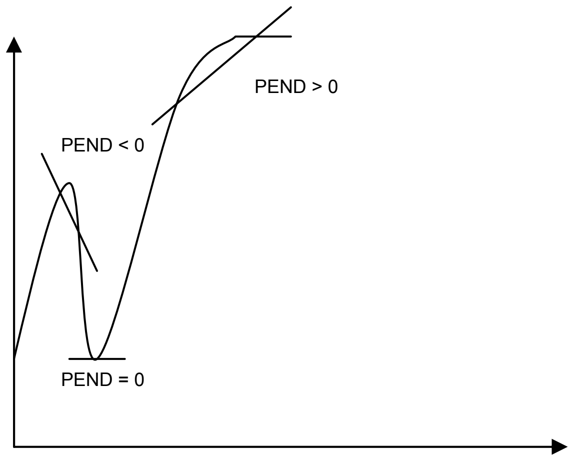
de $P_3$ a $P_7$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

de $P_4$ a $P_6$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

Con los cálculos realizados puedes asegurar lo siguiente: Las pendientes de las rectas secantes cuando la función es creciente son positivas, las pendientes de las rectas secantes horizontales (paralelas al eje x) valen cero y las pendientes de las rectas secantes cuando la función decrece son negativas (ver gráfica).




## EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta este momento hemos visto que al calcular la razón de cambio promedio, lo que estamos determinando es la pendiente para cada pareja de puntos. Las pendientes de las rectas secantes cuando la función decrece son positivas, las pendientes de las rectas secantes (paralelas al eje x) valen 0 y las pendientes cuando la función decrece son negativas.

## 1.2 RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Se realizan estudios para poder purificar la atmósfera de la Tierra. Si una compañía a través de sus fábricas y durante un período de 18 horas diarias para combatir el "smog", liberará en la atmósfera cada una de sus fábricas, toneladas de una sustancia química determinada por la función:

$f(x) = 0.2x^2 + 2x$

¿Cómo aumenta la cantidad de toneladas de sustancias químicas desde que se empiezan a liberar? Hasta:

¿2 horas después?
¿5 horas después?
¿entre las 12 y las 14 horas?

Aplicando lo que has aprendido de razón de cambio promedio la solución de a) es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.8 \quad 0}{2 \quad 0} = \frac{4.8}{2} = 2.4\text{ton.}$$

para b) es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4.5\text{ton.}$$

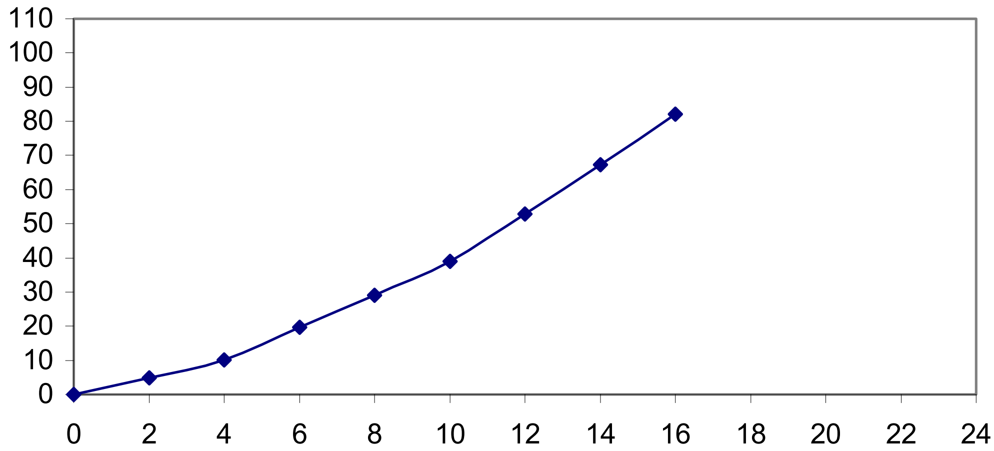
para c) es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7.2\text{ton.}$$

Completa la tabla tomando intervalos de 2 horas

| X | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 4.8 | | | | | 52.8 | 67.2 | | |

Realiza un esbozo de la gráfica con los valores de la tabla y verifica que quede como ésta:




¿Cuál es la liberación de cambio instantánea de toneladas de sustancia química exactamente 8 horas después?

Para determinar este valor tenemos que calcular la razón de cambio promedio para intervalos de tiempo cada vez más y más pequeños, estos intervalos deben iniciar en el "tiempo" que deseamos analizar, así para un tiempo de 8 horas se han liberado:

$$f(8) = 0.2(8)^2 + 2(8) = 28.8 \text{ ton.}$$

para un tiempo de 9 horas se han liberado:

$$f(9) = 0.2(9)^2 + 2(9) = 34.2 \text{ ton.}$$

Calculando la razón de cambio promedio para estos valores:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{34.2 \quad 28.8}{9 \quad 8} = \frac{5.4}{1} = 5.4\text{ton.}$$

De igual manera calculemos las toneladas promedio de liberación de sustancias químicas que benefician la atmósfera para intervalos de tiempo más pequeños y que inicien en un tiempo = 8 hrs.

de 8 a 8.5hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{31.45 \quad 28.8}{8.5 \quad 8} = \frac{2.65}{0.5} = 5.3\text{ton.}$$

de 8 a 8.1hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29.322 \quad 28.8}{8.1 \quad 8} = \frac{0.522}{0.1} = 5.22\text{ton.}$$

de 8 a 8.01hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{28.85202 \quad 28.8}{8.01 \quad 8} = \frac{0.05202}{0.01} = 5.202\text{ton.}$$

calculando para 8 y 8.001hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{28.8052002 \quad 28.8}{8.001 \quad 8} = \frac{0.0052002}{0.001} = 5.2002\text{ton.}$$

Para 8 y 8.001 ¿cuál es el resultado del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Analizando el proceso de cálculo y los resultados que se van obteniendo y si tomáramos intervalos de tiempo "demasiado pequeños" concluimos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende o esta muy, pero muy "cerca" del valor 5.2 toneladas y podemos tomar este valor como la liberación de cambio instantánea, con lo cual contestamos la pregunta planteada.

## ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Un globo aerostático asciende verticalmente, después de x horas su distancia f de la tierra medida en km. está determinada por:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

I) Realiza un esbozo de la gráfica de la función y contesta la siguiente pregunta ¿sube indefinidamente el globo? ¿Por qué?

II) ¿Cuál es la velocidad instantánea exactamente 1/2 hora después que inició su ascenso el globo?

Trata de contestar estas preguntas antes de continuar con el estudio de este fascículo.

Aplicando el método anterior, tomamos intervalos de tiempo cada vez más y más "pequeños" y que inicien en un tiempo de 0.5 horas.

de 0.5 hrs. a 0.51 hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.5198 \quad 1.5}{0.51 \quad 0.5} = \frac{0.0198}{0.01} = 1.98 \text{ km/hr}$$

de 0.5 hrs. a 0.501 hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.5198 - 1.5}{0.501 - 0.5} = \frac{0.001998}{0.001} = 1.998 \text{ km/hr}$$

de 0.5 hrs. a 0.5001 hrs.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.9998 \text{km / hr}$$

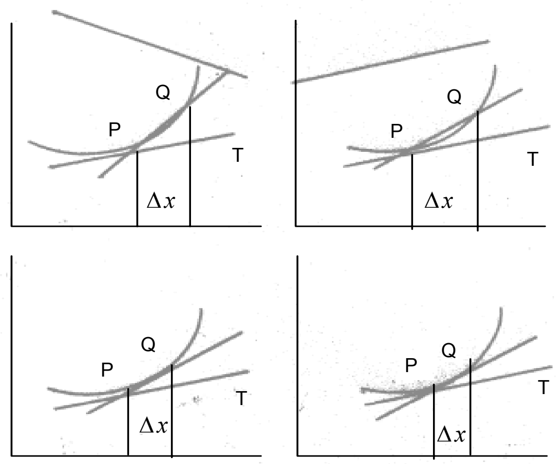
¿Cuál es la velocidad de 0.5 a 0.50001 hrs.?

Si continuamos tomando intervalos más y cada vez más "pequeños", es decir, si $\Delta x \to 0$ podemos concluir que el valor "límite" o la' velocidad instantánea cuando x=1/2 hr. es 2 km/hr.

Haciendo un análisis de los dos problemas estudiados, para poder calcular la razón de cambio instantánea tomamos el incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ cada vez más y más pequeño, es decir, $\Delta x$ tendiendo a cero que expresamos así $\Delta x \to 0$ y observamos que en los dos casos obtuvimos un valor "limite". A este proceso lo podemos enunciar como "límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ ” que matemáticamente se escribe:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ o como } \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

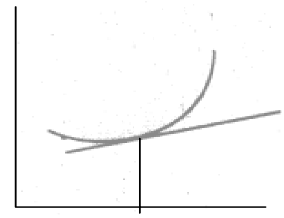
A continuación mostramos gráficamente el proceso $\Delta x \to 0$




El punto Q está "muy" cerca del punto P y el valor de la pendiente de la secante PQ se aproxima al de la pendiente de T.

El punto Q está "demasiado cerca del punto P y el valor de la pendiente de la secante PQ casi se igual al de la pendiente de T.

El punto Q se acerca al punto P y la secante PQ cambia su pendiente



$\Delta x = 0$

Entre el punto P y el punto Q el valor de la pendiente de la secante PQ no se nota diferencia

La secante $\overline{PQ}$ y la recta tangente T prácticamente están en la misma posición, es decir, la razón de cambio instantánea numéricamente vale lo mismo que la pendiente de la recta tangente T (secante $\overline{PQ}$ ) o mejor dicho:.

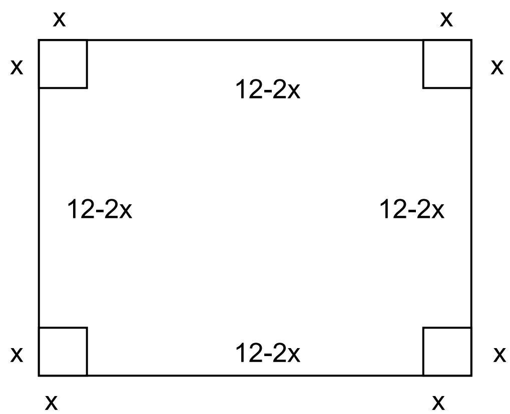
$$\boxed{\text{la razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Podemos utilizar también la notación $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \quad f(x)}{\Delta x}$ para calcular la razón de cambio instantánea.

→

Por ejemplo:

Se desea construir cajas metálicas sin tapa de volumen máximo con láminas cuadradas, que tienen 12 cm. por lado recortándole cuadros iguales en las esquinas y doblando hacia arriba como lo muestra la figura:



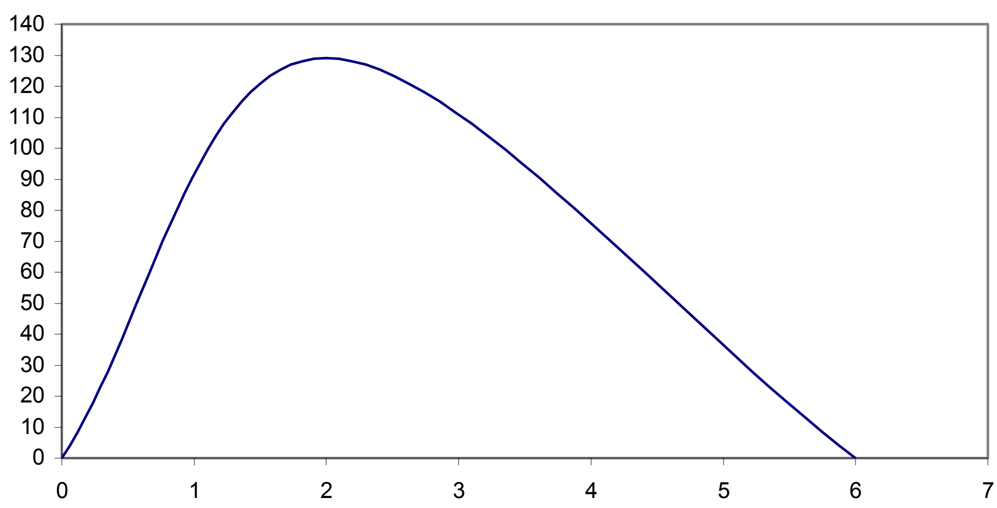

Sea x el lado del cuadrado que se va a cortar y V el volumen de la caja resultante, entonces:

$f(x) = x\ (\ 12\ -2x\ )\ (\ 12\ -2x\ ) = 4x^3\ -48x^2 + 144x$

III) Esboza la gráfica de esta situación

¿Cuánto mide cada lado x de los cuadrados que se recortan?
¿Cuál es el volumen máximo de cada caja?

Entonces la gráfica es:




y:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \quad f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^3 \quad 48(x+\Delta x)^2 + 144(x+\Delta x) \quad (4x^3 \quad 48x^2 + 144x)}{\Delta x}$$

Desarrollemos cada binomio por separado

$$4(x+\Delta x)^3 = 4[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3]$$

$$= 4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3$$

$$48(x+\Delta x)^2 = \quad 48[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2]$$

$$= \quad 48x^2 \quad 96x\Delta x \quad 48(\Delta x)^2$$

$$144(x+\Delta x) = 144x + 144\Delta x$$

entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^3 + 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 48x^2 - 96x\Delta x - 48(\Delta x)^2 + 144x + 144\Delta x - 4x^3 + 48x^2 - 144}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 96x\Delta x - 48(\Delta x)^2 + 144\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 12x^2 + 12x\Delta x + (\Delta x)^2 - 96x - 48\Delta x + 144$$

como $\Delta x \to 0$ nos queda

$$=12x^2-96x+144$$

que es la razón de cambio instantánea (pendiente de la recta tangente) para el valor más alto de la curva, en donde la recta tangente es paralela al eje x, por lo tanto, su pendiente vale cero.

Trata de explicar por qué antes de continuar ______________________ y el resultado obtenido lo igualamos a cero

$$12x^2-96x+144=0$$

Ahora resolvamos la ecuación cuadrática

$$12(x^2-8x+12)=0$$
$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-6)(x-2)=0 \qquad x_1=6 \quad x_2=2$$

Sustituyendo estos valores en la función original.

$$f(6)=4(6)^3-48(6)^2+144(6)$$
$$=4(216)-48(36)+864$$
$$=864-1728+864$$
$$=0\ cm^3$$

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 4(2)^3-48(2)^2+144(2)\\
&= 4(8)-48(4)+288\\
&= 32-192+288\\
&= 128\ \text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Por lo que cada lado de los cuadrados que se recortan mide dos centímetros y el volumen máximo de cada caja es de $128\ \text{cm}^3$.

## RECAPITULACIÓN

A continuación te presentamos una síntesis de los conceptos más relevantes de éste fascículo.

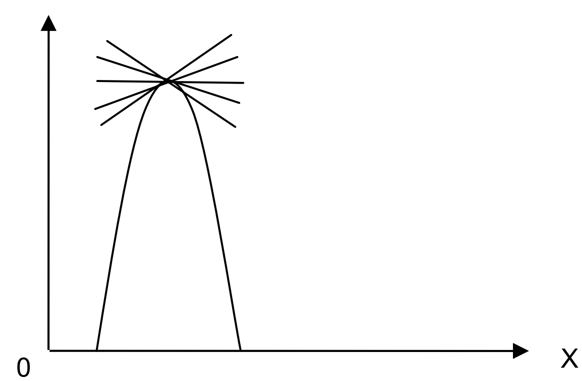
Al cociente $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ se le llama "razón de cambio promedio"

Que también es la pendiente de una recta secante que pasa por los puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Al cociente $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ cuando } \Delta x \to 0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ se le llama "razón de cambio instantánea,

que nos permite calcular la razón de cambio de una función prácticamente en cualquier "instante".

En general cuando se calcula la pendiente de la recta secante (razón de cambio), esta tiene un valor positivo para los intervalos donde la función es creciente (pendiente >0), vale cero para los intervalos donde la función es constante (pendiente = 0) Y es negativa para los intervalos donde la función es decreciente (pendiente <0) gráficamente lo podemos representar así:

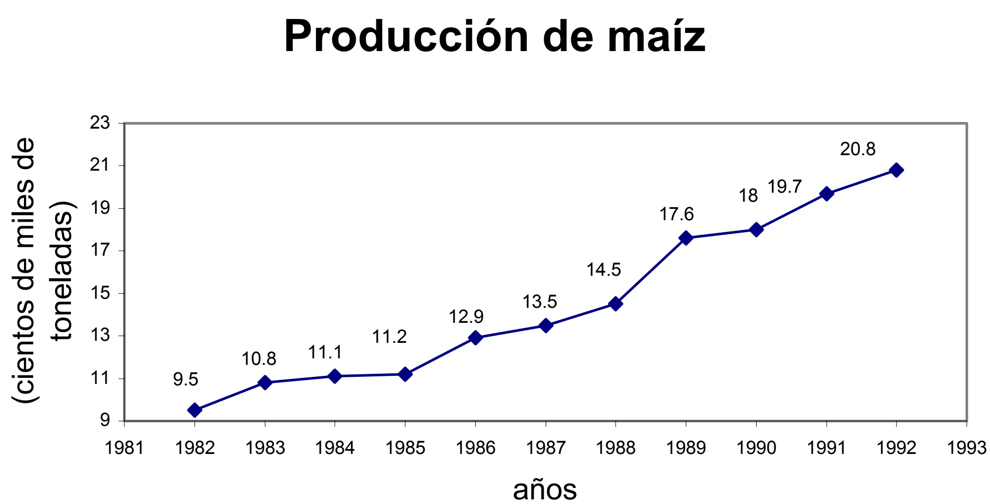



Con el estudio de este fascículo has obtenido una nueva "herramienta" matemática, que te permite dar solución a problemas de diferentes áreas para los cuales los métodos algebraicos no eran suficientes.

## ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Utiliza tus nuevos conocimientos y resuelve los siguientes problemas:

I. La producción de maíz varía con el clima, la cantidad de lluvia y los cuidados que se le tengan en su siembra. La gráfica muestra la producción de maíz en México durante los años de 1982 a 1992.




1) Elabora una tabla con los puntos de la gráfica.

2) ¿Cuál fue aproximadamente la producción promedio del maíz entre los años :

   a) 1988 y 1988 ½?
   b) 1985 y 1985 ½?

3) ¿De qué año a qué año, la producción promedio de maíz fue mayor?

4) ¿De cuánto fue?

II. El aumento de energía W(t) en kilowatt por hora que una compañía consume durante el tiempo que le permiten trabajar diariamente, esta dado por la función:

$$W(t) = -100t^2 + 240t$$

donde t está dado en horas, si dicha compañía inicia con el consumo de energía a partir de las 8:00 A.M.

1) Construye la gráfica de la función.
2) ¿A qué hora está consumiendo el máximo de energía y de cuántos kilowatts por hora es el consumo?
3) Tomando únicamente valores posibles:

    a) ¿De qué hora a qué hora trabaja diariamente la compañía? (dominio de W(t))
    b) ¿En qué intervalo de horario el consumo de energía aumenta? (crece W(t))
    c) ¿En qué intervalo de horario el consumo de energía disminuye? (decrece W(t))
    d) ¿Entre qué valores queda comprendido el consumo mínimo y el consumo máximo de energía? (rango de W(t))

III. Para supervisar una mina de Real del Monte en Pachuca (México), se anotó la producción de cobre en toneladas P para intervalos de 3 días t, los datos de la tabla muestran los valores obtenidos.

| t | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0 | 159.57 | 304.56 | 420.39 | 492.48 | 506.25 | 447.12 | 300.51 | 51.84 |

1) Traza los puntos en plano cartesiano y únelos mediante una curva.
2) Calcula las razones de cambio promedio para puntos consecutivos.
3) ¿En qué intervalo se obtuvo el promedio máximo de producción y cuál fue?

IV. Un atleta que corre en pruebas de velocidad se mueve en línea recta de acuerdo a la ecuación de movimiento:

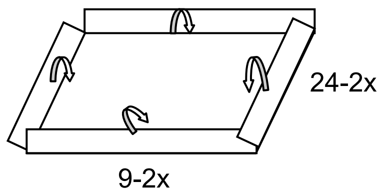
$$S = ( t^2 + 3t -2 )m$$

si para poder representar a su país en una competencia internacional, le aplican una prueba en la que a los 4 seg. de haber iniciado su recorrido desde velocidad cero, tiene que llevar una velocidad instantánea menor o igual 11.2 m/seg. ¿pasa la prueba o no ?

V. Una epidemia de cierta enfermedad para la que no hay cura azota una ciudad y los médicos estiman que las personas enfermas en un tiempo x ( medido en días desde el principio de la epidemia) está dado por la función:

$$f(x) = -x^3 + 60x^2$$

VI. ¿Cuál es la razón de propagación instantánea de la epidemia para $x = 30$ días?
Se desea construir una caja rectangular sin tapa con una pieza de estaño de 24 cm. de largo por 9 de ancho, cortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba como lo muestra la figura. Calcula las dimensiones de la caja de máximo volumen. ¿Cuál es ese volumen?



## AUTOEVALUACIÓN

Compara las respuestas que diste a las actividades de consolidación, con las respuestas correctas. Si tienes alguna duda consúltala con tu profesor o tu asesor.

I.

1)

| años x | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prod. y maíz | 9.5 | 10.3 | 11.1 | 11.3 | 12.9 | 13.5 | 14.6 | 17.6 | 18.0 | 19.7 | 20.8 |

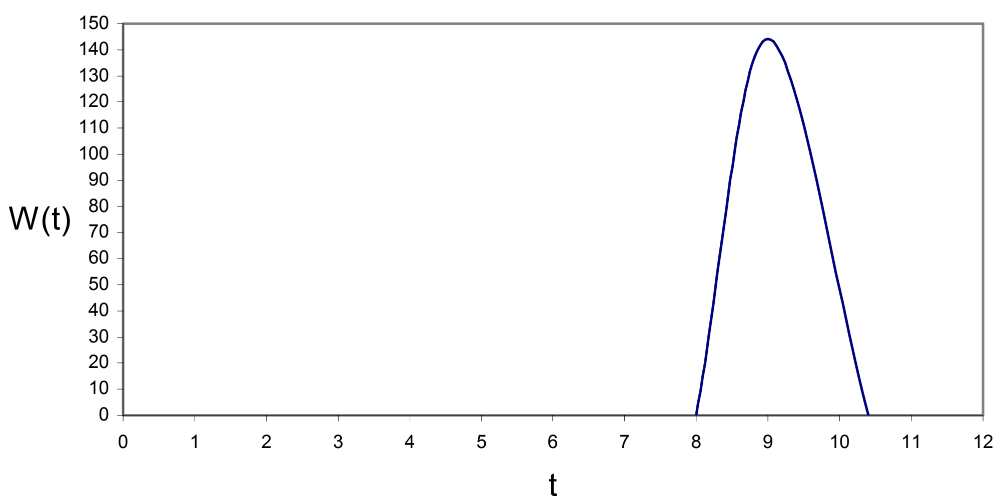
2)
 a) 2.8 (cientos de miles de toneladas)
 b) 1.4 (cientos de miles de toneladas)

3) de 1988 a 1989

4) 3 cientos de miles de toneladas.

II.

1)



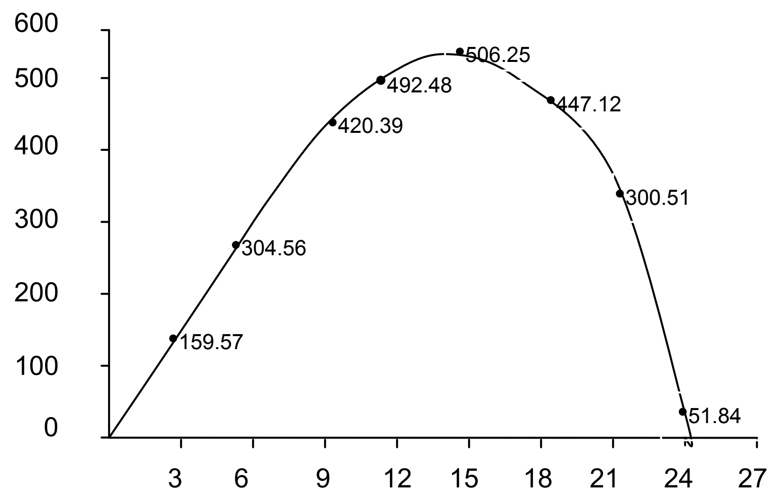
2) 9:12 hrs. y 144 watts por hora.

3)

a) 8:00 a 10:24 hrs.
b) 8:00 a 9:12 hrs.
c) 9:12 a 10:24 hrs.
d) 0 a 2.4 hrs.

III

1)




2)

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{159.57 - 0}{3 - 0} = 53.19 \qquad \text{de 0 a 3}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{304.56 - 159.57}{6 - 3} = 48.33 \qquad \text{de 3 a 6}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{420.39 - 304.56}{9 - 6} = 38.61 \qquad \text{de 9 a 12}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{492.48 - 420.39}{12 - 9} = 24.03 \text{.......de 9 a 12}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{506.25 - 492.48}{15 - 12} = 4.59 \qquad \text{de 12 a 15}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{447.12 - 506.25}{18 - 15} = 19.71 \qquad \text{de 15 a 18}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{300.51 - 447.12}{21 - 18} = 48.87 \qquad \text{de 21 a 18}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{51.84 - 300.51}{24 - 21} = 82.89 \qquad \text{de 24 a 21}$$

3) De la 0 a 3 fue 53.19 toneladas.

IV. Si la pasa, ya que a los 4 segundos lleva una velocidad V = 11 m/seg.

V. 900 personas por día.

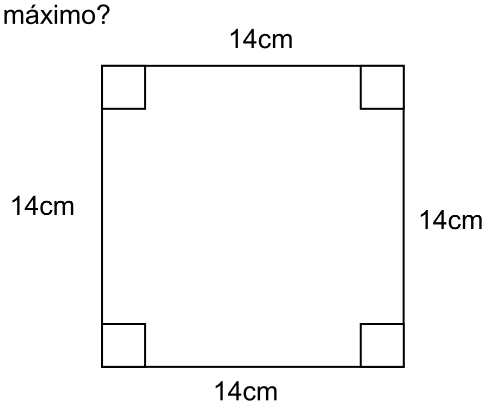
VI. Dimensiones de la caja:

20 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de profundidad, el volumen máximo es de 200 $cm^3$

# ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Para aplicar los conocimientos que adquiriste sobre Razón de cambio promedio y Razón de cambio instantánea, resuelve las cuestiones que se plantean a fin de reforzar tu aprendizaje.

I. Se construyen ceniceros con piezas de lámina que miden 14cm de lado, a las que se les cortan cuadrados en las esquinas, doblando los lados hacia arriba (ver figura). ¿Cuáles son las dimensiones de cada cenicero para que este tenga volumen máximo?




II. Se le suministra suero a un paciente, inyectándole vitamina C para combatir cierta deficiencia en la sangre. La expresión que describe esta situación es:

$$S = 0.01t^{2/3}$$

donde t esta dado en segundos. Para que tenga efecto el suero y se pueda curar el paciente, al cabo de 64 segundos se debe de estar suministrando un mínimo de 1.5 miligramos por centímetro cúbico ¿se cubre este requerimiento? ¿porqué?

a) Esboza la gráfica de esta situación y da una interpretación de la misma en términos del aumento de concentración de suero.

III. ¿Qué entiendes por Razón de cambio promedio?

IV. ¿Qué entiendes por Razón de cambio instantánea?

V. Contesta las preguntas planteadas en el cuestionamiento guía.

Si tienes alguna duda para responder a las preguntas solicita ayuda de tu profesor o asesor de Matemáticas.