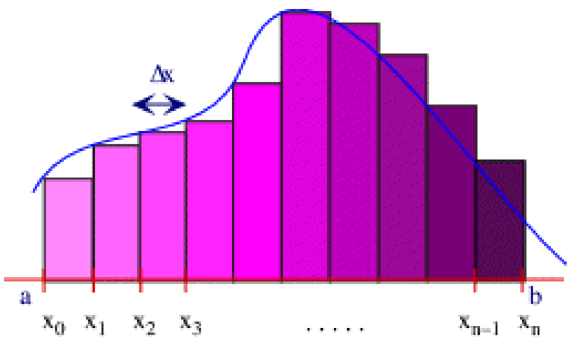
CALCULO INTEGRAL

CONCEPTOS DE AREA BAJO LA CURVA

El problema del área, el problema de la distancia tanto el valor del área debajo de la gráfica de una función como la distancia recorrida por un objeto se puede calcular aproximadamente por medio de sumas o bien exactamente como el límite de una suma.



Lo que tenemos que hacer es calcular el área bajo la curva de esta función, es necesario entenderlo por el método de construcción de rectángulos y calcular el área por cada uno y posteriormente hacer la sumatoria.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

(Se utiliza el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo)

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(Se utiliza el valor de la función en el extremo derecho de cada subintervalo)

$$\lim_{n\to\infty}[f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots + f(t_n)]\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

(Se utiliza el valor de la función en cualquier punto de cada subintervalo)

Este tipo de límites aparece en una gran variedad de situaciones incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. Teniendo en cuenta lo expresado surge la necesidad de dar un nombre y una notación a este tipo de límites.

TEOREMA 1. Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la integral definida de f de a - b, que se indica $\int_a^b f(x)\,dx$ es el número:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_{n-1})]\,\Delta x \text{ o bien}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(La función se evalúa en el extremo izquierdo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i = 1, .., n)

TEOREMA 2. Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la *integral definida de f* de *a* - *b*, que se indica $\int_a^b f(x)dx$ es el número:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(x_n)]\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(La función se evalúa en el extremo derecho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i = 1, .., n)

TEOREMA 3. Si f es una función continua sobre el intervalo [a, b], entonces la *integral definida de f* de *a* - *b*, que se indica $\int_a^b f(x)dx$ es el número:

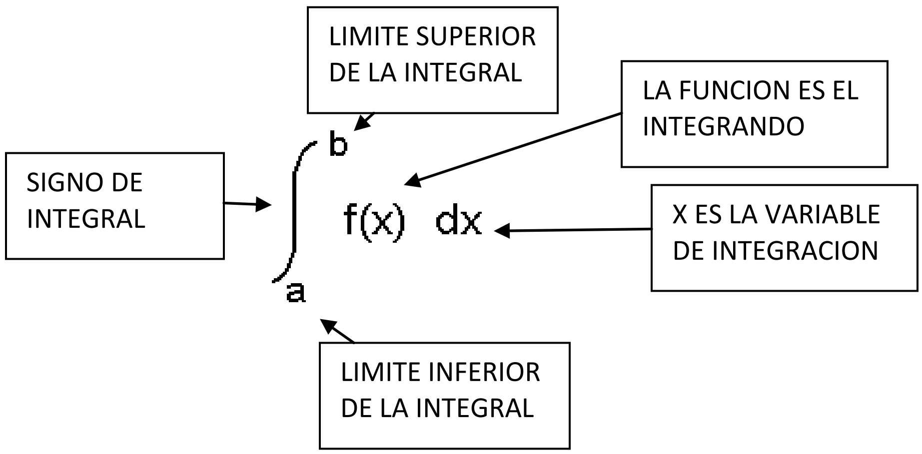
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} [f(t_1) + f(t_2) + f(t_3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(t_n)]\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

(La función se evalúa en cualquier punto t_i de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con i = 1, .., n)

El número *a* es el límite inferior de integración y el número *b* es el límite superior de integración.

Notación y terminología:



SE LEE: LA INTEGRAL DE f DE a HASTA b

Cuando se calcula el valor de la integral definida se dice que se evalúa la integral.

La continuidad asegura que los límites en las tres definiciones existen y dan el mismo valor por eso podemos asegurar que el valor de $\int_a^b f(x)dx$ es el mismo independientemente de cómo elijamos los valores de x para evaluar la función (extremo derecho, extremo izquierdo o cualquier punto en cada subintervalo). Enunciamos entonces una definición más general.

INTEGRAL DEFINIDA

Sea f una función continua definida para $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$ y además $x_0, x_1, ..., x_n$ los puntos extremos de cada subintervalo. Elegimos un punto t_i en estos subintervalos de modo tal que t_i se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1, .., n$.

Entonces *la integral definida de f* de *a - b* es el número $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

La integral definida es un número que no depende de x. Se puede utilizar cualquier letra en lugar de x sin que cambie el valor de la integral.

Aunque esta definición básicamente tiene su motivación en el problema de cálculo de áreas, se aplica para muchas otras situaciones. La definición de la integral definida es válida aún cuando f(x) tome valores negativos (es decir cuando la gráfica se encuentre debajo del eje x). Sin embargo, en este caso el número resultante no es el área entre la gráfica y el eje x.

SUMA DE REIMANN

La suma $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ que aparece en la definición de integral definida se llama suma de Riemann en honor al matemático alemán Bernahrd Riemann. Su definición incluía además subintervalos de distinta longitud.

Definición de las sumas de Riemann: Sea f una función definida en el intervalo cerrado [a, b] y sea una división (partición) arbitraria de dicho intervalo
$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le .... \le x_{n-1} \le x_n = b$ donde Δx_i indica la amplitud o longitud del i-ésimo subintervalo. Si t_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo la suma
$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ se *llama* <u>*suma de Rieman*n</u> *de f* asociada a la partición.

Si bien la integral definida había sido definida y usada con mucha anterioridad a la época de Riemann él generalizó el concepto para poder incluir una clase de funciones más amplia. En la definición de una suma de Riemann, la única restricción sobre la función f es que esté definida en el intervalo [a, b]. (Antes suponíamos que f era no negativa debido a que estábamos tratando con el área bajo una curva).

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Valor promedio de una función

Es sencillo hallar el promedio de un conjunto de números dados, sólo debemos realizar el siguiente cálculo $y_{prom} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots y_n}{n}$. ¿Cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si se puede tener numerosas lecturas de temperaturas? ¿Qué pasa si queremos hallar el promedio de un número infinito de valores? ¿Cómo calculamos el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo [1, 2]? ¿Cómo calculamos el promedio de cualquier función aunque no sea positiva? Estamos en presencia de un tipo de promedio "continuo".

Se propone calcular el valor promedio de la función $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Si t_i es un punto cualquiera del i-ésimo subintervalo, entonces el promedio aritmético o medio de los valores de la función en los c_i viene dado por: $a_n = \frac{1}{n}[f(t_1)+f(t_2)+.........+f(t_n)]$

Multiplicamos y dividimos por (b - a) y resulta:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ es una suma de Riemann para f en [a, b]. Podemos asegurar que el promedio de los n valores es $\frac{1}{b-a}$ veces la suma de Riemann de f en [a, b]. A medida que incrementamos la cantidad de subintervalos ($\Delta x \to 0$, $n \to \infty$) se obtiene, teniendo en cuenta la definición de integral definida:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

El valor promedio de f sobre el intervalo [a, b] resulta $f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

El concepto del valor promedio de una función en un intervalo es solamente uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

Teorema del valor medio para integrales

Este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto.

- Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un número c en este intervalo tal que

$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$

Demostración:

Primer caso: Si f es constante en el intervalo [a, b] el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto.

Segundo caso: Si f no es constante en [a, b] elegimos m y M como el menor y mayor valor que toma f en el intervalo. Dado que $m \le f(x) \le M \ \forall\ x \in [a, b]$ por el teorema de conservación de desigualdades. Aplicando propiedades:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \text{entonces} \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Dado que f es continua el teorema del valor intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo. Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ en algún punto c del intervalo. [a, b]. Queda demostrado que existe algún c tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

El valor de f(c) hallado según el teorema del valor medio para integrales coincide con el valor promedio o medio de una función por eso a $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se lo llama valor medio de f en el intervalo [a, b].

Ejemplo: halle el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo [1, 4].

Calcular:

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$\frac{1}{3}(64 - 16 - 1 + 1) = 16$$

Sabemos que el área de la región es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor promedio. Se puede observar gráficamente