Solución de ecuaciones de segundo grado completando el trinomio cuadrado perfecto

Cuando no es posible factorizar la ecuación, se completa el trinomio cuadrado perfecto con la única finalidad de poder factorizar al trinomio resultante.

Recuerda que al elevar un binomio al cuadrado se produce un trinomio cuadrado perfecto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ó

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Por lo que, al factorizar un trinomio cuadrado perfecto, obtenemos un binomio al cuadrado:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

ó

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Lo que haremos en el método será agregar el término independiente representado por "b^2" para que, al estar completo el trinomio cuadrado perfecto, éste se pueda factorizar como un binomio al cuadrado.

Para completar el trinomio cuadrado perfecto se realiza el siguiente procedimiento:

Ejemplos

Completa los siguientes trinomios para convertirlos en trinomios cuadrados perfectos y así factorizarlos como binomios al cuadrado:

<table>
<tr><td colspan="2">1) $x^2 - 8x + 4$

Recordemos que:
El término cuadrático es x^2
El término lineal es $-8x$
El término independiente es $+4$</td></tr>
<tr><td>El coeficiente del término lineal (el 8) se divide entre dos y ese cociente se eleva al cuadrado.</td><td>$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$</td></tr>
<tr><td>El resultado va a completar el trinomio para que sea un trinomio cuadrado perfecto. Para no modificar la expresión matemática, se suma y también se resta este número.</td><td>$(x^2 - 8x + 16) + 4 - 16$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El trinomio que está dentro del paréntesis es un trinomio cuadrado perfecto (TCP); se puede factorizar como un binomio al cuadrado.</td></tr>
</table>

Para factorizar el TCP se obtiene la raíz del término cuadrático y del término independiente.	$\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{16} = 4$
Con la literal, el número y el signo del término lineal del TCP se forma el binomio al cuadrado, que es la factorización del TCP.	$(x-4)^2 - 8$	

2) $x^2 + 12x - 3$		
El coeficiente del término lineal (el 12) se divide entre dos y ese cociente se eleva al cuadrado.	$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2 = 36$	
El resultado va a completar el trinomio para que sea un trinomio cuadrado perfecto. Para no modificar la expresión matemática se suma y también se resta este número.	$(x^2 + 12x + 36) - 3 - 36$	
El trinomio que está dentro del paréntesis es un TCP; se puede factorizar como un binomio al cuadrado.		
Para factorizar el TCP, se obtiene la raíz del término cuadrático y del término independiente.	$\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{36} = 6$
Con la literal, el número y el signo del término lineal del TCP se forma el binomio al cuadrado, que es la factorización del TCP.	$(x+6)^2 - 39$	

3) $x^2 + x - 1$		
El coeficiente del término lineal (el 1) se divide entre dos y ese cociente se eleva al cuadrado.	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	
El resultado va a completar el trinomio para que sea un trinomio cuadrado perfecto. Para no modificar la expresión matemática se suma y también se resta este número.	$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{1}{4}$	
El trinomio que está dentro del paréntesis es un TCP; se puede factorizar como un binomio al cuadrado.		
Para factorizar el TCP se obtiene la raíz del término cuadrático y del término independiente.	$\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
Con la literal, el número y el signo del término lineal del TCP se forma el binomio al cuadrado, que es la factorización del TCP.	$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$	

4) $x^2 - 3x + 8$	
El coeficiente del término lineal (el 3) se divide entre dos y ese cociente se eleva al cuadrado:	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

El resultado va a completar el trinomio para que sea un trinomio cuadrado perfecto. Para no modificar la expresión matemática se suma y también se resta este número.	$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+8-\frac{9}{4}$	
El trinomio que está dentro del paréntesis es un TCP; se puede factorizar como un binomio al cuadrado.		
Para factorizar al TCP se obtiene la raíz del término cuadrático y del término independiente.	$\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$
Con la literal, el número y el signo del término lineal del TCP se forma el binomio al cuadrado, que es la factorización del TCP.	$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}$	

Para practicar, completa los siguientes trinomios en TCP y factorízalos.

Ejercicios	Solución
a) x^2+8x-1	
b) x^2-6x+2	
c) $x^2+10x+10$	
d) x^2-x+5	
e) x^2-5x-1	
f) $x^2+11x+11$	

Analiza, en los siguientes ejemplos, el procedimiento para resolver ecuaciones de segundo grado completando el trinomio cuadrado perfecto (TCP). Al terminar, resuelve los ejercicios propuestos.

Ejemplos

1.- Resuelve la ecuación

$$12=3x^2-18x$$

a) Se debe igualar la ecuación a cero, procurando que el término cuadrático sea positivo.	$12=3x^2-18x$ $0=3x^2-18x-12$ $3x^2-18x-12=0$
Recordemos que: El término cuadrático es $3x^2$ El término lineal es $-18x$ El término independiente es -12	
b) El coeficiente del término cuadrático debe ser uno, lo cual se logra al dividir ambos lados de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático.	$\frac{3x^2-18x-12}{3}=\frac{0}{3}$ $x^2-6x-4=0$

c) Factorizamos utilizando la factorización de la forma $x^2+(a+b)x+(ab)$.	$(x-\quad)(x+\quad)=0$	
d) Al no ser posible la factorización de esta forma, procedemos a completar el TCP. El término cuadrático y el término lineal se separan del término independiente en diferentes lados de la igualdad.	$x^2-6x-4=0$ $x^2-6x=4$	
e) Se completa el TCP considerando que el número que se agrega para completar el TCP se suma a ambos lados de la igualdad para no afectar la ecuación.	$\left(\frac{6}{2}\right)^2=(3)^2=9$	
	$x^2-6x+9=4+9$	
f) Factorizamos el TCP.	$\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{9}=3$
	$(x-3)^2=13$	
g) Despejamos los dos valores que puede tener la incógnita –en este caso la "x"–, los cuales son las soluciones de la ecuación.	$x-3=\pm\sqrt{13}$ $x=3\pm\sqrt{13}$	
	Despejando x_1	**Despejando x_2**
	$x_1=3+\sqrt{13}$ $x_1=3+3.6055$ $x_1=6.6055$	$x_2=3-\sqrt{13}$ $x_2=3-3.6055$ $x_2=-0.6055$

2.- Resuelve la ecuación

$$1-8x=4x^2$$

a) Se debe igualar la ecuación a cero, procurando que el término cuadrático sea positivo.	$1-8x=4x^2$ $0=4x^2+8x-1$ $4x^2+8x-1=0$
b) El coeficiente del término cuadrático debe ser uno, lo cual se logra al dividir ambos lados de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático.	$\frac{4x^2+8x-1}{4}=\frac{0}{4}$ $x^2+2x-\frac{1}{4}=0$
c) Factorizamos utilizando la factorización de la forma $x^2+(a+b)x+(ab)$.	$(x+\quad)(x-\quad)=0$
d) Al no ser posible la factorización de esta forma, procedemos a completar el TCP. El término cuadrático y el término lineal se separan del término independiente en diferentes lados de la igualdad.	$x^2+2x-\frac{1}{4}=0$ $x^2+2x=\frac{1}{4}$
e) Se completa el TCP considerando que el número que se agrega para completar el	$\left(\frac{2}{2}\right)^2=(1)^2=1$

TCP se suma a ambos lados de la igualdad para no afectar la ecuación.	$x^2+2x+1=\frac{1}{4}+1$	
f) Factorizamos el TCP.	$\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{1}=1$
	$(x+1)^2=\frac{5}{4}$	
g) Despejamos los dos valores que puede tener la incógnita –en este caso la “x”–, los cuales son las soluciones de la ecuación.	$x+1=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ $x=-1\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$	
	Despejando x_1	**Despejando x_2**
	$x_1=-1+\sqrt{\frac{5}{4}}$ $x_1=-1+1.1180$ $x_1=0.1180$	$x_2=-1-\sqrt{\frac{5}{4}}$ $x_2=-1-1.1180$ $x_2=-2.1180$

3.- Resuelve la ecuación

$$x^2-18x-10=0$$

a) Se debe igualar la ecuación a cero procurando que el término cuadrático sea positivo.	$x^2-18x-10=0$	
b) El coeficiente del término cuadrático debe ser uno, lo cual se logra al dividir ambos lados de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático.	$x^2-18x-10=0$	
c) Factorizamos utilizando la factorización de la forma $x^2+(a+b)x+(ab)$.	$(x-\quad)(x+\quad)=0$	
d) Al no ser posible la factorización de esta forma, procedemos a completar el TCP. El término cuadrático y el término lineal se separan del término independiente en diferentes lados de la igualdad.	$x^2-18x-10=0$ $x^2-18x=10$	
e) Se completa el TCP considerando que el número que se agrega para completar el TCP se suma a ambos lados de la igualdad para no afectar la ecuación.	$\left(\frac{18}{2}\right)^2=(9)^2=81$	
	$x^2-18x+81=10+81$	
f) Factorizamos el TCP.	$\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{81}=9$
	$(x-9)^2=91$	

g) Despejamos los dos valores que puede tener la incógnita –en este caso la "x"–, los cuales son las soluciones de la ecuación.	$x-9=\pm\sqrt{91}$ $x=9\pm\sqrt{91}$	
	Despejando a x_1	**Despejando a** x_2
	$x_1=9+\sqrt{91}$ $x_1=9+9.5393$ $x_1=18.5393$	$x_2=9-\sqrt{91}$ $x_2=9-9.5393$ $x_2=-0.5393$

4.- Resuelve la ecuación

$$5x^2+15x+1=0$$

a) Se debe igualar la ecuación a cero procurando que el término cuadrático sea positivo.	$5x^2+15x+1=0$	
b) El coeficiente del término cuadrático debe ser uno, lo cual se logra al dividir ambos lados de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrático.	$\dfrac{5x^2+15x+1}{5}=\dfrac{0}{5}$ $x^2+3x+\dfrac{1}{5}=0$	
c) Factorizamos utilizando la factorización de la forma $x^2+(a+b)x+(ab)$.	$(x+\quad)(x+\quad)=0$	
d) Al no ser posible la factorización de esta forma, procedemos a completar el TCP. El término cuadrático y el término lineal se separan del término independiente en diferentes lados de la igualdad.	$x^2+3x+\dfrac{1}{5}=0$ $x^2+3x=-\dfrac{1}{5}$	
e) Se completa el TCP considerando que el número que se agrega para completar el TCP se suma a ambos lados de la igualdad para no afectar la ecuación.	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$	
	$x^2+3x+\dfrac{9}{4}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{4}$	
f) Factorizamos el TCP.	$\sqrt{x^2}=x$	$\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$
	$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{41}{20}$	
g) Despejamos los dos valores que puede tener la incógnita –en este caso la "x"–, los cuales son las soluciones de la ecuación.	$x-\dfrac{3}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{41}{20}}$ $x=\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{\dfrac{41}{20}}$	

	Despejando a x_1	Despejando a x_2
	$x_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{41}{20}}$ $x_1 = \frac{3}{2} + 1.4317$ $x_1 = 2.9317$	$x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{41}{20}}$ $x_2 = \frac{3}{2} - 1.4317$ $x_2 = 0.0681$

Para practicar, resuelve las siguientes ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto (CTCP).

Ejercicios	Solución
a) $x^2 + 8x - 1 = 0$	
b) $x^2 - 6x + 2 = 0$	
c) $x^2 + 10x + 10 = 0$	
d) $x^2 - x - 5 = 0$	
e) $x^2 - 5x - 1 = 0$	
f) $x^2 + 11x + 11 = 0$	