ASÍNTOTAS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función elemental puede presentar ninguna una o varias asíntotas verticales y además puede presentar a lo sumo una asíntota horizontal o una asíntota oblicua, pero nunca de los dos tipos a la vez. Si hablásemos de funciones definidas a trozos todo lo anterior deja de ser cierto y cualquier casuística es posible. Pero este no es el caso, en adelante sólo hablaremos de funciones elementales.

<u>Definición 1:</u> Se dice que la grafica de f(x) presenta una asíntota vertical de ecuación x = a cuando $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Es decir, cuando al menos uno de los límites laterales de f(x), cuando x tiende a "a" no es finito.

Nótese que es imprescindible estudiar los dos límites laterales, cundo existan, para saber con exactitud como son las ramas asintóticas de la gráfica de f(x).

Nótese también que si el punto "a" pertenece al dominio de f(x) entonces f(x) es continua en dicho punto por tratarse de una función elemental, (recordemos que dichas funciones elementales son continuas en todo su dominio) y por ello esos límites laterales coinciden en un número finito, que justamente es f(a), no pudiendo ser por tanto infinitos y no dando lugar a asíntota vertical alguna.

<u>Conclusión 1:</u> Si una función elemental tiene asíntota vertical, esta sólo puede estar en aquellos puntos que no formen parte del dominio de f(x), pero que verifiquen que dicha función está definida en sus proximidades.

<u>Consecuencia 1:</u> La gráfica de cualquier función polinómica carece de asíntotas verticales pues su dominio es $x \in \mathbb{R}$ (todo $\mathbb{R}$).

Análogamente cualquier gráfica de función elemental cuyo dominio sea $x \in \mathbb{R}$ (todo $\mathbb{R}$) carece de asíntotas verticales.

<u>Ejemplo 1:</u> Las gráficas de las funciones del tipo f(x) = $\frac{x}{x^2+1}$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, $h(x) = \sqrt[5]{2x-4}$ o i(x) = log (x^2+1), ya que su dominio es $x \in \mathbb{R}$ (todo $\mathbb{R}$).

<u>Consecuencia 2:</u> Así mismo cualquier gráfica de función elemental cuyo dominio sea un intervalo cerrado o una semirrecta cerrada por su extremo finito, tampoco presenta asíntota vertical alguna pues presenta continuidad lateralmente por la derecha o la izquierda de los extremos finitos de su intervalo de definición respectivamente.

<u>Ejemplo 2:</u> Las graficas de las funciones del tipo f(x) = $\sqrt{x+1}$, g (x) = $\sqrt{9-x^2}$, tampoco presentan asíntotas verticales porque sus dominios son respectivamente: $x \in [-1,+\infty)$, y $x \in [-3,3]$. Debido a que f(x) es continua lateralmente por la derecha de -1 y g(x) es continua lateralmente por la derecha de -3 y por la izquierda de 3 respectivamente.

<u>Ejemplo 3</u>: Estudiemos las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-3x}$.

En primer lugar diremos que su dominio es $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, luego si presenta alguna asíntota, únicamente puede ser en x = 0 ó en x = 3.

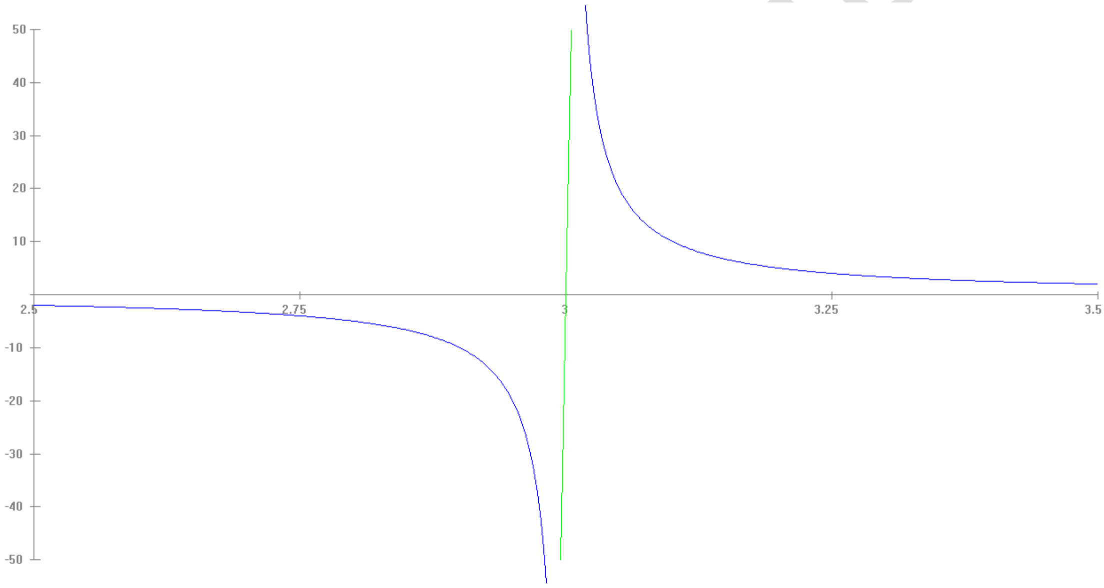
En x = 0:

Como $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2-3x} = \frac{0}{0} = Indeterminado.$ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2-3x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}$, el límite existe, por tanto carece de asíntota vertical en x = 0. De hecho presenta una discontinuidad evitable en x = 0.

En x = 3:

Como $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-3x} = \frac{3}{0} = Indeterminado\ y \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} \frac{x}{x^2-3x} = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x^2-3x} = +\infty \end{cases}$, **presenta asíntota vertical de ecuación x = 3.**

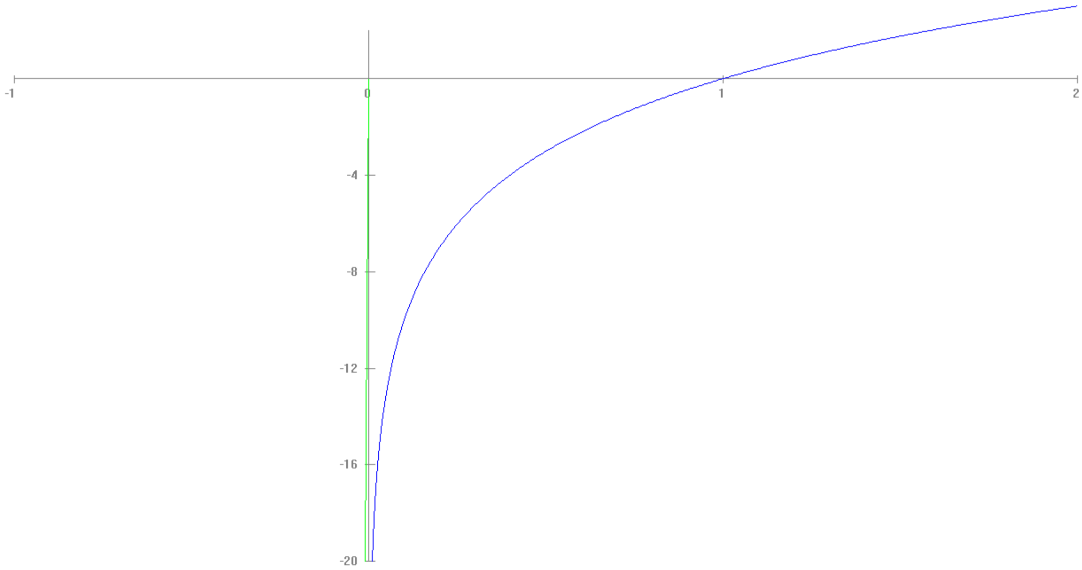
De esta forma la gráfica de f(x) puede verse en las proximidades de x = 3 de la siguiente forma:



<u>Ejemplo 4:</u> Estudiemos las asíntotas de la gráfica de f(x) = log x.

En primer lugar estudiamos el dominio de f(x) = log x, que es $x \in (0, +\infty)$ con lo cual sólo es posible la presencia de asíntota vertical en x = 0, y sólo lo estudiaremos por el lado derecho, ya que por el izquierdo ni siquiera la función está definida.

Como $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$, la gráfica de f(x) = log x, presenta asíntota vertical de ecuación x = 0. Y su gráfica en las proximidades de x = 0 por el lado derecho queda de la siguiente forma:



A continuación hacemos el estudio de las asíntotas oblicuas y horizontales conjuntamente, puesto que son incompatibles la presencia de los dos tipos simultáneamente.

Definición 2: Se dice que la grafica de f(x) presenta una asíntota de ecuación y = mx + n cuando existen m = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ y son finitos.

Concretamente si m $\neq$ 0 la asíntota es oblicua de ecuación y = mx + n, pero si m = 0 la asíntota es horizontal de ecuación y = n.

Nótese que el limite se define simultáneamente cuando $x \to \pm\infty$, pero cuando se sospeche que ambos límites pueden dar diferente, se harán por separado.

Consecuencia 3: Cualquier función racional cuyo numerador tenga igual o menor grado que su denominador, tiene una gráfica que presenta asíntota horizontal. Así mismo, cualquier función racional cuyo numerador tenga exactamente un grado más que su denominador, tiene una gráfica que presenta asíntota oblicua. Y por último, si el grado del numerador de la función racional es al menos dos unidades mayor que el grado de su denominador, entonces su gráfica ni presenta asíntota horizontal ni oblicua.

Ejemplo 5: Estudiemos las posibles asíntotas horizontales y oblicuas de la gráfica de $f(x) = \frac{x}{x^2-3x}$.

m = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2-3x}}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-3x^2}$ = $\frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

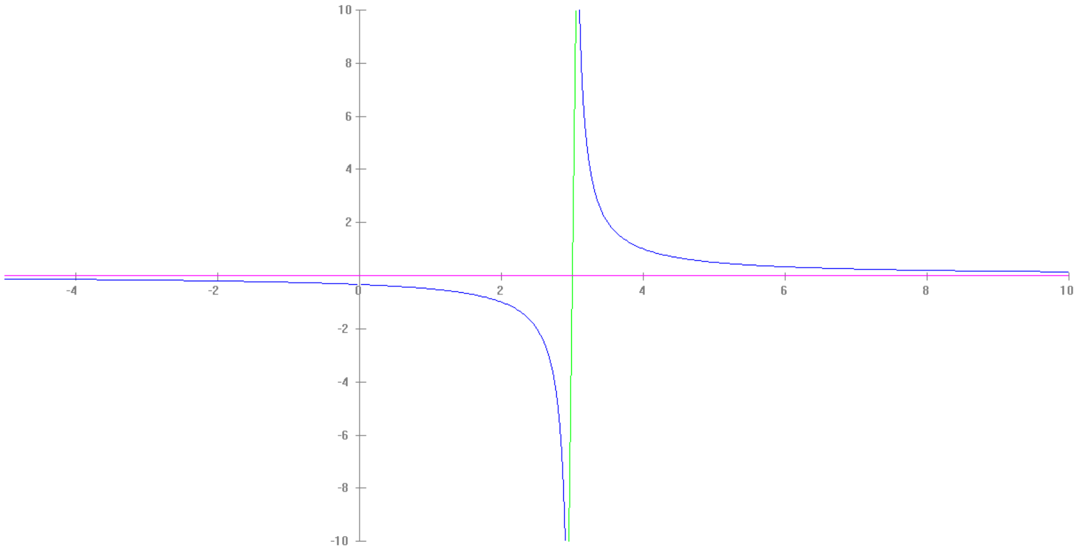
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

n = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x^2-3x} - 0\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Por tanto la gráfica de f(x) = $\frac{x}{x^2-3x}$ presenta asíntota horizontal (ya que m = 0) de ecuación y = 0·x + 0, es decir de ecuación y = 0.

La gráfica de f(x) = $\frac{x}{x^2-3x}$ presenta A.V. de ecuación x = 3 y A.H. de ecuación y = 0 como puede verse a continuación:



Ejemplo 6: Estudiemos las posibles asíntotas horizontales y oblicuas de la gráfica de $f(x) = \frac{5x^2}{x^2-3x}$.

m = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2-3x}}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^3-3x^2}$ = $\frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

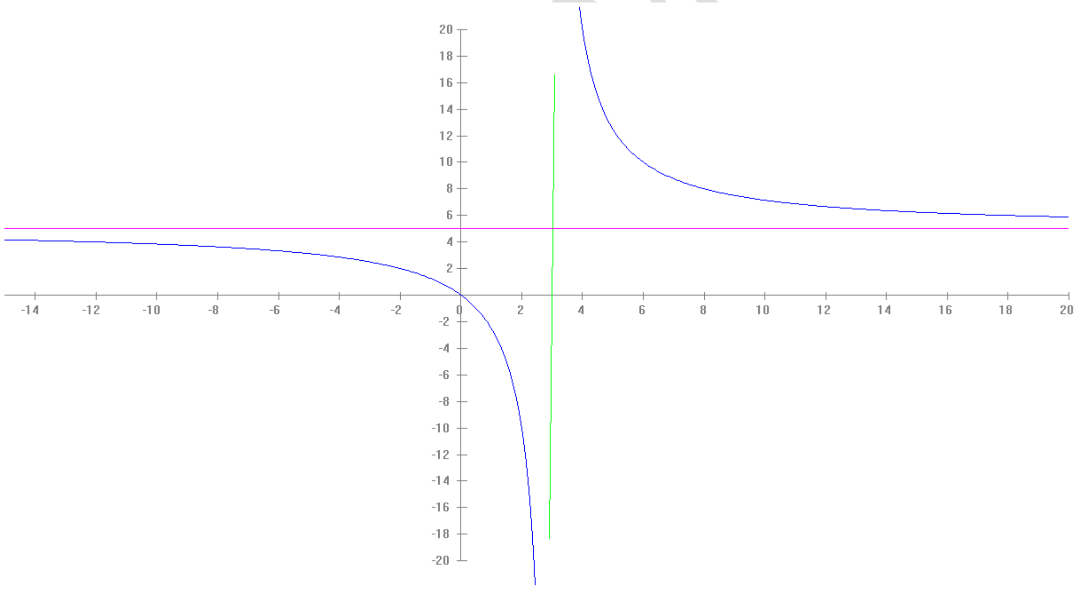
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{\pm\infty} = 0.$$

n = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2-3x} - 0\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^2-3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 5 = 5.$$

Por tanto la gráfica de f(x) = $\frac{5x^2}{x^2-3x}$. presenta asíntota horizontal (ya que m = 0) de ecuación y = 0·x + 5, es decir de ecuación y = 5.

La gráfica de f(x) = $\frac{5x^2}{x^2-3x}$. presenta A.V. de ecuación x = 3 y A.H. de ecuación y = 5 como puede verse a continuación:



Ejemplo 7: Estudiemos las posibles asíntotas horizontales y oblicuas de la gráfica de $f(x) = \frac{4x^3}{x^2-3x}$.

m = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^2-3x}}{x}$ = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{x^3-3x^2}$ = $\frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

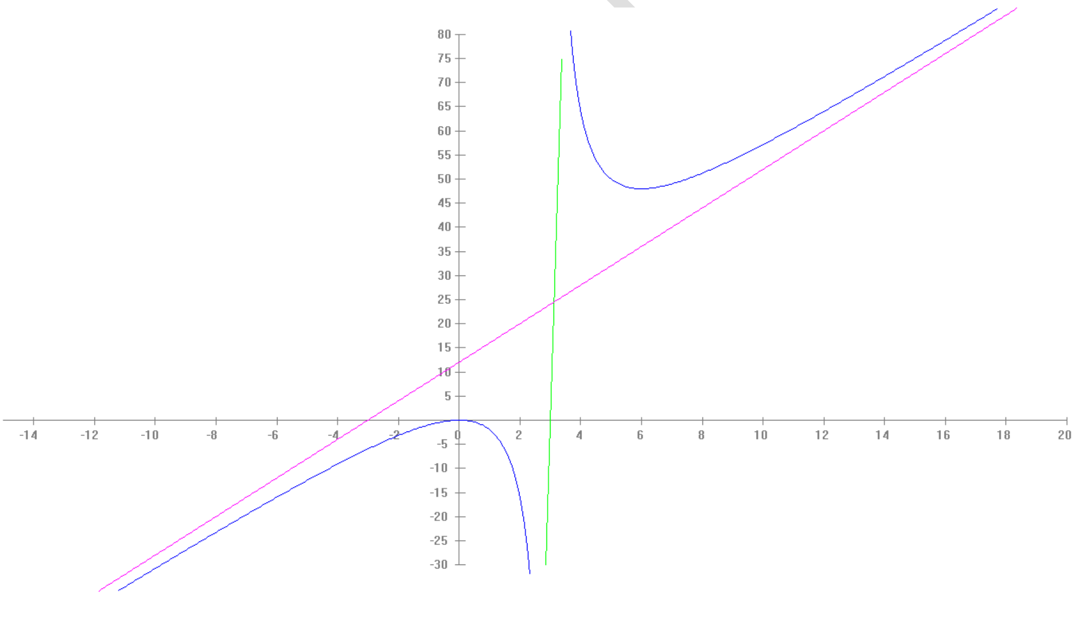
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} 4 = 4.$$

n = $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^3}{x^2-3x} - 4\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^2}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^2}{x^2-3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 12 = 12.$$

Por tanto la gráfica de f(x) = $\frac{5x^2}{x^2-3x}$. presenta asíntota oblicua (ya que m $\neq$ 0) de ecuación y = 4·x + 12, es decir de ecuación y = 4x + 12.

La gráfica de f(x) = $\frac{4x^3}{x^2-3x}$. presenta A.V. de ecuación x = 3 y A.O. de ecuación y = 4x + 12 como puede verse a continuación:



Ejemplo 8: Estudiemos las posibles asíntotas horizontales y oblicuas de la gráfica de $f(x) = \frac{4x^4}{x^2-3x}$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4x^4}{x^2-3x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^4}{x^3-3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminado$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^4}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^4}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} 4x = \pm\infty.$$

Por tanto la gráfica de $f(x) = \frac{4x^4}{x^2-3x}$ carece tanto de asíntotas horizontales, como de asíntotas oblicuas, ya que m no es finito. Luego sólo presenta A.V de ecuación x = 3 como puede verse a continuación: