Tema 4.- Ecuaciones de tercer y cuarto grado

4.1 La ecuación de tercer grado: fórmula de Cardano-Tartaglia

El desarrollo de este tema está tomado del libro *Introducción al Álgebra*, de S. Xambó, F. Delgado y C. Fuertes, Ed. Complutense, Madrid, 1993.

Vamos a estudiar ahora la ecuación de tercer grado. Suponemos ahora que

$$f(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 \in \mathbb{Q}[X].$$

A todos los efectos, el resolver $f(X) = 0$ equivale a hacer lo mismo para la ecuación que resulta de sustituir X por $X + \frac{a_1}{3}$ en $f(X)$. Esta sustitución tiene la ventaja de que elimina el término en X^2, luego se puede suponer, de entrada, que

$$f(X) = X^3 + pX + q.$$

La sustitución anterior se llama *de Tchirnhausen.*

Estudimeos pues las soluciones de

$$f(X) = X^3 + pX + q = 0. \tag{1}$$

Podemos suponer que p y q son distintos de 0 (si $p = 0$, las soluciones de (1) son las raíces cúbicas de $-q$; si $q = 0$ las soluciones son 0 y las raíces cuadradas de $-p$).

Supongamos que α es una solución de (1). Hagamos la sustitución $\alpha = u+v$. Obtenemos:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Si tomamos u, v de manera que $3uv + p = 0$, i.e. u, v serían las raíces de la ecuación cuadrática $X^2 - \alpha X - \frac{p}{3} = 0$, obtenemos:

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Puesto que

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

tenemos que u^3, v^3 son las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2}$$

Así pues para encontrar una solución de (1) tomamos una solución β de (2), tomamos u una raíz cúbica de β y ponemos $v = -\frac{p}{3u}$. Entonces v^3 es la otra solución de (2) y $\alpha = u + v$ es solución de (1). Simbólicamente, una solución de (1) es

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

debido a que las soluciones de (2) son

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Si $\omega \neq 1$ es una raíz cúbica de 1, $u_1 = u, u_2 = \omega u, u_3 = \omega^2 u$ son las tres raíces cúbicas de s_0. Pongamos $v_i = -\frac{p}{3u_i}$ de manera que $v_1 = v, v_2 = \omega^2 v, v_3 = \omega v$. Entonces las raíces de (1) son: $\alpha_i = u_i + v_i$, $i = 1, 2, 3$.

4.2 La ecuación de cuarto grado: método de Ferrari

Mediante una transformación de Tchirnhausen, podemos centrarnos en el caso en que nuestra ecuación de cuarto grado sea de la forma

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0. \tag{3}$$

En el caso en que $r = 0$, nuestra ecuación se reduce a una ecuación de grado 3. Si $q = 0$, se trata de una ecuación bicuadrática.

Podemos pues suponer $r, q \neq 0$.

Consideremos una variable auxiliar u y escribamos

$$f(X) = (X^2 + \frac{p}{2} + u)^2 - \left[2uX^2 - qX + \left(u^2 + pu - r + \frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Para que el polinomio entre corchetes, que notaremos $g(X)$, sea un cuadrado ha de verificarse que

$$q^2 - 8u\left(u^2 + pu - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0. \tag{4}$$

Ahora bien, (4) es una ecuación de tercer grado y sabemos pues resolverla mediante radicales. Sea u_0 una raíz de (4). Entonces $\frac{q}{4u_0}$ es una raíz doble de $g(X)$ y se tiene

$$f(X) = \left(X^2 + \frac{p}{2} + u_0\right)^2 - 2u_0\left(X - \frac{q}{4u_0}\right)^2$$

de donde las raíces de $f(X)$ son las raíces de los siguientes polinomios de grado 2:

$$X^2 + \sqrt{2u_0}X + \left(\frac{p}{2} + u_0 - \frac{p}{2\sqrt{2u_0}}\right)$$

$$X^2 - \sqrt{2u_0}X + \left(\frac{p}{2} + u_0 + \frac{p}{2\sqrt{2u_0}}\right).$$