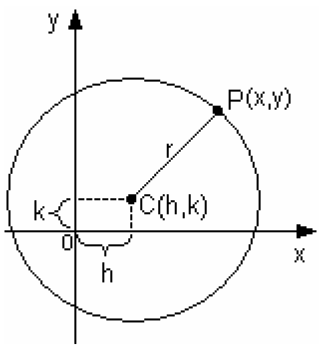
VIII. CIRCUNFERENCIA

8.1. LA CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ cualquiera, que se mueve sobre el plano x,y de tal manera que su distancia a un punto fijo $C(h,k)$ llamado centro es una constante "r" llamada radio de la circunferencia.

8.2. FORMAS ORDINARIA (CANÓNICA) Y GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

De acuerdo con la definición anterior, su interpretación analítica aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano, es:



$$PC = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r \quad \text{elevando al cuadrado}$$

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2} \quad \cdots(1)$$

La ecuación (1) es la FORMA ORDINARIA de la circunferencia y nos permite obtener con rapidez y facilidad las coordenadas del centro $C(h,k)$ y la magnitud de su radio "r", elementos suficientes para dibujar su gráfica, y viceversa, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria podrá escribirse inmediatamente.

- Esta ecuación (1) se satisface únicamente para puntos del plano cuya distancia al centro $C(h,k)$ es "r".
- Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas $C(h,k)=(0,0)$, la ecuación (1) resulta $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ $\cdots(2)$
- Desarrollando algebraicamente la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ se tiene:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

denotando $D=-2h$, $E=-2k$, $F=h^2+k^2-r^2$

Obtenemos la ecuación $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ •••(3)

Esta ecuación (3) recibe el nombre de FORMA GENERAL de la ecuación de una circunferencia.

- En la sección 7.2 se dijo que la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia si los coeficientes $A = C$ y $B = 0$, quedando la ecuación en la forma $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, esto nos hace ver que cuando los coeficientes $A = C$ no sean igual a la unidad, dividiendo la ecuación entre A se tiene:

$$\frac{Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0}{A} = \frac{0}{A}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

logrando así expresar la ecuación de la circunferencia en la forma general (3).

- Cuando se conoce la forma general de una circunferencia (3), esta puede reducirse a su forma ordinaria (1) por medio del método de completar los cuadrados en los términos en "x" y en los de "y" como se mostrará en los siguientes.

EJEMPLOS

En cada inciso, conocidas las coordenadas del centro de una circunferencia y la magnitud de su radio, se pide obtener sus ecuaciones en forma ordinaria, general y hacer un dibujo de su gráfica.

1) $C(-2,3)$; $r = 3$

Solución

Sabemos que la forma ordinaria es: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

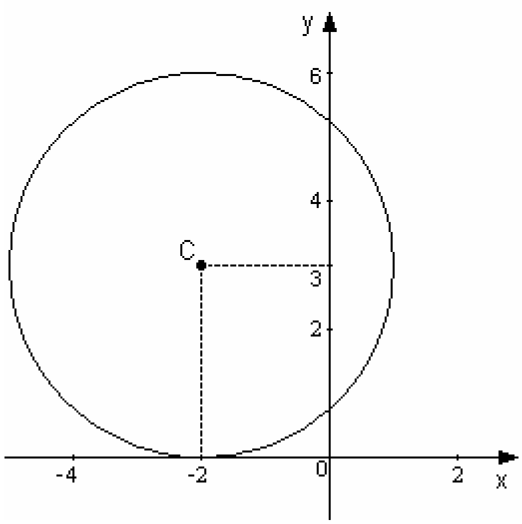
Por simple sustitución de la información dada se tiene:

$$[x-(-2)]^2 + (y-3)^2 = (3)^2$$

$$\boxed{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9} \text{ Forma ordinaria}$$

Desarrollando algebraicamente la forma ordinaria:

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$; $\boxed{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0}$ Forma general



- Una segunda forma de obtener la ecuación en la forma general puede ser la siguiente:

Si sabemos que $D = -2h = -2(-2) = 4$

$$E = -2k = -2(3) = -6$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - (3)^2 = 4$$

Sustituyendo estos valores en la forma general

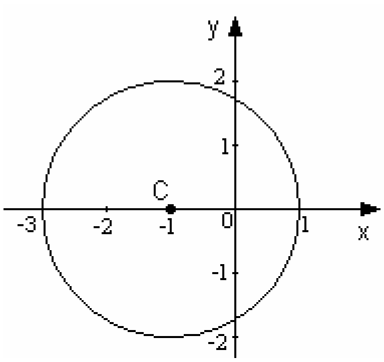
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ se tiene:

$\boxed{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0}$ Forma general.

Recordemos que $D = 4$ y $E = -6$ indican que el centro se localiza fuera del origen y $F = 4$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

2) $C(-1,0)$; $r = 2$

<u>Solución</u>



Si $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$[x-(-1)]^2 + (y-0)^2 = (2)^2$

$\boxed{(x+1)^2 + y^2 = 4}$ Forma ordinaria

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4$

$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0}$ Forma general

Como $E = 0$, el centro se localiza sobre el eje "x", $F = -3$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

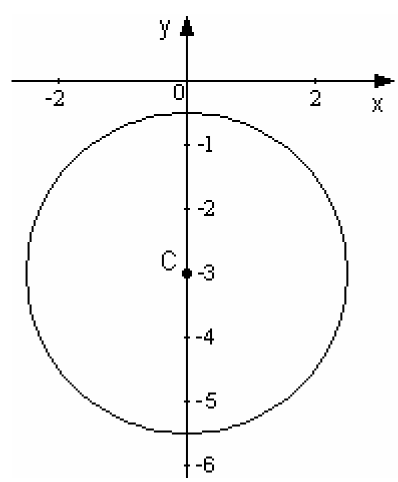
3) $C(0,-3)$; $r = \frac{5}{2}$

<u>Solución</u>

Como $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-0)^2 + [y-(-3)]^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\boxed{x^2 + (y+3)^2 = \frac{25}{4}}$ Forma ordinaria



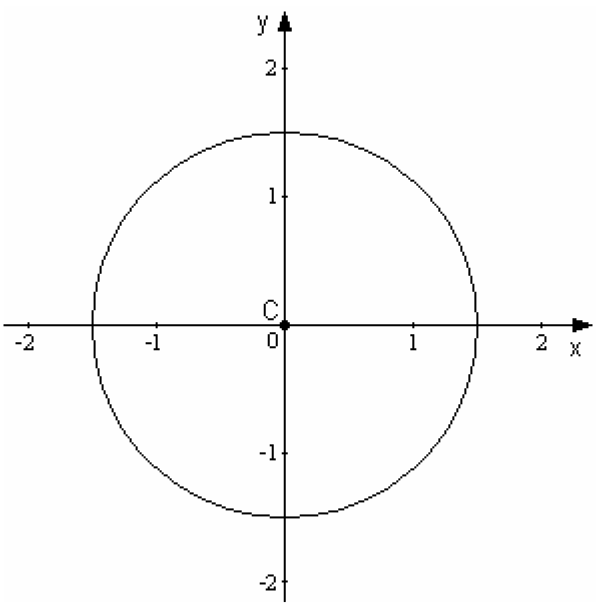
$$x^2+y^2+6y+9-\frac{25}{4}=0$$

$\boxed{4x^2+4y^2+24y+11=0}$ Forma general

$D=0$ indica que el centro se localiza sobre el eje "y", $F=11$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

4) $C(0,0)$; $r=\frac{3}{2}$

<u>Solución</u>



Como el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, su ecuación es:

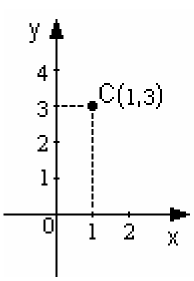
$x^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $\boxed{x^2+y^2=\frac{9}{4}}$ Forma ordinaria

$x^2+y^2-\frac{9}{4}=0$; $\boxed{4x^2+4y^2-9=0}$ Forma general

Como $D=E=0$ el centro coincide con el origen, $F=-9$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

5) $C(1,3)$; $r=0$

<u>Solución</u>



Como $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-1)^2+(y-3)^2=(0)^2$

$\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=0}$ Forma ordinaria

Esta circunferencia degenera en el punto de coordenadas $C(1,3)$, ya que no podemos trazar el radio por ser cero.

$\boxed{x^2+y^2-2x-6y+10=0}$ Forma general

En cada inciso se da la forma general de la ecuación de una circunferencia, se pide obtener el centro, el radio y graficarla.

6) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

Solución

En la ecuación dada, por medio del método de completar los cuadrados en los términos en "x" y en los de "y" se obtendrá la forma ordinaria que nos permitirá conocer con facilidad y rapidez las coordenadas del centro y la magnitud del radio y con esto poder graficarla como sigue:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6 \quad \text{ordenando términos}$$

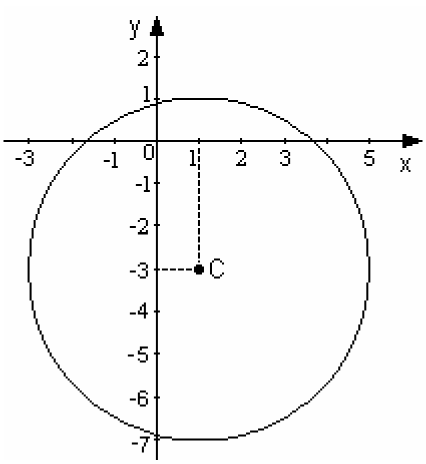
$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \quad \text{completando los cuadrados}$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 6 + 1 + 9$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16} \quad \text{Forma ordinaria}$$

Por lo tanto las coordenadas del centro son $C(1,-3)$ y la magnitud del radio es $r = \sqrt{16} = 4$

$$\boxed{r = 4}$$



Otra manera de obtener las coordenadas del centro y la magnitud del radio es la siguiente:

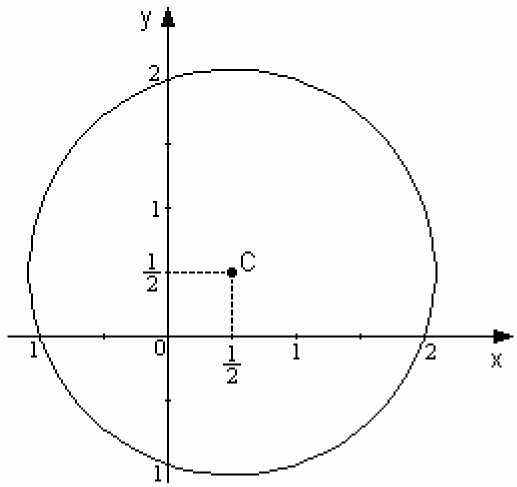
$$\left.\begin{aligned} &\text{Si } D = -2h \ ; \ -2 = -2h \ ; \ h = \frac{-2}{-2} = 1 \\ &E = -2k \ ; \ 6 = -2k \ ; \ k = \frac{6}{-2} = -3 \end{aligned}\right\} \ C(1,-3)$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \ ; \ -6 = (1)^2 + (-3)^2 - r^2 \ ; \ r^2 = 1 + 9 + 6$$

$$r^2 = 16 \ ; \ r = \sqrt{16} = 4 \ ; \ \boxed{r = 4}$$

7) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$

Solución



En este caso, lo primero es conseguir que los coeficientes de x^2 y de y^2 sean la unidad, para esto, se divide la ecuación dada entre 2 como sigue:

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 4}{2} = \frac{0}{2}$$

$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$ ordenando términos

$x^2 - x + y^2 - y = 2$; completando cuadrados:

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

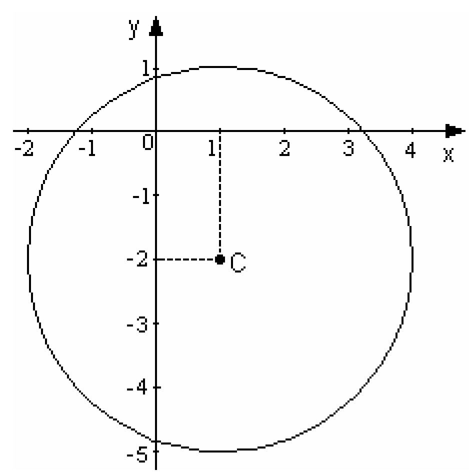
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad ; \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

$\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}}$ Forma ordinaria

$$\boxed{C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \; ; \; \boxed{r = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.6}$$

8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Solución



Ordenando y completando cuadrados como sigue:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4$$

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

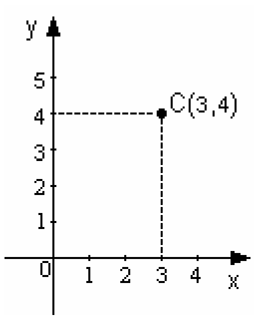
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 + 1 + 4$$

$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9}$ Forma ordinaria

$\boxed{C(1,-2)}$; $r = \sqrt{9} = 3$; $\boxed{r = 3}$

9) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = -25$

Solución



$x^2 - 6x + y^2 - 8y = -25$ completando cuadrados

$$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -25 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

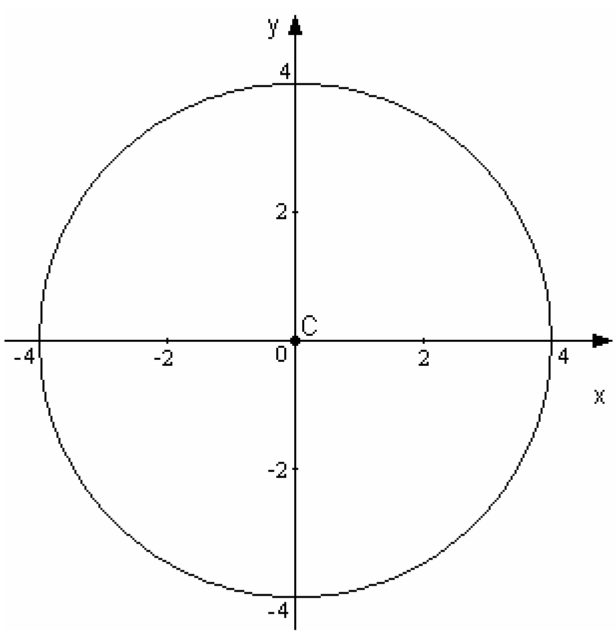
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = -25 + 9 + 16$$

$\boxed{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0}$ Forma ordinaria

$$\boxed{C(3,4)} \; ; \; \boxed{r = 0}$$

10) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solución



En este caso, la ecuación dada prácticamente esta en las dos formas (ordinaria y general), ya que $x^2 + y^2 = 16$ es la forma ordinaria, donde las coordenadas del centro son $C(0,0)$ y la magnitud del radio $r = \sqrt{16} = 4$; $r = 4$

EJERCICIOS

En cada inciso, se conocen las coordenadas del centro de una circunferencia y la magnitud de su radio, obtenga sus ecuaciones en forma ordinaria, en forma general y dibuje su gráfica.

1) $C(3,-2)$; $r = 5$
2) $C(0,-1)$; $r = 3$
3) $C(-3,0)$; $r = 1$

4) $C(4,1)$; $r=0$
5) $C(0,0)$; $r=\sqrt{5}$

En los siguientes incisos se da la forma general de la ecuación de una circunferencia, obtenga las coordenadas del centro, la magnitud del radio y dibujar su gráfica.

6) $-3x^2-3y^2+3x+6=0$
7) $x^2+y^2+5y-1=0$
8) $7x^2+7y^2-14x-35y-21=0$
9) $x^2+y^2-36=0$
10) $2x^2+2y^2-8x-28y+106=0$

8.3. CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES DADAS

La ecuación en forma ordinaria de una circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, contiene tres parámetros h,k y r que en cada caso pueden tener valores diferentes. De la misma manera, la forma general de la ecuación de una circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, contiene también tres parámetros D,E y F que pueden ser diferentes, y que como se verá en ambos casos, puede obtenerse su valor a partir de TRES CONDICIONES dadas e independientes.

Se mostrará a continuación la forma en que se pueden tratar problemas en los que se dan 3 condiciones y se pide obtener la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLOS

Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$.

Solución

Este problema lo vamos a resolver de tres maneras diferentes:

1) Si los puntos A,B y C están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Sustituyendo $A(1,-1)$: $(1)^2+(-1)^2+D(1)+E(-1)+F=0$

$$1+1+D-E+F=0$$
$$D-E+F=-2 \quad \cdots(1)$$

Sustituyendo $B(5,3)$: $(5)^2 + (3)^2 + D(5) + E(3) + F = 0$

$$25 + 9 + 5D + 3E + F = 0$$
$$5D + 3E + F = -34 \quad \cdots (2)$$

Sustituyendo $C(-3,5)$: $(-3)^2 + (5)^2 + D(-3) + E(5) + F = 0$

$$9 + 25 - 3D + 5E + F = 0$$
$$-3D + 5E + F = -34 \quad \cdots (3)$$

Ahora, se resuelven como un sistema de ecuaciones simultáneas las ecuaciones (1), (2) y (3) para obtener los valores de los parámetros D, E y F :

$$\begin{cases} D - E + F = -2 & \cdots (1) \\ 5D + 3E + F = -34 & \cdots (2) \\ -3D + 5E + F = -34 & \cdots (3) \end{cases}$$

Se recomienda que en la solución de este sistema de ecuaciones se aplique el método que mejor conozca y domine el estudiante, en este caso, se resolverá aplicando el método de CRAMER, en donde el valor de las incógnitas, está dado por:

$$D = \frac{\Delta_D}{\Delta}\ ,\ E = \frac{\Delta_E}{\Delta}\ ,\ F = \frac{\Delta_F}{\Delta}$$

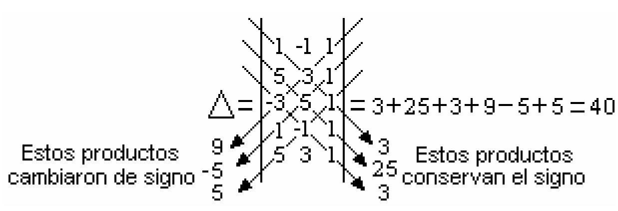
Iniciando con el cálculo del determinante del sistema "Δ" que se forma con los coeficientes de las incógnitas del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Si el valor de este determinante es cero, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si es distinto de cero, se tendrá solución única en el sistema de ecuaciones.

De la misma manera, para resolver determinantes de tercer orden (3 renglones y 3 columnas), por su facilidad de aplicación, se recomienda el MÉTODO DE SARRUZ (que sólo es aplicable para determinantes de tercer orden) como sigue:

El arreglo se forma repitiendo los 2 primeros renglones y se efectúan productos como indican las flechas:



Como el determinante del sistema $\Delta = 40$, es distinto de cero, se continúa la solución del sistema calculando cada incógnita como se muestra:

$D = \dfrac{\Delta_D}{\Delta}$; Δ_D es el determinante que resulta de suprimir del sistema la columna de los coeficientes de las "D" y en su lugar se coloca la columna de los términos independientes tal y como están en el segundo miembro, esto es:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \\ -34 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolviéndolo de la misma manera que el determinante del sistema Δ:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \\ -34 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 170 + 34 + 102 + 10 - 34 = -64$$

Por lo tanto $D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{-64}{40}$; $\boxed{D = -\frac{8}{5}}$

$E = \frac{\Delta_E}{\Delta}$; Δ_E es el determinante que resulta de suprimir del sistema la columna de los coeficientes de las "E" y en su lugar se coloca la columna de los términos independientes:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \\ -3 & -34 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolviendo de la misma manera que los anteriores:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \\ -3 & -34 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \end{vmatrix} = -34 - 170 + 6 - 102 + 34 + 10 = -256$$

Por lo tanto $E = \frac{\Delta_E}{\Delta} = \frac{-256}{40}$; $\boxed{E = -\frac{32}{5}}$

El valor de la incógnita "F" se puede calcular como las anteriores D y E, o bien si se prefiere, sustituyendo los valores de D y E en cualquiera de las 3 ecuaciones del sistema, en este caso, en la ecuación (1) se tiene:

$$D - E + F = -2 \quad \cdots (1)$$

$\left(-\frac{8}{5}\right) - \left(-\frac{32}{5}\right) + F = -2$, despejando F:

$$F=-2+\frac{8}{5}-\frac{32}{5}=\frac{-10+8-32}{5}=-\frac{34}{5} \quad ; \quad \boxed{F=-\frac{34}{5}}$$

Sustituyendo $D=-\frac{8}{5}$, $E=-\frac{32}{5}$ y $F=-\frac{34}{5}$ en la ecuación general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$:

$$x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{4}=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-8x-32y-34=0}$$

Es la ecuación en forma general de la circunferencia que pasa por los 3 puntos dados A,B y C.

Si se transforma esta ecuación a la forma ordinaria, primero la dividimos entre 5:

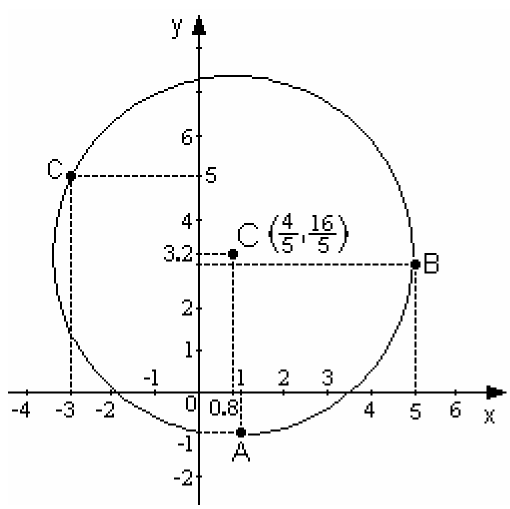
$$\frac{5x^2+5y^2-8x-32y-34}{5}=\frac{0}{5} \quad ; \quad x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{4}=0$$

ordenando y completando cuadrados: $x^2-\frac{8}{5}x+\left(\frac{8}{10}\right)^2+y^2-\frac{32}{5}y+\left(\frac{32}{10}\right)^2=\frac{34}{5}+\left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{32}{10}\right)^2$

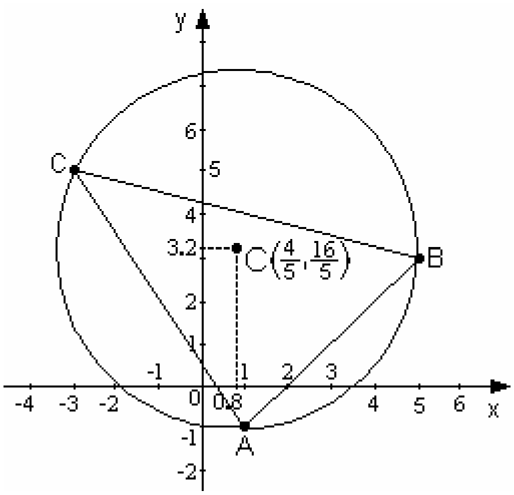
$$\left(x-\frac{8}{10}\right)^2+\left(y-\frac{32}{10}\right)^2=\frac{680+64+1024}{100}$$

$$\boxed{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{16}{5}\right)^2=\frac{442}{25}}$$

Es la ecuación en forma ordinaria de la circunferencia que pasa por los 3 puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$, $C(-3,5)$ y cuyo centro es $C\left(\frac{4}{5},\frac{16}{5}\right)$ y de radio $r=\sqrt{\frac{442}{25}}$



2) Uniendo los puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$ se forma un triángulo, se obtiene la ecuación de las mediatrices de dos de sus lados:



- <u>Ecuación de la mediatriz del lado AB</u> el punto medio tiene coordenadas $M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$M_{AB}\left(\frac{1+5}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(3,1)$ la pendiente de la mediatriz es recíproca y de signo contrario a la pendiente del lado AB, o sea:

Si $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3+1}{5-1}=\frac{4}{4}=1$, entonces la pendiente de la mediatriz es $m=-1$, con el punto $M_{AB}(3,1)$ y la pendiente de la mediatriz calculamos su ecuación: $y-y_M=m(x-x_M)$; $y-1=-1(x-3)$; $y=-x+3+1$

$$\boxed{y=-x+4} \quad \cdots(1)$$

- <u>Ecuación de la mediatriz del lado AC</u>

De la misma manera, se tiene: $M_{AC}\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1-3}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=(-1,2)$;

$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{5+1}{-3-1}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$, por lo tanto, $m=\frac{2}{3}$; $y-2=\frac{2}{3}(x+1)$; $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+2$

$$\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} \quad \cdots(2)$$

Resolviendo como un sistema de ecuaciones simultáneas las ecuaciones (1) y (2), se obtendrán las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los 3 puntos A,B y C (el circuncentro) como sigue:

Por el método de igualación:

$$y=-x+4 \quad \cdots(1)$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \quad \cdots(2)$$

$$-x+4=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\ ;\ 4-\frac{8}{3}=\frac{2}{3}x+x\ ;\ \frac{12-8}{\cancel{3}}=\frac{2x+3x}{\cancel{3}}\ ;\ 12-8=2x+3x\ ;\ 4=5x\ ;\ \boxed{x=\frac{4}{5}}$$

Sustituyendo $x=\frac{4}{5}$ en cualesquiera de las ecuaciones (1) ó (2), digamos en la (1):

$$y=-\left(\frac{4}{5}\right)+4=\frac{-4+20}{5}\ ;\ \boxed{y=\frac{16}{5}}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia son $\left(\frac{4}{5},\frac{16}{5}\right)$. La magnitud del radio "r" se obtiene calculando la distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos A,B ó C, digamos:

$$r=CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{21}{5}\right)^2}\ ;\ \boxed{r=\sqrt{\frac{442}{25}}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos A,B y C es:

$$\boxed{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{16}{5}\right)^2=\frac{442}{25}}$$

3) Se sabe que la ecuación de una circunferencia que pasa por 3 puntos no colineales $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ y $C(x_C,y_C)$ está dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$$

En nuestro problema, $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$, el arreglo del determinante es:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (1)^2+(-1)^2 & 1 & -1 & 1 \\ (5)^2+(3)^2 & 5 & 3 & 1 \\ (-3)^2+(5)^2 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 34 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{array}{c} \\ + \\ - \\ + \\ - \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 34 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Para resolver este determinante de orden 4 (4 renglones y 4 columnas), se propone el método de MENORES Y COFACTORES que consiste primero, en asignarle signos a los renglones y a las columnas iniciando de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo alternando los signos, iniciando con positivo, luego negativo y así sucesivamente como se muestra, a continuación se elige cualquier renglón o columna, por ejemplo el primer renglón, tomando el primer elemento (x^2+y^2) y asignándole el signo que resulta de multiplicar los signos del renglón y la columna a la que pertenece $(+)(+)=(+)$, a continuación, se elimina su renglón y su columna al que pertenece y se multiplica este factor $\left(x^2+y^2\right)$ por el menor determinante que queda al eliminar renglón y columna del factor correspondiente, o sea:

$$\left(x^2+y^2\right)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left(x^2+y^2\right)(3+25+3+9-5+5) = \left(x^2+y^2\right)(40) = 40x^2+40y^2 \cdots (1)$$

Procediendo de la misma manera con el factor que sigue (x) del renglón elegido, su signo es $(+)(-)=(-)$ y su menor determinante es:

$$(-x)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 34 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-x)(6+170-34-102-10+34) = (-x)(64) = -64x \cdots (2)$$

El siguiente factor es (y), su signo resulta $(+)(+)=(+)$ y su menor determinante es:

$$(y)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 34 & 5 & 1 \\ 34 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (y)(10-102+34-170+6-34) = (y)(-256) = -256y \cdots (3)$$

El último factor del renglón elegido es (1), su signo es $(+)(-)=(-)$ y su menor determinante es:

$$(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 34 & 5 & 3 \\ 34 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(50+102+102+170+18-170) = (-1)(272) = -272 \cdots (4)$$

Sumando los resultados (1), (2), (3) y (4) e igualando a cero se tiene: $40x^2+40y^2-64x-256y-272=0$

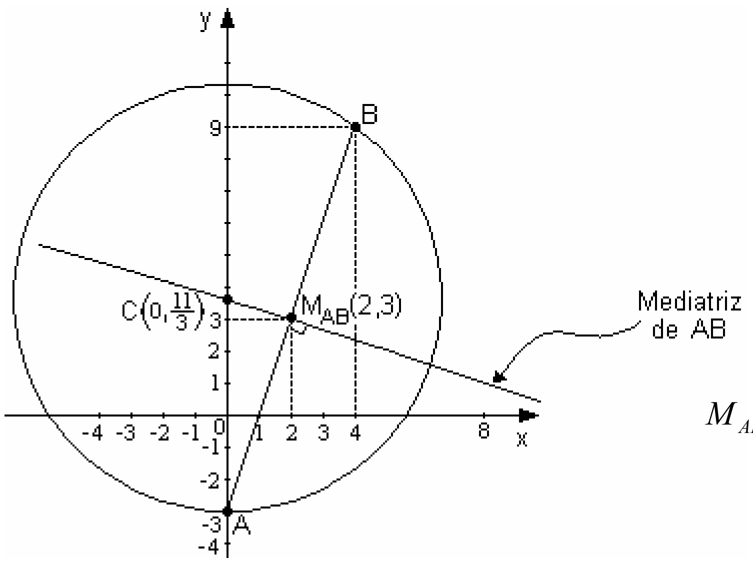
Dividiendo toda la ecuación entre 40, se obtiene la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C dados no colineales:

$$\frac{40x^2+40y^2-64x-256y-272}{40} = \frac{0}{40}$$

$$\boxed{x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{5}=0}$$

4) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-3)$ y $B(4,9)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "y".

Solución



Si la circunferencia pasa por los puntos A y B, la recta que une estos dos puntos es una recta secante de la circunferencia, por lo tanto, el centro se localizará sobre la mediatriz de la secante AB esto es:

Punto medio de AB:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{-3+9}{2}\right) = (2,3)$$

Pendiente de AB:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3-9}{0-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

La pendiente de la mediatriz de AB: $m = -\frac{1}{3}$

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$y - y_M = m(x - x_M) \ ; \ y - 3 = -\frac{1}{3}(x-2) \ ; \ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 3 \ ; \ \boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}} \ \cdots(1)$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas formado por la ecuación de la mediatriz (1) y la ecuación del eje "y" $(x = 0)$ como sigue:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} & \cdots(1) \\ x = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (1): $y = \frac{11}{3}$, por lo tanto $C\left(0, \frac{11}{3}\right)$

Calculando la distancia CA o CB se obtiene la magnitud del radio $r = CA = CB$

$$r = CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(-3 - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{20}{3}$$

$$\boxed{r = \frac{20}{3}}$$

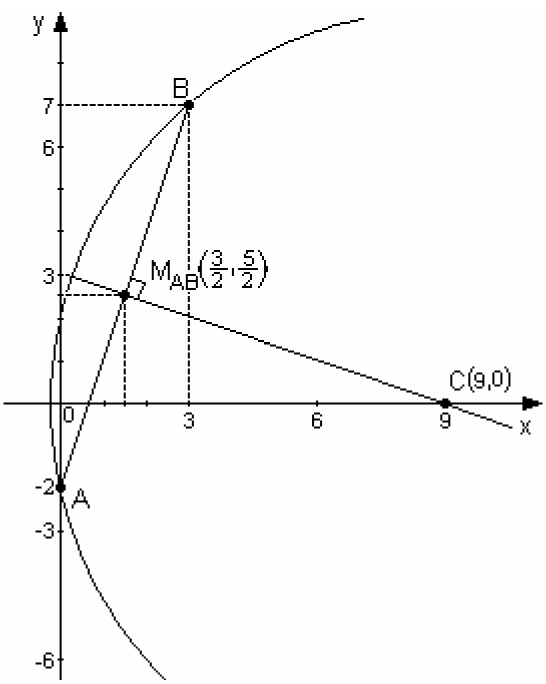
La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A y B y con centro sobre el eje "y" es:

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\left(\frac{20}{3}\right)^2$$

$$\boxed{x^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{400}{9}}$$

5) Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-2)$ y $B(3,7)$ cuyo centro se localiza sobre el eje "x".

Solución



Punto medio de AB:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+3}{2},\frac{-2-7}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Pendiente de AB:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-2-7}{0-3}=\frac{-9}{-3}=3$$

Pendiente de la mediatriz de AB: $m=-\frac{1}{3}$

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+3}\ \cdots(1)$$

Coordenadas del centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+3 \ \cdots(1) \\ y=0 \end{cases}$$

Sustituyendo $y=0$ en (1): $x=9$; $C(9,0)$

La magnitud del radio $r=CA=\sqrt{(0-9)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{81+4}$; $\boxed{r=\sqrt{85}}$

La ecuación de la circunferencia que pasa por A y B, con centro sobre el eje "x" es:

$$(x-9)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{85}\right)^2 \ ; \ \boxed{(x-9)^2+y^2=85}$$

EJERCICIOS

En los incisos 1-3 encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos $A(0,0)$, $B(-3,-6)$, $C(-7,0)$ aplicando el método que se indica:

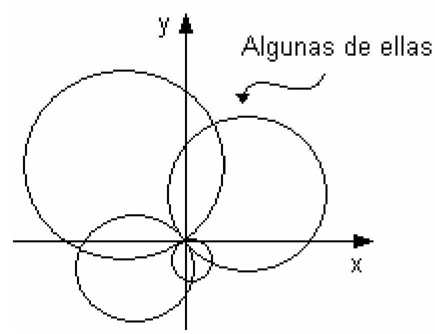
1) Resuelva con el método del ejemplo **1)**
2) Aplique el método del ejemplo **2)**
3) Aplicando el método del ejemplo **3)**
4) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B(4,-9)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "y".
5) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,2)$ y $B(3,-7)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "x".

8.4. FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

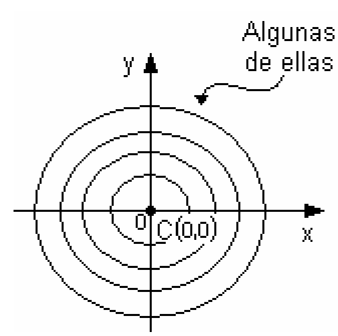
El principio básico de las familias de curvas, consiste en que estas cumplan con ciertas condiciones dadas. En el caso de las circunferencias se tienen familias de uno, dos y tres parámetros, pudiendo obtener la ecuación de cualquier circunferencia de la familia asignando simplemente un valor particular a cada parámetro según el caso.

EJEMPLOS

1) La ecuación en forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ contiene 3 parámetros D, E y F y representa la familia formada por todas las circunferencias del plano x, y, en donde D, E y F pueden tomar cualquier valor real o sea $D, E, F \in \mathbb{R}$.

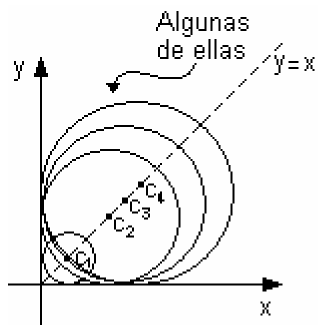


2) La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ contiene 2 parámetros D y E que pueden tomar cualquier valor real y representa la familia formada por todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (con todos los radios posibles).

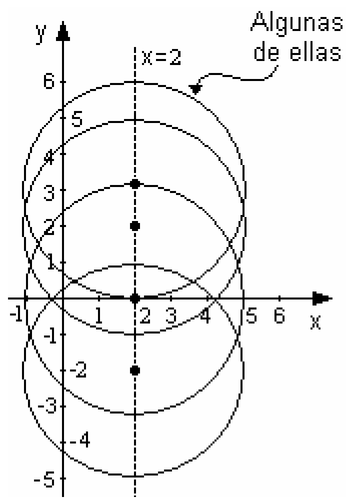


3) La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ contiene un parámetro $r > 0$ y representa una familia de circunferencias concéntricas (con el mismo centro) que es el origen de coordenadas $C(0,0)$ y con todos los radios posibles.

4) La ecuación $(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$ contiene un parámetro $h>0$ y representa una familia de circunferencias tangentes a los ejes coordenados y que tienen su centro $C(h,h)$ sobre la recta $y=x$, a este tipo de circunferencias se les llama coaxiales ya que todos sus centros son colineales.



5) La ecuación $(x-2)^2+(y-k)^2=9$ contiene un parámetro $k\in\mathbb{R}$ y representa la familia de circunferencias cuyos centros se localizan sobre la recta $x=2$ y todas de radio $r=3$.



EJERCICIOS

En cada inciso diga que condiciones cumplen todas las circunferencias de la familia, cuántos parámetros contiene y haga un dibujo de algunas de ellas.

1) $(x\pm r)^2+y^2=r^2$; $r>0$
2) $(x-h)^2+(y-1)^2=25$; $h\in\mathbb{R}$
3) $(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$; $h\in\mathbb{R}, r>0$
4) $x^2+y^2+Dx+Dy=0$; $D\in\mathbb{R}$
5) $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$; $r>0$