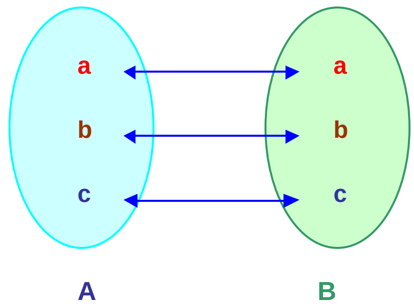
ECUACIONES

1. ECUACIONES LINEALES

1.1 Concepto de igualdad.

1º. Si al seleccionar dos ***conjuntos*** se encuentra que tienen los ***mismos elementos***, estos ***conjuntos*** son ***iguales***.



Para presentar la ***igualdad*** se utiliza el ***símbolo*** **=** por lo que **A = B**

2º. Si se tienen los ***sumandos*** S_1, y S_2 y al efectuar la ***suma*** de ellos se encuentra el ***mismo resultado***, se tendrá que: $S_1 = S_2$

De lo anterior, cuando al comparar dos objetos existe una ***correspondencia*** de ***igualdad*** uno a uno, se dice que los dos objetos son ***idénticos***, y cuando solamente después de una reducción se ve que son las mismas ***cantidades***, entonces son ***equivalentes***.

Por lo tanto:

A = B Es una ***igualdad*** por ***identidad***.

$S_1 = S_2$ Es una ***igualdad*** por ***equivalencia***.

En la ***igualdad***: **a + b = c + d** se tiene:

a + b será el ***primer miembro*** de la ***igualdad***.

= ***signo*** de ***igualdad***.

c + d será el ***segundo miembro*** de la ***igualdad***.

1.2 Propiedades de la igualdad.

1º. Se pueden ***intercambiar*** los ***miembros*** de una ***igualdad*** sin que se altere.

Si **A = B** entonces **B = A**

2º. Si una ***cantidad*** es igual a otra y ésta a su vez es igual a una ***tercera***, la ***primera*** es igual a la ***tercera***.
Si: **A = B** y **B = C** entonces **A = C**

3º. ***Propiedad fundamental***. Una ***igualdad*** **no se altera** si a sus ***dos miembros*** se le ***suma*** o se le ***resta*** una ***misma cantidad*** de la misma manera, **no se altera** si a sus ***dos miembros*** se ***multiplican*** por o se ***dividen*** entre una ***misma cantidad*** o ***expresión***, siempre que esta no contenga ***incógnitas***, porque en caso contrario cambia el ***grado*** y el ***número*** de ***soluciones***.

Podemos ***elevar*** a una ***misma potencia*** los ***dos miembros*** de una ***igualdad*** o ***extraerles*** una misma ***raíz*** sin que se ***altere*** teniendo cuidado de hacerlo especialmente cuando algún ***radical*** afecte a la ***incógnita***

Sea **a = b**, entonces:

$a + m = b + m$	***sumando*** una cantidad **m**
$a - n = b - n$	***restando*** una cantidad **n**
$a(k) = b(k)$	***multiplicando*** por una cantidad **k**
$\frac{a}{p} = \frac{b}{p};\ p \neq 0$	***dividiendo*** entre una cantidad **p**
$a^n = b^n$	***elevando*** a una misma potencia **n**
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$	***extrayendo*** una misma raíz **n**

1.3 Reglas para despejar literales en una igualdad.

Primera. Si un ***término*** se encuentra ***sumando*** en un ***miembro*** este ***puede pasar restando*** al otro ***miembro*** y ***viceversa***

Es decir si: $a - b + c = d$, al despejar **a**:

$a = d + b - c$

Segunda. Si un ***factor*** se encuentra ***multiplicando*** a todo un ***miembro***, éste pasa ***dividiendo*** al otro ***miembro*** y ***viceversa***

Sea $ax = b$; ***despejar*** x; $x = \frac{b}{a}$

Sea $\frac{b}{a} = x$: ***despejar*** b ; $b = ax$

Tercera. Si una ***cantidad entera positiva*** está como ***potencia*** de todo el ***miembro***, pasa como ***índice de raíz*** afectando a todos los ***términos*** del segundo ***miembro*** y ***viceversa***.

Sea. $y^4 = 4px$, ***despejando*** a y: $y = \sqrt[4]{4px}$

Sea. $\sqrt[3]{y} = x - 3$, ***despejando*** a y; $y = (x-3)^3$

1.4 Ecuaciones e identidades.

Las ***igualdades*** entre dos ***expresiones algebraicas*** se clasifican en: ***identidades*** y ***ecuaciones***.

Identidad. Es una ***igualdad*** que se verifica para cualquier valor que se le de a las literales que entran en ella.

Por ejemplo: La ***igualdad*** $(\mathbf{a}+\mathbf{1})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{2a} + \mathbf{1}$ es una ***identidad***, porque se satisface para todo valor **a**.

Si, **a = 4**; tenemos:

$$(4+1)^2 = (4)^2 + 2(4) + 1$$
$$(5)^2 = 16 + 8 + 1$$
$$\mathbf{25} = \mathbf{25}$$

Ecuación. En general una ***ecuación*** es toda ***igualdad*** que contiene elementos conocidos, comúnmente llamados ***datos*** o ***constantes*** y elementos desconocidos denominados ***incógnitas*** y que sólo se verifica o es verdadera para ciertos valores de las ***incógnitas*** que entran en ella.

Por **ejemplo**:

b + 2 = 5: Es una ***ecuación*** porque solo se ***satisface*** para: **b = 3**

La ***igualdad*** **5x + 2 = 17**. es una ***ecuación*** porque se ***verifica*** con: **x = 3**

Clases de ecuaciones.

11. Una ***ecuación*** es ***numérica*** cuando **no** tiene más ***literales*** que las ***incógnitas***.

21. Una ***ecuación*** es ***literal*** cuando existen ***literales*** aparte de las ***incógnitas***.

31. Una ***ecuación*** es ***entera*** cuando sus ***términos*** carecen de ***denominador***.

41. Una ***ecuación*** es ***fraccionaria*** cuando alguno de sus ***términos*** contiene ***denominador***.

Grado de una ecuación.

El ***grado*** de una ***ecuación*** con una ***incógnita*** está dado por el ***exponente*** máximo que afecta a la ***incógnita***, una vez que el primer miembro se ha igualado a cero y previa reducción.

En general, el ***grado*** de una ***ecuación*** es el ***grado*** del ***polinomio***.

Ejemplos:

1. La ***ecuación*** $\mathbf{5x} + \mathbf{2} = \mathbf{17}$ es de ***primer grado*** que también recibe el nombre de ***ecuación lineal***.

2. La ***ecuación*** $\mathbf{x}^3 + \mathbf{7x}^2 - \mathbf{4x} + \mathbf{8} = \mathbf{0}$ es de ***tercer grado***, el ***exponente máximo*** de la ***incógnita*** es **3**.

3. La ***ecuación*** $x^2 - 5x + 6 = 0$ es de ***segundo grado*** y por lo tanto tiene ***dos soluciones*** que la satisfacen.

Solución de una ecuación.

Resolver una ***ecuación*** es llegar a **encontrar** el ***valor*** o ***valores*** de las ***incógnitas*** que hacen posible se cumpla la ***igualdad***, estos ***valores*** reciben el nombre de ***raíces*** o ***soluciones*** de la ***ecuación***.

Verificar una ***ecuación*** es **sustituir** la o las ***incógnitas*** por sus ***valores*** y ver que la ***igualdad resulte cierta***, es decir, **comprobar** que el ***primer miembro*** de la ***ecuación*** resulte **exactamente igual** al ***segundo miembro*** de la ***ecuación***.

1.5. Ecuaciones de *primer grado* con una incógnita.

Por lo que se refiere concretamente a la ***ecuación*** de ***primer grado*** con una ***incógnita***, la ***resolución***, puede apoyarse en la siguiente ***reglas generales***.

1º. ***Quitar denominadores***, si los hay, para lo cual basta ***multiplicar*** los dos miembros de la ***ecuación*** por el ***mínimo común múltiplo***, ***m.c.m.***, de todos los ***denominadores***, y se simplifica.

2º. ***Quitar paréntesis***, si los hay, ejecutando las operaciones indicadas

3º. ***Pasar a un solo miembro*** todo lo que contenga la ***incógnita*** y al otro todo lo ***independiente*** de ella, ademas, hacer las correspondientes reducciones de ***términos semejantes*** ó sacar la ***incógnita*** como ***factor común***.

4º. ***Despejar la incógnita***, para lo cuál, el ***coeficiente*** de ella pasa ***dividiendo*** al otro miembro con todo y el ***signo*** que tenga

1.5.1 *Solución de ecuaciones simples.*

Ejemplos.

1). **Resolver**: $3x - 2 - 7 = x + 3$.De acuerdo a la ***regla general***: Se pasa a un solo ***miembro*** lo que contenga a la ***incógnita*** y al otro lo que no la contenga:

$$3x - x = 3 + 2 + 7$$

Se reducen los ***términos semejantes***:

$$2x = 12$$

Se despeja la ***incógnita*** y se ***simplifica*** el valor encontrado:

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Comprobación: Consiste en **substituir** en la ***ecuación original*** el valor encontrado para la ***incógnita***. Si se cumple la ***igualdad***, se dice que el ***valor*** encontrado es ***solución de la ecuación***.

Por lo que se tiene:

$$3(6)-2-7=(6)+3$$
$$18-9=9 \quad \therefore \quad \mathbf{9=9}$$

2). **Resolver**: $\mathbf{8x-15x-30x-51x=53x+31x-172}$

$$-88x=84x-172$$
$$-88x-84x=-172$$
$$-172x=-172$$
$$\mathbf{x}=\frac{-172}{-172}=\mathbf{1}$$

3). **Resolver**: $\mathbf{3x+101-4x-33=108-16x-100}$

$$68-x=8-16x$$
$$-x+16x=8-68$$
$$15x=-60$$
$$\mathbf{x}=\frac{-60}{15}=-\mathbf{4}$$

4). **Resolver**: $\mathbf{35-22x+6-18x=14-30x+32}$

$$41-40x=46-30x$$
$$-40x+30x=46-41$$
$$-10x=5$$
$$\mathbf{x}=\frac{5}{-10}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

1.5.2 *Ecuaciones de primer grado con signos de agrupación*.

Según la recomendación de la ***regla general***: Para **resolver** este tipo de ***ecuaciones*** se deben **eliminar** los ***paréntesis***.

Ejemplos

1). **Resolver**: $\mathbf{3x-(2x-1)=7x-(3-5x)+(-x+24)}$

$$3x-2x+1=7x-3+5x-x+24$$
$$x+1=11x+21$$
$$x-11x=21-1$$
$$-10x=20$$
$$\mathbf{x}=\frac{20}{-10}=-\mathbf{2}$$

2). **Resolver**: $\mathbf{5x+[-2x+(-x+6)]=18-[-(7x+6)-(3x-24)]}$

$$5x+[-2x-x+6]=18-[-7x-6-3x+24]$$
$$5x-2x-x+6=18+7x+6+3x-24$$
$$2x+6=10x$$
$$2x-10x=-6$$
$$-8x=-6$$
$$\mathbf{x}=\frac{-6}{-8}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

3). **Resolver**: $-\{3x+8-[-15+6x-(-3x+2)-(5x+4)]-29\}=-5$

$$-\{3x+8-[-15+6x+3x-2-5x-4]-29\}=-5$$
$$-\{3x+8+15-6x-3x+2+5x+4-29\}=-5$$
$$-3x-8-15+6x+3x-2-5x-4+29=-5$$
$$9x-8x-29+29=-5$$
$$\mathbf{x}=-\mathbf{5}$$

4). **Resolver**: $3[2(x-1)-4]-6=2(x-1)+10$

$$3[2x-2-4]-6=2x-2+10$$
$$6x-6-12-6=2x+8$$
$$6x-2x=24+8$$
$$4x=32$$
$$\mathbf{x}=\frac{32}{8}=\mathbf{8}$$

5). **Resolver**: $10(x-9)-9(5-6x)=2(4x-1)+5(1+2x)$

$$10x-90-45+54x=8x-2+5+10x$$
$$64x-135=18x+3$$
$$64x-18x=3+135$$
$$46x=138$$
$$\mathbf{x}=\frac{138}{46}=\mathbf{3}$$

6). **Resolver**: $(3x-1)^2-3(2x+3)^2+42=2x(-x-5)-(x-1)^2$

$$9x^2-6x+1-3(4x^2+12x+9)+42=-2x^2-10x-x^2+2x-1$$
$$9x^2-6x+1-12x^2-36x-27+42=-3x^2-8x-1$$
$$-3x^2-42x+16=-3x^2-8x-1$$
$$-42x+8x=-17$$
$$-34x=-17$$
$$\mathbf{x}=\frac{-17}{-34}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

1.5.3 *Ecuaciones numéricas fraccionarias.*

Aplicando las recomendaciones de la ***regla general***:

Ejemplos:

1). Resolver: $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=11$. ***m.c.m.* = 6**; por lo que, ***multiplicamos*** por **6** ambos ***miembros*** de la ecuación para eliminar ***denominadores***.

$$6x+6\left(\frac{x}{2}\right)+6\left(\frac{x}{3}\right)=6(11)$$
$$6x+3x+2x=66$$
$$11x=66$$
$$x=\frac{66}{11}=6$$

2). **Resolver**: $3x-\frac{2}{5}x=\frac{x}{10}-\frac{7}{4}$. El ***m.c.m.* = 20**; ***multiplicando*** por **20** tenemos:

$$20(3x)-20\left(\frac{2x}{5}\right)=20\left(\frac{x}{10}\right)-20\left(\frac{7}{4}\right)$$
$$60x-8x=2x-35$$
$$52x=2x-35$$
$$52x-2x=-35$$
$$50x=-35$$
$$x=\frac{-35}{50}=-\frac{7}{10}$$

3). **Resolver**: $\frac{x-2}{4}-\frac{x-1}{3}=\frac{x-1}{6}-2$. ***m.c.m.* = 12**; se ***multiplica*** la ecuación por **12**:

$$12\left(\frac{x-2}{4}\right)-12\left(\frac{x-1}{3}\right)=12\left(\frac{x-1}{6}\right)-12(2)$$
$$3(x-2)-4(x-1)=2(x-1)-24$$
$$3x-6-4x+4=2x-2-24$$
$$-x-2=2x-26$$
$$-3x=-24$$
$$x=\frac{-24}{-3}=8$$

4). **Resolver**: $\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$. El ***m.c.m.* = 12**; ***multiplicando*** por **12**:

$$12\left(\frac{3x}{4}\right)+12(5)=12\left(\frac{5x}{6}\right)+12(2)$$
$$9x+60=10x+24$$
$$9x-10x=24-60$$
$$-x=-36 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\mathbf{36}$$

5. **Resolver**: $\frac{1}{5}(x-2)-(2x-3)=\frac{2}{3}(4x+1)-\frac{1}{6}(2x+7)$. ***m.c.m.*** **= 30**; ***multiplicando*** por **30**:

$$30\frac{1}{5}(x-2)-30(2x-3)=30\frac{2}{3}(4x+1)-30\frac{1}{6}(2x+7)$$
$$6(x-2)-60x+90=20(4x+1)-5(2x+7)$$
$$6x-12-60x+90=80x+20-10x-35$$
$$-54x+78=70x-15$$
$$-54x-70x=-78-15$$
$$-124x=-93$$
$$\mathbf{x}=\frac{-93}{124}=\mathbf{\frac{93}{124}}$$

6). **Resolver**: $\frac{10x+3}{3}-\frac{3x-1}{5}=x-2$. ***m.c.m.*** **= 15** ; ***multiplicando*** por **15** tenemos:

$$15\left(\frac{10x+3}{3}\right)-15\left(\frac{3x-1}{5}\right)=15(x-2)$$
$$5(10x+3)-3(3x-1)=15x-30$$
$$50x+15-9x+3=15x-30$$
$$41x+18=15x-30$$
$$41x-15x=-30-18$$
$$26x=-48 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{-48}{26}=-\mathbf{\frac{24}{13}}$$

7). **Resolver**: $\frac{1}{2}(27-x)=\frac{9}{2}+\frac{1}{10}(7x-54)$. El ***m.c.m.*** **= 10**; ***multiplicando*** por **10**:

$$10\left(\frac{1}{2}(27-x)\right)=10\left(\frac{9}{2}\right)+10\left(\frac{1}{10}(7x-54)\right)$$
$$5(27-x)=45+(7x-54)$$
$$135-5x=45+7x-54$$
$$-5x-7x=-9-135$$
$$-12x=-144 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{-144}{-12}=\mathbf{12}$$

8). **Resolver**: $\frac{3x-16}{5}=\frac{x}{3}$. El ***m.c.m.* = 15**; ***multiplicando*** por **15**:

$$15\left(\frac{3x-16}{5}\right)=15\left(\frac{x}{3}\right)=$$
$$3(3x-16)=5x$$
$$9x-48=5x$$
$$9x-5x=48$$
$$4x=48 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{48}{4}=\mathbf{12}$$

9). **Resolver**: $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$. El ***m.c.m.* = 6**; ***multiplicando*** por **6** tenemos:

$$6\left(\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)\right)=0$$
$$x-6\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{3}\right)-2\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$$
$$x-2x+1-\frac{4}{5}+\frac{2x}{3}=0$$
$$-x+\frac{1}{5}+\frac{2x}{3}=0$$

El ***m.c.m.* = 15**; ***multiplicando*** por **15**:

$$-15x+3+10x=0$$
$$-5x=-3 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{-3}{-5}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

1.5.4 *Solución de ecuaciones reducibles a simples*.

Ejemplo

1). **Resolver** la ***ecuación***: $(2x+1)^2=(x-2)^2+3x(x+2)$

$$4x^2+4x+1=x^2-4x+4+3x^2+6x$$
$$4x^2+4x+1=4x^2+2x+4$$
$$4x^2-4x^2+4x-2x=4-1$$
$$2x=3 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

2). **Resolver** la ***ecuación***: $\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$. Se tendrán que **eliminar** los ***denominadores*** ***multiplicando*** cada ***miembro*** de la ***ecuación*** por el **m.c.m.** de los ***denominadores***:

El **m. c. m.** de: $\mathbf{2x+1=2x+1}$, $\mathbf{2x-1=2x-1}$ y $\mathbf{4x^2-1=(2x+1)(2x-1)}$

Se tiene que el ***m.c.m.*** es $\mathbf{(2x+1)(2x-1)}$. Por lo tanto, si efectuamos la ***multiplicación*** por $\mathbf{(2x+1)(2x-1)}$, tendremos:

$$(2x+1)(2x-1)\left(\frac{3}{2x+1}\right)-(2x+1)(2x-1)\left(\frac{2}{2x-1}\right)-(2x+1)(2x-1)\left(\frac{x+3}{(2x+1)(2x-1)}\right)=0$$
$$(2x-1)(3)-(2x+1)(2)-(x-3)=0$$
$$6x-3-4x-2-x+3=0$$
$$x-2=0 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\mathbf{2}$$

3). **Resolver** la ***ecuación***: $\frac{6x+5}{15}-\frac{5x+2}{3x+4}=\frac{2x+3}{5}-1$. El ***m.c.m.*** es $\mathbf{15(3x+4)}$, ya que: **15=(1)(3)(5)**, **3x + 4 = (1)(3x + 4)** y **5 = (1)(5)**. ***Multiplicando*** por el **m.c.m.** tenemos:

$$15(3x+4)\left(\frac{6x+5}{15}\right)-15(3x+4)\left(\frac{5x+2}{3x+4}\right)=15(3x+4)\left(\frac{2x+3}{5}\right)+15(3x+4)(-1)$$
$$(3x+4)(6x+5)-15(5x+2)=3(3x+4)(2x+3)-15(3x+4)$$
$$18x^2+15x+24x+20-75x-30=3(6x^2+9x+8x+12)-45x-60$$
$$18x^2+39x+20-75x-30=18x^2+51x+36-45x-60$$
$$18x^2-36x-10=18x^2+6x-24$$
$$-42x=-14 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{-14}{-42}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

4). **Resolver** la ***ecuación***: $\frac{2x-5}{2x-6}+\frac{2(x-1)}{x-3}=\frac{3}{8}+\frac{3(2x-15)}{4x-12}$. Expresando a cada ***denominador*** en función de sus ***factores***, se tiene:

$$2x-6=2(x-3) \quad ; \quad x-3=x-3 \quad ; \quad 8=2^3 \quad ; \quad 4x-12=2^2(x-3)$$

Por tanto: El ***m.c.m.*** **es igual a:** $\mathbf{8(x-3)}$. ***Multiplicando*** por el ***m.c.m.***:

$$8(x-3)\left[\frac{2x-5}{2(x-3)}\right]+8(x-3)\left[\frac{2(x-1)}{x-3}\right]=8(x-3)\frac{3}{8}+8(x-3)\left[\frac{3(2x-15)}{4(x-3)}\right]$$

$$4(2x-5)+16(x-1)=3(x-3)+6(2x-15)$$

$$8x-20+16x-16=3x-9+12x-90$$

$$24x-36=15x-99$$

$$9x=-63 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{-63}{9}=-\mathbf{7}$$

5). **Resolver** la ***ecuación***. $\dfrac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x^2+2x-3}}-\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2-9}}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{x^2-4x+3}}$. Expresando a cada ***denominador*** en función de sus ***factores***, se tiene:

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1) \quad ; \quad x^2-9=(x+3)(x-3) \quad ; \quad x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$

De donde el ***m. c. m.*** es igual a: $\mathbf{(x-3)(x-1)(x+3)}$. ***Multiplicando*** por el ***m.c.m.***:

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-1)}-\frac{(x-3)(x-1)(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x-3)(x-1)(x+3)(4)}{(x-3)(x-1)}$$

$$(x-3)(x-2)-(x-1)(x+1)=(x+3)(4)$$

$$x^2-5x+6-(x^2-1)=4x+12$$

$$-5x+6+1=4x+12$$

$$-9x=5 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{5}{-9}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

6). **Resolver** la ***ecuación***: $\dfrac{\mathbf{10x-7}}{\mathbf{15x+3}}=\dfrac{\mathbf{3x+8}}{\mathbf{12}}-\dfrac{\mathbf{5x^2-4}}{\mathbf{20x+4}}$. Expresando a cada ***denominador*** en función de sus ***factores***, se tiene:

$$15x+3=3(5x+1) \quad ; \quad 12=2^2x3 \quad ; \quad 20x+4=2^2(5x+1)$$

De donde el ***m. c. m.*** es igual a: $\mathbf{12(5x+1)}$. Multiplicando por el ***m.c.m.***:

$$\frac{12(5x+1)(10x-7)}{3(5x+1)}=\frac{12(5x+1)(3x+8)}{12}-\frac{12(5x+1)(5x^2-4)}{4(5x+1)}$$

$$4(10x-7)=(5x+1)(3x+8)-3(5x^2-4)$$

$$40x-28=15x^2+40x+3x+8-15x^2+12$$

$$40x-43x=20+28$$

$$-3x=48 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\frac{48}{-3}=-\mathbf{16}$$

7). **Resolver** la ***ecuación***: $\sqrt{\mathbf{5x-2}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Para eliminar el ***radical*** elevamos ambos ***miembros*** al cuadrado:

$$\left(\sqrt{5x-2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$5x-2=\frac{1}{4}$$
$$5x=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}$$
$$\therefore\quad \mathbf{x}=\frac{\frac{9}{4}}{5}=\mathbf{\frac{9}{20}}$$

8). **Resolver** la ***ecuación***: $\sqrt{x+29}=2\sqrt{2x-5}$. ***Elevando el cuadrado*** cada ***miembro***:

$$(\sqrt{x+29})^2=(2\sqrt{2x-5})^2$$
$$x+29=4(2x-5)=8x-20$$
$$x-8x=-20-29$$
$$-7x=-49\quad\therefore\quad \mathbf{x}=\frac{-49}{-7}=\mathbf{7}$$

1.5.5 Solución de ecuaciones literales de primer grado con una incógnita.

Este tipo de ***ecuaciones*** contienen otras ***literales*** además de la ***incógnita***. La forma de resolverlas es similar a las anteriores.

Ejemplo:

1). **Resolver** para **x**: $\mathbf{a(x+a)-x=a(a+1)+1}$

$$ax+a^2-x=a^2+a+1$$
$$ax-x=a^2-a^2+a+1$$
$$x(a-1)=a+1$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{\frac{a+1}{a-1}}$$

2). **Resolver** para **x**: $\mathbf{ax+b^2=bx+a^2}$

$$ax-bx=a^2-b^2$$
$$x(a-b)=(a+b)(a-b)$$
$$\mathbf{x}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=\mathbf{a+b}$$

3). **Resolver** para **x**: $\mathbf{x(3-2b)-1=x(2-3b)-b^2}$

$$3x-2bx-1=2x-3bx-b^2$$
$$3x-2bx-2x+3bx=-b^2+1$$

$$x+bx=1-b^2$$
$$x(1+b)=(1+b)(1-b)$$
$$\mathbf{x}=\frac{(1+b)(1-b)}{1+b}=\mathbf{1-b}$$

4). **Resolver** para **x**: $\mathbf{a^2x+2abx+b^2=a^2-b^2x}$

$$a^2x+2abx+b^2x=a^2-b^2$$
$$x(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a-b)$$
$$x(a+b)^2=(a+b)(a-b)$$
$$\mathbf{x}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}$$

5). **Resolver** para **x**: $\mathbf{\frac{x}{2m}-\frac{3-3mx}{m^2}-\frac{2x}{m}=0}$. El ***m.c.m.*** es igual a $\mathbf{2m^2}$. ***Multiplicando*** por el ***m.c.m.*** ambos ***miembros***:

$$\frac{2m^2(x)}{2m}-\frac{2m^2(3-3mx)}{m^2}-\frac{2m^2(2x)}{m}=0$$
$$mx-6+6mx-4mx=0$$
$$3mx=6$$
$$\therefore \quad \mathbf{x}=\frac{6}{3m}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{m}}$$

6). **Resolver** para **x**: $\mathbf{\frac{a}{x}+\frac{b}{2}=\frac{4a}{x}}$. El ***m.c.m.*** **= 2x**

$$\frac{2x(a)}{x}+\frac{2x(b)}{2}=\frac{2x(4a)}{x}$$
$$2a+bx=8a$$
$$bx=8a-2a=6a$$
$$\therefore \quad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{6a}}{\mathbf{b}}$$

7). **Resolver** para **x**: $\mathbf{\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1}$. El ***m.c.m.*** **= ab**; por lo que **multiplicando** por **ab** se tiene:

$$ab\left(\frac{x+a}{a}\right)-ab\left(\frac{x+b}{b}\right)=ab(1)$$
$$bx+ab-ax-ab=ab$$
$$x(b-a)=ab$$
$$\therefore \quad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b-a}}$$

8). **Resolver** para **x**: $\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x+a+b}} = \dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+a-b}}$. El ***m.c.m.*** **=** $\mathbf{(x+a+b)(x+a-b)}$. ***Multiplicando*** por $\mathbf{(x+a+b)(x+a-b)}$, tenemos:

$$\frac{(x+a+b)(x+a-b)(x+1)}{x+a+b} = \frac{(x+a+b)(x+a-b)(x-1)}{x+a-b}$$

$$(x+a-b)(x+1) = (x+a+b)(x-1)$$

$$x^2 + x + ax + a - bx - b = x^2 - x + ax - a + bx - b$$

$$2x - 2bx = -2a$$

$$2x(1-b) = -2a$$

$$\therefore \quad \mathbf{x} = \frac{-2a}{2(1-b)} = \frac{-a}{1-b} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b-1}}$$

9). **Resolver** para **x**: $\dfrac{\mathbf{x+a-b}}{\mathbf{a}} - \dfrac{\mathbf{x+b-a}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{b^2-a^2}}{\mathbf{ab}}$. El ***m.c.m.*** **=** **ab**; ***multiplicando*** por **ab**:

$$\frac{ab(x+a-b)}{a} - \frac{ab(x+b-a)}{b} = \frac{ab(b^2-a^2)}{ab}$$

$$b(x+a-b) - a(x+b-a) = b^2 - a^2$$

$$bx + ab - b^2 - ax - ab + a^2 = b^2 - a^2$$

$$bx - ax = b^2 - a^2 + b^2 - a^2 = 2b^2 - 2a^2$$

$$x(b-a) = 2(b^2 - a^2)$$

$$x = \frac{2(b^2-a^2)}{b-a} = \frac{2(b+a)(b-a)}{b-a}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x} = \mathbf{2(b+a)}$$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS O TRES INCOGNITAS.

Una ***ecuación lineal*** con dos ***incógnitas*** tiene la forma general: **Ax + By = C**; donde **A** y **B** son distintos de **cero**, **x** y **y** son las ***incógnitas***.

Una ***ecuación lineal*** con tres ***incógnitas*** tiene la forma general **Ax + By + Cz = D**; donde; **A**, **B** y **C** distintos de ***cero***, **x**, **y** y **z** son las ***incógnitas***.

Sistema de ecuaciones simultáneas. Dos o más ***ecuaciones*** con dos ó más ***incógnitas*** son ***simultáneas***, cuando se satisfacen para iguales valores de las ***incógnitas***, de esta manera, en un sistema de ***ecuaciones simultáneas*** para resolverse debe haber el mismo número de ***ecuaciones*** que de ***incógnitas***.

Por **ejemplo**, en el sistema: $\mathbf{x+y=5}$ y $\mathbf{x-y=1}$, son ***simultáneas*** porque se satisfacen cuando $\mathbf{x=3}$ y $\mathbf{y=2}$

Se llama ***sistema de ecuaciones lineales*** a todo conjunto de ***ecuaciones*** formado por dos o más ***ecuaciones*** con dos o más ***incógnitas***.

Son ***sistemas de ecuaciones*** tambien:

1) $5x+3y=5$ y $x-4y=1$

2) $6x=2$ y $x-2y=3$

3) $2x+y+5z=7$, $x+y-7z=1$ y $-x+y+3z=3$

2.1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Resolver un ***sistema de ecuaciones*** es hallar la ***solución común***, es decir, el ***conjunto*** de ***valores*** que satisfacen ***simultáneamente*** a cada una de las ***ecuaciones***.

La **resolución** de ***sistemas de ecuaciones*** puede apoyarse en uno cualquiera de los tres ***métodos*** llamados de ***eliminación*** de ***incógnitas*** porque efectivamente las van eliminando, reduciendo el ***sistema*** a otro más ***simple***, hasta llegar a una ***ecuación*** con una sola ***incógnita***.

Los ***métodos*** más comunes para resolver ***sistemas de ecuaciones*** son:

1. ***Eliminación*** por ***sustitución***
2. ***Eliminación*** por ***suma*** o ***resta***
3. ***Eliminación*** por ***igualación***
4. Por medio de ***determinantes***
5. ***Método Gráfico***

En este curso se estudiarán los **cuatro** primeros ***métodos***.

2.1.1 Primer método. *Eliminación por sustitución*

Consiste en ***despejar*** una de las la ***incógnitas***, la que más se facilite, una vez llevado el ***sistema*** a la forma ***general***, de una de las ***ecuaciones*** se ***despeja*** una de las ***incógnitas***, la que mas se facilite, y en ***sustituirla*** en la(s) otra(s), con lo que automáticamente queda ***eliminada*** dicha ***incógnita***.

Ejemplo:

1) **Resolver** el siguiente ***sistema***.

$$8x+5y=-25 \qquad (1)$$

$$2x-7y=-31 \qquad (2)$$

Despejando **x**, de la ***ecuación*** **(2)**:

$$2x=-31+7y \quad \therefore \quad x=\frac{-31+7y}{2} \qquad (3)$$

Sustituyendo la ***ecuación*** **(3)** en ***ecuación*** **(1)**.

$$8\left(\frac{-31+7y}{2}\right)+5y=-25$$

Desarrollando y ***despejando*** a **y**:

$$4(-31+7y)+5y=-25$$
$$28y-124+5y=-25$$
$$33y=99 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\frac{99}{33}=\mathbf{3}$$

Sustituyendo este ***valor*** encontrado, en la ***ecuación*** **(3)**, se tiene:

$$x=\frac{-31+21}{2}=\frac{-10}{5}=-5 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=-\mathbf{5}$$

2.1.2 Segundo método. *Eliminación por suma o resta*

En este ***método*** es ***indispensable*** que la ***incógnita*** por ***eliminar*** adquiera el mismo ***coeficiente*** en cada dos ***ecuaciones***, éste debe ser el ***m.c.m.*** de los ***coeficientes*** origináles de dicha ***incógnita*** y para lograrlo se ***multiplica*** cada ***ecuación*** por el ***factor*** conveniente, naturalmente sin que se altere la ***ecuación***. Si los ***coeficientes*** resultantes son ***iguales***, son del ***mismo signo***, se ***restan miembro*** a ***miembro*** las ***ecuaciones***, pero si son de ***signos contrarios*** se ***suman***.

Ejemplos:

1. **Resolver** el sistema.

$$\mathbf{5x+6y=-26} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\mathbf{2x-7y=-1} \qquad \mathbf{(2)}$$

Se ***multiplica*** la ***ecuación*** **(1)** por **2** y la ***ecuación*** **(2)** por **5**:

$$\mathbf{10x+12y=-52} \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\mathbf{10x-35y=-5} \qquad \mathbf{(4)}$$

Se puede ver que los ***coeficientes*** de **x** son ***iguales*** y del ***mismo signo positivo***, por lo que: ***miembro*** a ***miembro*** se ***resta*** la ***ecuación*** **(4)** de la ***ecuación*** **(3)**, es decir que la ***ecuación*** **(4)** se convierte en ***sustraendo***, por lo tanto, se les ***cambia de signo*** a todos sus ***términos***.

Asi tenemos:

$$47y=-47 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\frac{-47}{47}=-\mathbf{1}$$

Sustituyendo este ***valor*** en cualquiera de las ***ecuaciones*** originales, por ejemplo en la ***ecuación*** **(2)**, se tiene:

$$2x - 7(-1) = -1$$

$$2x + 7 = -1$$

$$2x = -8 \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \frac{-8}{2} = -\mathbf{4}$$

2. **Resolver** el *sistema*.

$$\mathbf{3x - 10y = 2} \qquad (1)$$

$$\mathbf{9x + 5y = 1} \qquad (2)$$

La ***incognita*** a ***eliminar*** es **y**, por lo que ***multiplicando*** la ***ecuación*** **(2)** por **2**.

$$\mathbf{18x + 10y = 2} \qquad (3)$$

Ahora los ***coeficientes*** de **y** son ***iguales*** pero de ***signos contrarios***, por lo que ***sumando*** las ***ecuaciones*** **(1)** y **(3)**, ***miembro*** a ***miembro***, resulta:

$$21x = 4 \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{21}}$$

Multiplicando ahora la ***ecuación*** **(1)** por **3** tenemos.

$$\mathbf{9x - 30y = 6} \qquad (4)$$

Según **(2)** y **(4)** se puede ver que los ***coeficientes*** de **x** son ***iguales y de signo contrario***, por lo que de la ***ecuación*** **(2)** ***restamos*** la ***ecuación*** **(4)**:

$$35y = -5 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = \frac{-5}{35} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

2.1.3 Tercer método. *Eliminación por igualación*.

Consiste en ***despejar*** una misma ***incógnita*** de todas las ***ecuaciones*** y en ***igualar*** las ***expresiones*** resultantes de ***dos*** en ***dos***.

Ejemplo: **Resolver** el ***sistema***:

$$\mathbf{3x - 2y = 5} \qquad (1)$$

$$\mathbf{2x + 7y = 45} \qquad (2)$$

Despejando **x** de la ***ecuación*** **(1)**:

$$3x = 5 + 2y \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{5 + 2y}}{\mathbf{3}} \qquad (3)$$

Despejando **x** de la ***ecuación*** **(2)**:

$$2x = 45 - 7y \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{45 - 7y}}{\mathbf{2}} \qquad (4)$$

Igualando las ***ecuaciones*** **(3)** y **(4)**:

$$\frac{5+2y}{3}=\frac{45-7y}{2}$$

Resolviendo la ***ecuación*** resultante.

$$2(5+2y)=3(45-7y)$$
$$10+4y=135-21y$$
$$25y=125 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\frac{125}{25}=\mathbf{5}$$

Sustituyendo en la ***ecuación*** **(3)** el ***valor*** encontrado:

$$x=\frac{5+2(5)}{3}=\frac{5+10}{3}=\frac{15}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{x=5}$$

EJERCICIOS

1. **Resolver** el siguiente ***sistema***:

$$\mathbf{2x-y=1} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{x+3y=11} \qquad \textbf{(2)}$$

De la ***ecuación*** **(2)** *despejamos* a **x**:

$$\mathbf{x=11-3y} \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo la ***ecuación*** **(3)** en la ***ecuación*** **(1)**:

$$2(11-3y)-y=1$$
$$22-6y-y=1$$
$$-7y=-21 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\frac{-21}{-7}=\mathbf{3}$$

Sustituyendo el ***valor*** de **y** en la ***ecuación*** **(3)**:

$$x=11-3(3)=11-9 \quad \therefore \quad \mathbf{x=2}$$

2. **Resolver** el ***sistema***:

$$\mathbf{3x+2y=23} \qquad \textbf{(1)}$$
$$\mathbf{2x-5y=-29} \qquad \textbf{(2)}$$

Multiplicando la ***ecuación*** **(1)** por **2** y la ***ecuación*** **(2)** por 3.

De **(1)**: $\mathbf{6x+4y=46}$ **(3)**

De **(2)**: $\mathbf{6x - 15y = -87}$ **(4)**

Restando **(4)** de **(3)**:

$$19y = 133 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = \frac{133}{19} = \mathbf{7}$$

Sustituyendo el ***valor*** de **y** en la ***ecuación*** **(1)**:

$$3x + 2(7) = 23$$

$$3x = 23 - 14 = 9 \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}$$

3. **Resolver** el ***sistema***:

$\mathbf{2x + 3y = 23}$ **(1)**

$\mathbf{5x - 2y = 10}$ **(2)**

Despejando **x** de **(1)** y **(2)**:

De **(1)**: $2x = 23 - 3y \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \mathbf{\frac{23 - 3y}{2}}$ **(3)**

De **(2)**: $5x = 10 + 2y \quad \therefore \quad \mathbf{x} = \mathbf{\frac{10 + 2y}{5}}$ **(4)**

Igualando **(3)** y **(4)**:

$$\frac{23 - 3y}{2} = \frac{10 + 2y}{5}$$

$$5(23 - 3y) = 2(10 + 2y)$$

$$115 - 15y = 20 + 4y$$

$$-19y = -95 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = \frac{-95}{-15} = \mathbf{5}$$

Sustituyendo el ***valor*** encontrado en **(4)**:

$$x = \frac{10 + 2(5)}{5} = \frac{20}{5} \quad \therefore \quad \mathbf{x = 4}$$

4. **Resolver** el ***sistema***:

$\mathbf{x - y = 1}$ **(1)**

$\mathbf{\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 5}$ **(2)**

De **(1)**: $\mathbf{x = 1 + y}$ **(3)**

Sustituyendo **(3)** en **(2)**:

$$\frac{2(1+y)}{5} + \frac{3y}{4} = 5$$

El ***m.c.m.*** **= 20**; ***multiplicando*** ambos ***miembros*** por **20**.

$$20\left[\frac{2(1+y)}{5}\right] + 20\left(\frac{3y}{4}\right) = 20(5)$$
$$8(1+y) + 5(3y) = 100$$
$$8 + 8y + 15y = 100$$
$$23y = 92 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = \frac{92}{3} = \mathbf{4}$$

Sustituyendo en **(3)**:

$$x = 1 + 4 = 5 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

5. **Resolver** el ***sistema***:

$\mathbf{\frac{x+1}{y} = \frac{1}{4}}$ **(1)**

$\mathbf{\frac{x}{y+1} = \frac{1}{5}}$ **(2)**

De **(1)**: $4(x+1) = y \quad \therefore \quad \mathbf{4x + 4 = y}$ **(3)**

De **(2)**: $5x = y + 1 \quad \therefore \quad \mathbf{5x - 1 = y}$ **(4)**

Igualando **(3)** y **(4)**:

$$4x + 4 = 5x - 1$$
$$-x = -5 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

Sustituyendo en **(4)**:

$$5(5) - 1 = y \quad \therefore \quad \mathbf{y = 24}$$

6. **Resolver** el ***sistema***:

$\mathbf{x + 6y = 27}$ **(1)**

$\mathbf{7x - 3y = 9}$ **(2)**

Multiplicando por **(- 7)** a la ***ecuación*** **(1)**:

$\mathbf{-7x - 42y = -189}$ **(3)**

Sumando las ***ecuaciones*** **(2)** y **(3)**:

$$-45y = -180$$
$$y = \frac{-180}{-45} = 4 \quad \therefore \quad \mathbf{y = 4}$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$x + 6(4) = 27$$
$$x + 24 = 27$$
$$x = 27 - 24 = 3 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 3}$$

7. **Resolver** el ***sistema***:

$\mathbf{3x - (4y + 6) = 2y - (x + 18)}$ **(1)**

$\mathbf{2x - 3 = x - y + 4}$ **(2)**

De **(1)**:

$$3x - 4y - 6 = 2y - x - 18$$
$$\mathbf{4x - 6y = -12} \quad \textbf{(3)}$$

De **(2)**:

$$x + y = 7$$
$$\mathbf{x = 7 - y} \quad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo **(4)** en **(3)**:

$$4(7 - y) - 6y = -12$$
$$28 - 4y - 6y = -12$$
$$-10y = -40$$
$$y = \frac{-40}{-10} = 4 \quad \therefore \quad \mathbf{y = 4}$$

Sustituyendo el *valor* encontrado en la *ecuación* (4):

$x = 7 - 4 = 3 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 3}$

8. **Resolver** el *sistema*:

$\mathbf{5x - 4y = -3}$ (1)

$\mathbf{14x - 10y = 0}$ (2)

Simplificando la (2), *dividiendo* entre **2** se tiene.

$\mathbf{7x - 5y = 0}$ (2)

De (1):

$$5x = -3 + 4y$$
$$\mathbf{x = \frac{-3 + 4y}{5}} \quad (3)$$

De (2):

$$7x = 5y$$
$$\mathbf{x = \frac{5y}{7}} \quad (4)$$

Igualando las *ecuaciones* (3) y (4):

$$\frac{-3 + 4y}{5} = \frac{5y}{7}$$
$$7(-3 + 4y) = 5(5y)$$
$$-21 + 28y = 25y$$
$$3y = 21 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = \frac{21}{3} = \mathbf{7}$$

Sustituyendo en (4):

$$x = \frac{5(7)}{7} = 5 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 5}$$

9. **Resolver** el *sistema*:

$\mathbf{ax + by = a^2 + b^2}$ (1)

$\mathbf{bx + ay = 2ab}$ (2)

Multiplicando **(1)** por **b** y **(2)** por (**- a**).

De la **(1)**:

$$\mathbf{abx + b^2y = a^2b + b^3} \qquad \textbf{(3)}$$

De la **(2)**:

$$\mathbf{-abx - a^2y = -2a^2b} \qquad \textbf{(4)}$$

Sumando **(3)** y **(4)**:

$$b^2y - a^2y = -a^2b + b^3$$

$$y(b^2 - a^2) = b(b^2 - a^2)$$

$$y = \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = b \quad \therefore \quad \mathbf{y = b}$$

Sustituyendo en **(2)**:

$$bx + ab = 2ab$$

$$bx = ab$$

$$x = \frac{ab}{b} \quad \therefore \quad \mathbf{x = a}$$

10. **Resolver** el ***sistema***:

$$\mathbf{x - y + z = 7} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{x + y - z = 1} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\mathbf{x - y - z = -3} \qquad \textbf{(3)}$$

De **(1)**:

$$\mathbf{x = 7 + y - z} \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo **(4)** en **(2)** y **(3)**:

En **(2)**:

$$7 + y - z + y - z = 1$$

$$2y - 2z = -6$$

$$y - z = -3 \quad \therefore \quad \mathbf{y = z - 3} \qquad \textbf{(5)}$$

En **(3)**:

$$7-y-z-y-z=-3$$
$$-2z=-10 \quad \therefore \quad \mathbf{z}=\frac{-10}{-2}=\mathbf{5}$$

Sustituyendo en **(5)**:

$$y=5-3=2 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\mathbf{2}$$

Sustituyendo en **(4)**:

$$x=7+2-5=4 \quad \therefore \quad \mathbf{x}=\mathbf{4}$$

11. **Resolver** el ***sistema***.

$$\mathbf{2x}+\mathbf{y}-\mathbf{4z}=\mathbf{14} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{x}-\mathbf{5y}+\mathbf{z}=-\mathbf{1} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\mathbf{2x}-\mathbf{4y}+\mathbf{5z}=\mathbf{13} \qquad \textbf{(3)}$$

De **(2)**:

$$\mathbf{x}=\mathbf{5y}-\mathbf{z}-\mathbf{1} \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo **(4)** en **(1)** y **(3)**:

En **(1)**:

$$10y-2z-2+y-4z=14$$
$$\mathbf{11y}-\mathbf{6z}=\mathbf{16} \qquad \textbf{(5)}$$

En **(3)**:

$$10y-2z-2-4y+5z=13$$
$$6y+3z=15$$

Dividiendo entre **3**:

$$2y+z=5 \quad \therefore \quad \mathbf{z}=\mathbf{5}-\mathbf{2y} \qquad \textbf{(6)}$$

Sustituyendo **(6)** en **(5)**:

$$11y-30+12y=16$$
$$23y=46 \quad \therefore \quad \mathbf{y}=\frac{46}{23}=\mathbf{2}$$

Sustituyendo en **(6)** este ***valor*** se tiene.

$z = 5 - 4 = 1 \quad \therefore \quad \mathbf{z = 1}$

Sustituyendo en **(4)** los ***valores*** ya conocidos:

$x = 10 - 1 - 1 = 8 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 8}$

12. **Resolver** el ***sistema***:

$$\frac{5x + 7y}{x + y} = 6 \qquad (1)$$

$$\frac{3(z - x)}{x - y + z} = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{2x + 3y - z}{\frac{x}{2} + 3} = 4 \qquad (3)$$

Quitando ***denominadores***:

En **(1)**:

$$5x + 7y = 6(x + y) = 6x + 6y$$
$$7y - 6y = 6x - 5x \quad \therefore \quad \mathbf{y = x} \qquad (4)$$

En **(2)**:

$$3z - 3x = x - y + z$$
$$\mathbf{4x - y - 2z = 0} \qquad (5)$$

En **(3)**:

$$2x + 3y - z = 4\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$
$$2x + 3y - z = 2x + 12 \qquad (6)$$
$$\mathbf{3y - z = 12}$$

Sustituyendo **(4)** en **(5)**:

$$4y - y - 2z = 0$$
$$\mathbf{3y - 2z = 0} \qquad (7)$$

De la **(6)** ***restamos*** la **(7)** y se tiene:

$\mathbf{z = 12}$

Sustituimos en **(7)** el ***valor*** $\mathbf{z = 12}$:

$$3y - 24 = 0$$
$$3y = 24$$
$$y = \frac{24}{3} = 8 \quad \therefore \quad \mathbf{y = 8}$$

Sustituimos en **(4)** se tiene que:

$$\mathbf{x = 8}$$

2.1.4 Cuarto método. *Por determinantes*.

Para que comprendamos claramente lo que es un ***determinante***, empezaremos por **resolver** el siguiente ***sistema*** de ***ecuaciones***:

$$\mathbf{a_1x + b_1y = c_1} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{a_2x + b_2y = c_2} \qquad \textbf{(2)}$$

Si ***multiplicamos*** la ***ecuación*** **(1)** por $\mathbf{b_2}$ y la ***ecuación*** **(2)** por $\mathbf{b_1}$ tendremos:

En **(1)**:

$$\mathbf{a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1} \qquad \textbf{(3)}$$

En **(2)**:

$$\mathbf{a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2} \qquad \textbf{(4)}$$

Restando **(4)** de **(3)** queda:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2$$
$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2 \qquad \textbf{(5)}$$
$$\mathbf{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Si ahora, ***multiplicamos*** la ***ecuación*** **(1)** por $\mathbf{a_2}$ y la ***ecuación*** **(2)** por $\mathbf{a_1}$ tendremos:

En **(1)**:

$$\mathbf{a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1} \qquad \textbf{(6)}$$

En **(2)**:

$$\mathbf{a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2} \qquad \textbf{(7)}$$

Restando **(6)** de **(7)**, queda:

$$a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$$
$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad \textbf{(8)}$$
$$\mathbf{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Las ***expresiones*** **(5)** y **(8)** pueden ser consideradas como ***fórmulas*** de resolución del ***sistema de ecuaciones***, cuya única dificultad consiste en su memorización. Para salvar dicha dificultad podemos hacer las siguientes observaciones:

1. El ***denominador*** es el mismo para las dos ***fórmulas*** por lo que conviene aprenderlo primero.

2. Los ***numeradores*** son muy parecidos al ***denominador común***, la ***diferencia*** está en que, los lugares en que quisiéramos escribir a partir del ***denominador*** los ***coeficientes*** de la ***incógnita*** por **calcular**, tendrán que estar ocupados por los correspondientes ***términos independientes*** copiados de los segundos ***miembros*** de las ***ecuaciones***.

Debemos hacer notar que, la determinación definitiva de los valores de las ***incógnitas*** depende del ***denominador común*** de las ***fórmulas*** por lo que se ha convenido en llamarlo ***determinante*** del ***sistema***.

También es muy importante hacer notar que no es indispensable memorizar el ***denominador***, puesto que se puede establecer a partir del propio ***sistema***, mediante la ***diferencia*** de los ***productos*** en **x** de los ***coeficientes*** de las ***incógnitas*** como se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \end{vmatrix}$$

Representa un ***determinante*** de ***orden dos***, en donde los ***elementos*** contenidos en él son ***números reales*** para su representación, utilizamos la letra **D** (delta) del alfabeto griego.

El ***determinante*** de ***segundo orden*** se ***resuelve*** como sigue.

1. Se trazán ***diagonales***, como se indica en la figura siguiente:

(-)

línea

$$\mathbf{Ä} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} \end{vmatrix} = \mathbf{a_1b_2 - a_2b_1}$$

línea

(+)

columnas

2. Se ***multiplican*** los dos ***elementos*** colocados sobre las ***diagonales*** completas, sin cambio de ***signo*** en las ***descendentes*** de ***izquierda*** a ***derecha*** y con cambio de ***signo*** en las ***diagonales ascendentes*** de ***izquierda*** a ***derecha*** también. La ***suma algebraica*** de todos los ***productos*** es el ***valor numérico*** del correspondiente ***determinante***.

Como consecuencia de todo esto, llegamos a la conclusión de que las ***formulas*** **(5)** y **(8)** para la resolución del ***sistema***, pueden escribirse más cómodamente de la siguiente manera.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Esta forma de escribir las ***formulas***, mediante el cambio de una ***columna*** en el ***numerador***, se conoce con el nombre de ***reglas de Kramer*** y es aplicable a todos los ***sistemas de ecuaciones*** de ***primer grado***.

Ejemplo 1. **Resolver** el ***sistema***.

$$5x + 6y = -26 \qquad (1)$$

$$2x - 7y = -1 \qquad (2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -26 & 6 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{182+6}{-35-12} = \frac{188}{-47} = -4 \quad \therefore \quad x = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -26 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{-5+52}{-47} = \frac{47}{-47} = -1 \quad \therefore \quad y = -1$$

Ejemplo 2. **Resolver** el sistema.

$$12x + 5y = 22 \qquad (1)$$

$$13x - 9y = -5 \qquad (2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 22 & 5 \\ -5 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 13 & -9 \end{vmatrix}} = \frac{-198+25}{-108-65} = \frac{-173}{-173} = 1 \quad \therefore \quad x = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 22 \\ 13 & -5 \end{vmatrix}}{-173} = \frac{-60-286}{-173} = \frac{-346}{-173} = 2 \quad \therefore \quad y = 2$$

Determinantes de tercer orden.

Los ***determinantes*** vistos anteriormente son de ***segundo orden***. Los que tienen tres ***líneas*** y tres ***columnas*** se llaman de ***tercer orden*** como se muestra a continuación:

$$\text{Ä} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pueden calcularse numéricamente, mediante diversos procedimientos que son generales, inclusive para ***determinantes*** de ***orden*** superior. Sin embargo, en el caso particular y exclusivo de los ***determinantes*** de ***tercer orden*** puede utilizarse una ***regla*** muy sencilla llamada de ***Sarrus***; que consiste en ***agregar*** a la ***derecha*** del ***determinante*** las dos primeros ***columnas*** ó de ***bajo*** de él, las dos primeras ***lineas***, enseguida se hacen los ***productos*** de los ***elementos*** colocados sobre las ***diagonales*** completas, sin cambio de ***signo*** en las ***descendentes*** de ***izquierda*** a ***derecha***, y con cambio de ***signo*** en las ***diagonales ascendentes*** de ***izquierda*** a ***derecha***. La ***suma algebraica*** de todos los ***productos*** es el ***valor numérico*** del ***determinante***.

$$\text{Ä} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

Diagonals ascendentes

Diagonals descendentes

En el cual se hán ***agregado abajo*** del ***determinante*** original, las dos primeras ***lineas*** del mismo.

De la misma forma, tambien se puede representar como:

$$\begin{matrix} & (-) \quad (-) \quad (-) \\ \text{Ä} = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ & (+) \quad (+) \quad (+) \end{matrix}$$

Ahora, se han ***agregado*** a la ***derecha*** del ***determinante*** original las dos primeras ***columnas***.

En ambas representaciones podemos observar que los ***elementos*** fuera de las ***líneas no aparecen*** en los ***productos*** porque ya fueron considerados.

Ejemplo 1. **Obtener** el ***valor*** del ***determinante*** siguiente:

$$\text{Ä} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

De acuerdo a lo visto anteriormente tenemos:

Primero, ***agregando*** las dos primeras ***columnas*** a la ***derecha*** del ***determinante*** dado.

$$\ddot{A} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & -8 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 64 + 150 - 84 - 70 + 80 - 144 = 294 - 298 = -\mathbf{4}$$

Ahora ***agregando*** las dos primeras ***lineas*** ***abajo*** del ***determinante*** original tenemos:

$$\ddot{A} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 64 - 84 + 150 - 70 + 80 - 144 = 294 - 298 = -\mathbf{4}$$

Enseguida ***encontraremos*** la ***solución*** de un ***sistema de tres ecuaciones lineales*** con ***tres incógnitas***.

Ejemplo 2. Resolver el ***sistema***:

$\mathbf{x + 2y - z = -3}$ **(1)**

$\mathbf{3x + y + z = 4}$ **(2)**

$\mathbf{x - y + 2z = 6}$ **(3)**

1º. ***Formamos*** el ***determinante*** del ***sistema***.

$$\ddot{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Lo ***resolvemos*** y tenemos:

$$\ddot{A} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \\ 4 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 - 12 = 9 - 12 = -3 \quad \therefore \quad \ddot{\mathbf{A}} = -\mathbf{3}$$

2º. ***Formamos*** el ***determinante*** para la ***incógnita*** **x**, y lo ***resolvemos***, es decir:

$$\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Agregando las dos primeras ***líneas***:

$$\text{Äx} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6+4+12+6-3-16 = 22-25 = -3 \quad \therefore \quad \mathbf{\text{Äx}} = -\mathbf{3}$$

3º. Para **determinar** el ***valor*** de la ***incógnita*** x, ***dividimos*** **D**x entre **D**; o sea que:

$$x = \frac{\text{Äx}}{\text{Ä}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \therefore \quad \mathbf{x = 1}$$

4º. ***Formamos*** el ***determinante*** para la ***incógnita*** y, es decir:

$$\mathbf{\text{Äy}} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{3} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Resolviendo tenemos:

$$\text{Äy} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8-18-3+4-6+18 = 30-27 = 3 \quad \therefore \quad \mathbf{\text{Äy}} = \mathbf{3}$$

5º. ***Obtenemos*** el ***valor*** de y, dividiendo **D**y entre **D**, es decir:

$$y = \frac{\text{Äy}}{\text{Ä}} = \frac{3}{-3} = -1 \quad \therefore \quad \mathbf{y} = -\mathbf{1}$$

6º. De la misma manera, ***formamos*** el ***determinante*** para la ***incógnita*** z:

$$\mathbf{\text{Äz}} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & -\mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

Resoviendo tenemos:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6+9+8+3+4-36 = 30-36 = -6 \quad \therefore \quad \mathbf{\Delta z = -6}$$

Por lo que:

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \therefore \quad \mathbf{z = 2}$$

3. NÚMEROS COMPLEJOS

Para definir a un ***número complejo***, es necesario, conocer primeramente a los ***números ímaginarios***, ya que cuando se trata de extraer raíz cuadrada a un número negativo de la forma $\sqrt{-\mathbf{n}}$, se dice que dicha raíz es ***ímaginaria*** porque no hay ningun número ***real*** que constituya resultado de esa raíz cuadrada.

Por **ejemplo**: la $\sqrt{-\mathbf{16}}$ su resultado no es (**+ 4**) y no es (**- 4**), ya que:

$(+4)^2 = +16$ y $(-4)^2 = +16$

Para salvar ésta dificultad y que se pueda expresar el resultado respectivo, se ha convenido en admitir que existen otra clase de números, llamados ***ímaginarios***, en donde, por definición la ***unidad*** es un cierto número **i**. cuyo valor es:

$$\mathbf{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$$

De acuerdo con esto las ***potencias*** sucesivas de la ***unidad imaginaria*** pueden verse enseguida:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \sqrt{-\mathbf{1}} \\
\mathbf{i}^2 &= -\mathbf{1} \\
\mathbf{i}^3 &= (\mathbf{i}^2)(\mathbf{i}) = -\mathbf{i} \\
\mathbf{i}^4 &= (\mathbf{i}^2)(\mathbf{i}^2) = (-\mathbf{1})(-\mathbf{1}) = \mathbf{1} \\
\mathbf{i}^5 &= (\mathbf{i}^4)(\mathbf{i}) = (\mathbf{1})\mathbf{i} = \mathbf{i} \\
\mathbf{i}^6 &= (\mathbf{i}^4)(\mathbf{i}^2) = (\mathbf{1})(-\mathbf{1}) = -\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1. Calcular $\mathbf{i}^{100}$: $\mathbf{i}^{100} = (i^4)^{25} = (1)^{25} = \mathbf{1}$

Ejemplo 2. Calcular $\mathbf{i}^{21}$: $\mathbf{i}^{21} = (i^{20})(i) = (i^4)^5 i = (1)^5 i = \mathbf{i}$

Los ***números complejos*** son aquellos números que tienen la forma $\mathbf{a + bi}$ y se representan como $\mathbf{z = a + bi}$. En donde **a** es la parte ***real*** y **b** la parte ***ímaginaria***.

3.1 Operaciones con numeros complejos.

Suma. La ***suma*** de dos ***números complejos*** es otro ***número complejo***.

Sean: $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ y $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$:

Sumando:

$$\mathbf{z_1 + z_2} = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = \mathbf{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$$

Ejemplo. **Calcular** la ***suma*** de: $\mathbf{z_1 = 3 + 2i}$ y $\mathbf{z_2 = 2 - i}$:

$$\mathbf{z_1 + z_2} = (3+2) + (2-1)i = \mathbf{5 + i}$$

Resta. La ***diferencia*** o ***resta*** de $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ ***menos*** $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, es otro ***número complejo*** dado por:

$$\mathbf{z_1 - z_2} = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = \mathbf{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$$

Ejemplo. **Calcular** $\mathbf{z_1 = 3 + \frac{3}{2}i}$ ***menos*** $\mathbf{z_2 = 2 - i}$:

$$\mathbf{z_1 - z_2} = (3-2) + \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \mathbf{1 + \frac{5}{2}i}$$

Multiplicación. El ***producto*** de dos ***números complejos*** $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ y $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, es otro ***número complejo***, dado por:

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

como $\mathbf{i^2 = -1}$, entonces queda:

$$\mathbf{z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$$

Ejemplo. **Calcular** $\mathbf{z_1 = 2 + 3i}$ ***por*** $\mathbf{z_2 = 1 - 2i}$:

$$\mathbf{z_1 z_2} = [(2x1) - 3(-2)] + [(2)(-2) + (1)(3)]i = (2+6) + (-4+3)i = \mathbf{8 - i}$$

División. El ***cociente*** de dos ***números complejos*** $\mathbf{z_1 = a_1 + b_1 i}$ y $\mathbf{z_2 = a_2 + b_2 i}$, es otro ***número complejo***, de la forma:

$$\mathbf{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}}$$

Multiplicando numerador y ***denominador*** por el ***conjugado*** del ***denominador***:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=$$
$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)+\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

Ejemplo. **Calcular** la ***división*** de $z_1=3-3i$ ***entre*** $z_2=3+2i$. ***Dividiendo***:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{[3(3)+(-3)(2)]+[3(-3)-3(2)]i}{3^2+2^2}=\frac{9-6+(-9-6)i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{15}{13}i$$

4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O ECUACION CUADRATICA.

En primer lugar vamos a **demostrar** que todo ***número*** tiene ***dos raices cuadradas iguales*** pero de ***signos contrarios***. Para ello es preciso tomar en consideración que si un número cualquiera, por ejemplo **x**, se ***eleva al cuadrado*** nos dá otro número que llamaremos **n**, es decir:

$$x^2=n \quad ; \quad x^2-n=0$$

Esta ***igualdad*** podemos ***expresarla*** como:

$$x^2-(\sqrt{n})^2=0$$

Que es una ***diferencia de cuadrados***, la que se se puede ***expresar*** como ***producto***, es decir.

$$(x-\sqrt{n})(x+\sqrt{n})=0$$

Despejando los factores:

$x-\sqrt{n}=0 \quad \therefore \quad x=+\sqrt{n}$ y $x+\sqrt{n}=0 \quad \therefore \quad x=-\sqrt{n}$

O sea que:

$$x=\pm\sqrt{n}$$

Demostrándose que ***todo número tiene dos raíces***.

4.1 Fórmula General.

Por lo que se refiere concretamente a la ***ecuación de segundo grado*** con una ***incógnita***, hechas todas las reducciones necesarias, se presenta en la siguiente forma general.

$$ax^2+bx+c=0$$

En donde **a**, **b** y **c** son ***constantes arbitrarias***, con la condición de que **a** ≠ **o**.

Al primer ***término*** de la ***ecuación*** (ax^2) se le llama ***término cuadrático***, al segundo (**bx**), ***término lineal*** y al tercero (**c**), ***término independiente***.

A continuación, obtendremos la ***fórmula*** de resolución de esta ***ecuación***, utilizando la complementacion del ***trinomio cuadrado perfecto***.

Partiendo de la forma general $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$:

$$ax^2+bx=-c$$
$$a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=-c$$
$$a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}=-c$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos ***miembros*** se tiene:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Despejando a **x** se tiene:

$$\mathbf{x}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\mathbf{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}}{\mathbf{2a}} \qquad \textbf{(I)}$$

Que se conoce con el nombre de ***fórmula géneral para la solución de ecuaciones de segundo grado ó cuadráticas***.

Resolver una ***ecuación cuadrática*** es encontrar las ***raices*** de la ***ecuación***, es decir, los ***valores*** de la ***incógnita*** que satisfacen a la ***ecuación***, estos pueden ser números ***reales*** o ***complejos***.

Ejemplos:

1. Resolver la ecuación $\mathbf{2x^2=-11x-12}$. Se lleva la ecuación a la forma general $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$: De esta manera se tiene:

$$\mathbf{2x^2+11x+12=0}$$

Donde se observa que: **a = 2**, **b = 11** y **c = 12**. ***Sustituyendo*** en la ***formula general*** **(I)** se obtiene:

$$\mathbf{x}=\frac{-11\pm\sqrt{(11)^2-4(2)(12)}}{2(2)}=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\frac{-11\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{\mathbf{-11\pm5}}{\mathbf{4}}$$

De esta expresión se obtienen los ***valores*** de las ***raíces***:

$$x_1 = \frac{-11+5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{x_1 = -\frac{3}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-11-5}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2 = -4}$$

Podemos ver que las ***raices*** de la ***ecuación*** son ***reales*** y ***distintas***. Se puede **comprobar** la ***solución*** ***sustituyendo*** cada una de las ***soluciones*** en la ***ecuación*** dada.

2. **Resolver** $\mathbf{16x^2 + 24x + 9 = 0}$. Se tiene que: **a = 16**, **b = 24** y **c = 9**, ***sustituyendo*** en la ***formula general*** **(I)**:

$$\mathbf{x} = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)} = \frac{-24 \pm \sqrt{576-576}}{32} = \mathbf{\frac{-24 \pm 0}{32}}$$

Por lo que:

$$\mathbf{x_1} = \frac{-24}{32} = -\mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$\mathbf{x_2} = \frac{-24}{32} = -\mathbf{\frac{3}{4}}$$

Se observa que las ***raices*** de la ecuación son ***reales*** e ***iguales***.

3. Resolver la ecuación $\mathbf{x^2 - 10x + 41 = 0}$. Se tiene que: **a = 1**, **b = - 10** y **c = 41**. Sustituyendo en al ***formula general*** **(I)** se obtiene:

$$\mathbf{x} = \frac{10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(1)(41)}}{2(1)} = \frac{10 \pm \sqrt{100-164}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{10 \pm 8\sqrt{-1}}{2} = \mathbf{\frac{10 \pm 8i}{2}}$$

(Recordar que $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$). Por lo que:

$$\mathbf{x_1} = \frac{10+8i}{2} = 5+4i \quad \therefore \quad \mathbf{x_1 = 5+4i}$$

$$\mathbf{x_2} = \frac{10-8i}{2} = 5-4i \quad \therefore \quad \mathbf{x_2 = 5-4i}$$

Las ***raices*** de la ***ecuación*** son ***complejas conjugadas***.

Cuando la ***ecuación*** de ***segundo grado*** es tal que el coeficiente de $\mathbf{x^2}$ no es un número cualquiera, si no la ***unidad***, es decir, cuando la ecuación tiene la forma: $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$, aunque se puede aplicar para su ***solución*** la ***fórmula géneral*** ya conocida, frecuentemente es preferible aplicar la ***formula particular*** y exclusiva de este caso, la que se obtiene tomando como base la ***fórmula géneral***.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2-4c}{4}}$$

Quedando finalmente.

$$\mathbf{x=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}} \qquad \textbf{(II)}$$

Ejemplo. **Resolver** la ***ecuación*** $\mathbf{x^2+12x+35=0}$. Se tiene: **b = 12** y **c = 35**

Sustituyendo en la ***fórmula*** **(II)** obtenida para esta forma, se tiene:

$$x=\frac{-12}{2}\pm\sqrt{\frac{(12)^2}{4}-35}=6\pm\sqrt{\frac{144}{4}-35}=-6\pm\sqrt{36-35}$$
$$\mathbf{x=-6\pm1}$$

Por lo tanto:

$$x_1=-6+1=-5 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1=-5}$$
$$x_2=-6-1=-7 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2=-7}$$

4.2 Propiedades de las raices de la ecuacion de segundo grado.

Tomando como base la ***ecuación*** de la forma: $\mathbf{x^2+bx+c=0}$ y su ***fórmula particualr*** **(II)**, cuyas ***raices*** son:

$$\mathbf{x_1=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{x_2=-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}} \qquad \textbf{(2)}$$

Sumando las ***raices*** tenemos:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=-b \quad \therefore \quad \mathbf{x_1+x_2=-b} \qquad \textbf{(III)}$$

Si ***multiplicamos*** ahora las ***raices*** se tiene:

$$x_1x_2 = \left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\right)\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\right) =$$
$$= \frac{b^2}{4}+\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\right)^2 =$$
$$= \frac{b^2}{4}-\left(\frac{b^2}{4}-c\right) = \frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c$$

Por tanto:

$$\mathbf{x_1x_2 = c} \qquad \textbf{(IV)}$$

Conociendo estas dos ***propiedades*** **(III)** y **(IV)** podemos plantear facilmente una ***ecuación*** de ***segundo grado*** cuyas ***raices*** sean de la ***naturaleza*** que queramos.

Ejemplos:

1. **Obtener** la ***ecuación*** cuyas ***soluciones*** son: $\mathbf{x_1 = 8+3i}$ y $\mathbf{x_2 = 8-3i}$.

Aplicando la ***propiedad*** **(III)**, o sea ***sumando*** las ***raices*** se tiene:

$$\mathbf{x_1+x_2} = (8+3i)+(8-3i) = 16 = -b \quad \therefore \quad \mathbf{b = -16}$$

Aplicando la ***propiedad*** **(IV)**, o sea ***multiplicando*** las ***raices*** obtenemos:

$$\mathbf{x_1x_2} = (8+3i)(8-3i) = 64-9i^2 = 64+9 = 73 = c \quad \therefore \quad \mathbf{c = 73}$$

La ***ecuación*** es de la forma:

$$\mathbf{x^2-16x+73 = 0}$$

Comprobación; ***Aplicando*** la ***formula*** ***particular*** **(II)** para este caso.

$$\mathbf{x} = \frac{+16}{2}\pm\sqrt{\frac{16^2}{4}-73} = 6\pm\sqrt{64-73} = 8\pm\sqrt{-9} = \mathbf{8\pm 3i}$$

Es decir que:

$$\mathbf{x_1 = 8+3i}$$
$$\mathbf{x_2 = 8-3i}$$

2. **Obtener** la ***ecuación*** cuyas ***raices*** son $\mathbf{x_1 = \frac{1}{3}}$ y $\mathbf{x_2 = -2}$:

Sumando, o sea aplicando la ***propiedad*** **(III)**, tenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{5}{3} = -b \quad \therefore \quad \mathbf{b = \frac{5}{3}}$$

Multiplicando según la ***propiedad*** **(IV)**:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{1}{3}\right)(-2) = -\frac{2}{3} = c \quad \therefore \quad \mathbf{c = -\frac{2}{3}}$$

Por lo tanto, la ***ecuación*** es:

$$\mathbf{x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0}$$

Quitando ***denominadores*** tiene la forma: $\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$

4.3 Solución rápida de la ecuación de segundo grado.

De la misma forma, *aplicando* las dos ***propiedades*** ya conocidas de ***suma*** y ***multiplicación*** de la ***raices***, dada la ***ecuación*** de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$, podemos hacer la ***solución rápida*** de las mismas.

Procedimiento: Encontrar ***dos números*** que ***sumados*** , ***propiedad*** **(III)**, nos dé el ***coeficiente*** (**-b**) del término de ***primer grado*** y que ***muliplicados***, ***propiedad*** **(IV)**, su ***producto*** sea el término ***independiente*** (**c**) de la ***ecuación*** dada:

Ejemplo 1. **Resolver** la ***ecuación***: $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$.

Sus ***raices*** son: $\mathbf{x_1 = 2}$ y $\mathbf{x_2 = 3}$

Según las ***propiedades*** **(III)** y **(IV)**, ***sumando*** se tiene: $2 + 3 = 5 = -b \quad \therefore \quad \mathbf{b = -5}$

Y ***multiplicando*** se tiene: $(2)(3) = 6 = c \quad \therefore \quad \mathbf{c = 6}$

Ejemplo 2. **Resolver** la ***ecuación*** $\mathbf{x^2 - 7x - 30 = 0}$:

Sus ***raices*** son: $\mathbf{x_1 = -3}$ y $\mathbf{x_2 = 10}$

Ejemplo 3. **Resolver** la ***ecuación*** $\mathbf{x^2 - 2x - 63 = 0}$:

Sus ***raices*** son: $\mathbf{x_1 = -7}$ y $\mathbf{x_2 = +9}$

4.4 *Naturaleza* de las raíces de la ecuacion de segundo grado.

Refiriendonos nuevamente a la ***ecuación general*** $ax^2 + bx + c = 0$, que se resuelve con la ***fórmula general*** **(I)**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(I)}$$

En donde el ***binomio*** $b^2 - 4ac$, se llama ***discriminante*** porque sirve para distinguir la ***naturaleza de las raíces***, generalmente se representa por la letra **D**.

Así tenemos que:

Si $D = b^2 - 4ac > 0$; las ***raices*** son ***reales*** y ***desiguales***.

Si $D = b^2 - 4ac = 0$; las ***raices*** son ***reales*** e ***iguales***.

Si $D = b^2 - 4ac < 0$; las ***raices*** son ***complejas*** y ***conjugadas***.

Ejemplo 1. **Determinar** la *naturaleza* de las ***raíces*** de la ***ecuación*** $9x^2 - 24x + 16 = 0$:

Se puede ver que: **a = 9**, **b = - 24** y **c = 16**. *Sustituyendo* en el ***discriminante***:

$$D = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(16) = 576 - 576 = 0 \quad \therefore \quad D = 0$$

El ***discriminante*** **D=0**, por lo que las ***raíces*** son ***reales*** e ***iguales***.

Ejemplo 2. **Determinar** la *naturaleza* de las ***raíces*** de la ***ecuación*** $2x^2 + 3x - 20 = 0$:

Se observa que: **a = 2**, **b = 3** y **c = -20**

Sustituyendo en el ***discriminante***.

$$D = (3)^2 - 4(2)(-20) = 9 + 160 = 169$$

169 > 0; por lo que el ***discriminante*** es: **D > 0**

Por tanto, las ***raices*** son ***reales*** y ***desiguales***.

Ejemplo 3. **Determinar** la *naturaleza* de las ***raíces*** de la ***ecuación*** $5x^2 - 6x + 8 = 0$:

Se puede ver que: **a = 5**, **b = - 6** y **c = 8**

Sustituyendo en el ***discriminante***:

$$D = (-6)^2 - 4(5)(8) = 36 - 160 = -124 \quad \therefore \quad D < 0$$

Las ***raices*** son ***complejas*** y ***conjugadas***.

4.5 Ecuaciones incompletas de segundo grado

Primer caso. Cuando la ***ecuación*** carece de ***término independiente***, o sea cuando se presenta en la forma: $\mathbf{ax^2+bx=0}$, aunque se puede resolver con la ***fórmula general*** resulta preferible hacerlo con las ***fórmulas*** que deduciremos enseguida.

Factorizando la ***ecuación*** dada,se tiene:

$$x(ax+b)$$

Ahora ***despejando*** a **x**:

$$x=\frac{0}{ax+b}$$

Por lo que una de las ***raíces*** es:

$$\mathbf{x_1=0} \qquad \mathbf{(1)}$$

De la misma forma ***despejando***:

$ax+b=\frac{0}{x}=0$, es decir que $ax+b=0$.

Por lo que la otra ***raíz*** es:

$$\mathbf{x_2=-\frac{b}{a}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ejemplo 1: **Resolver** la ***ecuación*** $\mathbf{8x^2-7x=0}$:

Se ve que: **a = 8** y **b = - 7**. ***Sustituyendo*** en **(1)** y **(2)**, se tiene:

$$\mathbf{x_1=0} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2=\frac{7}{8}}$$

Ejemplo 2. **Resolver** la ***ecuación***: $\mathbf{5y^2-6y=0}$

Es decir que: **a = 5** y **b = - 6**. Por lo que las ***soluciones***, según **(1)** y **(2)** son:

$$\mathbf{x_1=0} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2=\frac{6}{5}}$$

Ejemplo 3. **Resolver** la ***ecuación***: $\mathbf{5x^2+9x=0}$

Procediendo de igual forma, las ***raíces*** son:

$$\mathbf{x_1=0} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2=-\frac{9}{5}}$$

Segundo caso. Cuando en la ***ecuación*** no interviene el ***término lineal*** es decir, cuando tiene la forma $ax^2 + c = 0$; que también se puede **resolver** con la ***fórmula general*** o particularmente con la que obtendremos enseguida.

Despejando a **x**:

$$ax^2 = -c \quad \therefore \quad x^2 = \frac{-c}{a}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos ***miembros***:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Por lo que:

$$\mathbf{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}} \qquad \textbf{(3)}$$

Ejemplo 1. **Resolver** la ***ecuación***: $9x^2 - 49 = 0$

Aplicando la ***fórmula*** **(3)** anterior:

$$x = \pm\sqrt{\frac{49}{9}} = \pm\frac{7}{3}$$

Es decir que:

$$x_1 = \frac{7}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{7}{3}$$

Ejemplo 2. **Resolver** la ***ecuación***: $4x^2 + 25 = 0$

Según la ***fórmula*** **(3)**:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-25}{4}} = \pm\frac{5}{2}i$$

Por lo tanto las ***raíces*** son ***imaginarias***:

$$x_1 = \frac{5}{2}i \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{5}{2}i$$

Ejemplo 3. **Resolver** la ***ecuación***: $3x^2 - 27 = 0$

Según la ***fórmula*** **(3)**:

$$x = \pm\sqrt{\frac{27}{3}} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Las ***raíces*** son:

$$x_1 = +3 \quad \text{y} \quad x_2 = -3$$

4.6 Solucion de ecuaciones de segundo grado por el método de factorizacion.

El método de ***factorización*** para la ***solución*** de este tipo de ***ecuaciones*** se apoya en el principio siguiente.

El producto de dos ó más factores es cero si uno cualquiera de los factores es igual a cero.

Para la ***solución*** de ***ecuaciones*** de ***segundo grado*** por el método de ***factorización*** se procede de la siguiente manera:

1º. Se **pasan** todos los ***términos*** de la ***ecuación*** al primer ***miembro*** para obtener la forma general: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

2º. Se ***factorizan*** los ***términos*** en el primer ***miembro***, en ***factores*** de ***primer grado***.

3º. Se **iguala** cada uno de los ***factores*** con **cero** y se resuelven las ***ecuaciones*** de ***primer grado*** así formadas.

Ejemplo 1. **Resolver** por el ***metodo de factorización*** la ***ecuación***: $\mathbf{2x^2 = x + 6}$

1º. Se lleva a la ***forma general***:

$$\mathbf{2x^2 - x - 6 = 0}$$

2º. Se ***factoriza***:

$$2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0$$
$$2x(x-2) + 3(x-2) = 0$$
$$(2x+3)(x-2) = 0$$

3º. ***Igualando*** a **cero** cada ***factor*** y ***despejándo***.

$$2x + 3 = 0 \quad ; \quad 2x = -3 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1 = -\frac{3}{2}}$$

Ahora el otro ***factor***:

$$x - 2 = 0 \quad ; \quad x = 2 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2 = 2}$$

Ejemplo 2. **Resolver** por ***factorización*** la ***ecuación***: $\mathbf{3x^2 - 7x + 2 = 0}$

Procediendo en la misma forma que en el **ejemplo** anterior, ***factorizando***:

$$3x^2 - 6x - x + 2 = 0$$
$$3x(x-2) - (x-2) = 0$$
$$(x-2)(3x-1) = 0$$

Igualando a **cero** y ***despejando*** cada uno de los ***factores***.

$$x-2=0 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1=2}$$
$$3x-1=0 \quad ; \quad 3x=1 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2=\frac{1}{3}}$$

Ejemplo 3. **Resolver** por ***factorización*** la ***ecuación***: $\mathbf{6x-x^2-9=0}$

Ordenando:

$$\mathbf{-x^2+6x-9=0}$$

Cambiando de ***signo***, ***multiplicando*** por (**- 1**).

$$\mathbf{x^2-6x+9=0}$$

Factorizando:

$$x^2-3x-3x+9=0$$
$$x(x-3)-3(x-3)=0$$
$$(x-3)(x-3)=0$$

Igualando a **cero** y ***despejando***.

$$x-3=0 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1=3}$$
$$x-3=0 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2=3}$$

Ejemplo 4. **Resolver** por ***factorización*** la ***ecuación***: $\mathbf{(x+4)^2=2x(5x-1)-7(x-2)}$

Desarrollando tenemos:

$$x^2+8x+16=10x^2-2x-7x+14$$

Ordenando y ***simplificando***.

$$-9x^2+17x+2=0$$

Cambiando de ***signo***, ***multiplicando*** por (**- 1**).

$$9x^2-17x-2=0$$

Factorizando:

$$9x^2-18x+x-2=0$$
$$9x(x-2)+(x-2)$$
$$(x-2)(9x+1)=0$$

Igualando a **cero** y ***despejando***.

$$x-2=0 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1=2}$$
$$9x+1=0 \quad ; \quad 9x=-1 \quad \therefore \quad \mathbf{x_2=-\frac{1}{9}}$$

4.7 Solucion de ecuaciones de segundo grado, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Una ***ecuación*** de ***segundo grado*** siempre puede ***resolverse*** por este ***método***, cuyo ***procedimiento*** es el siguiente:

1º. Obtenida la forma ***general de la ecuación de segundo grado*** $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, se ordena de tal manera que en el primer ***miembro*** estén los ***términos cuadrático*** y ***lineal*** y en el segundo ***miembro*** el término ***independiente***. Es decir:

$$\mathbf{ax^2 + bx = -c}$$

2º. Se ***dividen*** a ambos ***miembros*** entre el ***coeficiente*** de $\mathbf{x^2}$.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

3º. Para ***completar*** el ***trinomio cuadrado perfecto*** en el primer ***miembro***, al ***coeficiente*** resultante de **x**, se le saca ***mitad*** es decir se ***divide*** entre **2** y al ***cociente*** resultante, se ***eleva al cuadrado*** y esta ***cantidad*** se ***suma*** al primer ***miembro*** para ***completar*** el ***trinomio cuadrado perfecto***, como se puede ver enseguida.

El **coeficiente** es:

$$\frac{b}{a}$$

Dividiendo entre **2** queda:

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a}$$

Se ***eleva al cuadrado***, por lo que:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Este ***cociente*** se ***suma*** en el primer ***miembro***. Es decir que:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{-c}{a}$$

4º. Esta misma ***cantidad*** se ***suma*** tambien, al segundo ***miembro*** para conservar la ***igualdad*** es decir.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

5º. Se ***factoriza*** el primer ***miembro*** es decir al ***trinomio cuadrado perfecto***:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

6º. Se ***extrae la raíz cuadrada*** en ambos ***miembros*** de la ***igualdad***:

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

7º. Se ***despeja*** la ***incognita***.

$$\mathbf{x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Ejemplo 1. **Resolver** la ***ecuación***: $\mathbf{2x^2+3x-2=0}$

1º. Se ***ordena***:

$$2x^2+3x=2$$

2º. Se ***dividen*** ambos ***miembros*** por el ***coeficiente*** de $\mathbf{x^2}$:

$$\frac{2x^2}{2}+\frac{3x}{2}=\frac{2}{2}$$

$$x^2+\frac{3}{2}x=1$$

3º. Al ***coeficiente*** de **x** se ***divide*** entre **2** y se ***eleva al cuadrado***.

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\mathbf{\frac{9}{16}}$$

Es la ***cantidad*** que se *suma* para completar ***trinomio cuadrado perfecto*** en el primer miembro.

4º. Esta misma cantidad se ***suma*** al segundo ***miembro*** también, para que no se altere la ***igualdad***.

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=1+\frac{9}{16}$$

5º. Se ***factoriza*** el ***trinomio cuadrado***.

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

6º. Se ***extrae raíz cuadrada*** a ambos ***miembros***.

$$\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{5}{4}$$

7º. Se ***despeja*** la ***incognita***.

$$\mathbf{x=-\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4}}$$

Por lo que las ***raíces*** de la ***ecuación*** dada son:

$$x_1=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{2}{4}\quad\therefore\quad \mathbf{x_1=\frac{1}{2}}$$

$$x_2=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-\frac{8}{4}\quad\therefore\quad \mathbf{x_2=-2}$$

Ejemplo 2. **Resolver** la ***ecuación***: $\mathbf{4x^2=4x+11}$

$$4x^2-4x=11$$

$$\frac{4x^2}{4}-\frac{4x}{4}=\frac{11}{4}$$

El ***coeficiente*** de **x** es **-1**, se ***divide*** entre **2** y se ***eleva al cuadrado***.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

Es la ***cantidad*** que se ***agrega*** a ambos ***miembros***:

$$x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{11}{4}+\frac{1}{4}$$

Se *factoriza* el ***trinomio cuadrado***:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{12}{4}=3$$

Se *extrae raíz cuadrada* an ambos ***miembros***:

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{3}$$
$$x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{3}$$
$$\mathbf{x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}}$$

Es decir que las ***raíces*** son:

$$\mathbf{x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{3}}$$
$$\mathbf{x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}}$$

4.8 Ecuaciones reducibles a cuadraticas.

Algunas ***ecuaciones*** de ***cuarto grado*** pueden *reducirse* a ***ecuaciones*** de ***segundo grado***, lo mismo con ***ecuaciones*** que contienen a la ***incógnita*** en ***denominadores*** o en ***subradicales***, como veremos en los **ejemplos** siguientes.

Ejemplo 1. ***Resolver*** la ***ecuación***: $\mathbf{16x^4-65x^2+4=0}$

Hacemos: $\mathbf{U=x^2}$ y *sustituimos* en la ***ecuación*** dada.

$$\mathbf{16U^2-65U+4=0}$$

Nos ha quedado una ***ecuación*** de ***segundo grado***.

Resolviendo por ***factorización***, tenemos:

$$16U^2-64U-U+4=0$$
$$16U(U-4)-(U-4)=0$$
$$(16U-1)(U-4)=0$$
$$16U-1=0 \quad \therefore \quad \mathbf{U_1=\frac{1}{16}}$$
$$U-4=0 \quad \therefore \quad \mathbf{U_2=4}$$

Igualando cada ***valor*** de **U** con $\mathbf{x^2}$. Para, $\mathbf{U_1 = \frac{1}{16}}$ se tiene:

$$x^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}$$

Para $\mathbf{U_2 = 4}$ se tiene:

$$x^2 = 4 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Las ***soluciones*** de la ***ecuación*** dada son:

$$\mathbf{x_1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad x_2 = -\frac{1}{4} \quad ; \quad x_3 = 2 \quad ; \quad x_4 = -2}$$

Ejemplo 2. **Resolver** la ***ecuación***.

$$\mathbf{(x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x) - 3 = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

Haciendo:

$$\mathbf{U = x^2 - 4x} \qquad \textbf{(2)}$$

Tenemos, ***sustituyendo*** en **(1)**:

$$\mathbf{U^2 + 2U - 3 = 0}$$

Resolviendo por ***factorización***:

$$(U+3)(U-1) = 0$$

Resultando que: $\mathbf{U_1 = -3}$ y $\mathbf{U_2 = 1}$

Segun la ***ecuación*** **(2)**, para $\mathbf{U_1}$ ***resulta***:

$$x^2 - 4x = -3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolviendo por ***factorización***:

$$(x-3)(x-1) = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1 = 3 \text{ y } x_2 = 1}$$

Para: $\mathbf{U_2}$ ***resulta***: $x^2 - 4x = 1 \quad ; \quad \mathbf{x^2 - 4x - 1 = 0}$

Aplicando la ***fórmula general***.

$$\mathbf{x} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \mathbf{2 \pm \sqrt{5}}$$

Por lo que:

$x_3 = 2+\sqrt{5}$ y $x_4 = 2-\sqrt{5}$

Ejemplo 3. **Resolver** la ***ecuación***: $x-2=\sqrt{x+10}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-2)^2 = \left(\sqrt{c+10}\right)^2$$
$$x^2-4x+4 = x+10$$
$$x^2-5x-6=0$$

Factorizando: $(x-6)(x+1)=0$. Las ***raíces*** son:

$x_1 = 6$ y $x_2 = 1$

4.9 Sistemas de ecuaciones con dos incognitas donde una ecuacion es de segundo grado y la otra es lineal.

Si un ***sistema*** tiene una ***ecuación lineal*** y otra ***cuadrática***, las ***soluciones*** pueden obtenerse facilmente, basta con ***despejar*** cualquiera de las ***incognitas*** de la ***ecuación lineal*** y ***sustituirla*** en la ***ecuación cuadrática*** la que se resuelve, los ***valores*** obtenidos se ***sustituyen*** en cualquiera de las ***ecuaciones originales***, siendo más fácil en la ***ecuación lineal***.

Ejemplo 1. **Resolver** el ***sistema***:

$2x^2 + y^2 = 9$ **(1)**

$x - y = 1$ **(2)**

De la ***ecuación*** **(2)**:

$x = y+1$ **(3)**

Sustituyendo **(3)** en **(1)**:

$$2(y+1)^2 + y^2 = 9$$
$$2(y^2+2y+1)+y^2 = 9$$
$$2y^2+4y+2+y^2 = 9$$
$$\mathbf{3y^2+4y-7=0}$$

Factorizando:

$$3y^2+7y-3y-7=0$$
$$3y(y-1)+7(y-1)=0$$
$$\mathbf{(y-1)(3y+7)=0}$$

Igualando a **cero** cada ***factor***:

$$y - 1 = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{y_1 = 1}$$

$$3y + 7 = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{y_2 = -\frac{7}{3}}$$

Sustituyendo estos ***valores*** en **(3)**: Para, y_1;

$$x = 1 + 1 = 2 \quad \therefore \quad \mathbf{x_1 = 2}$$

Para y_2:

$$x = -\frac{7}{3} + 1 = -\frac{4}{3} \quad \therefore \quad \mathbf{x_2 = -\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 2. **Resolver** el ***sistema***.

$$\mathbf{x^2 - 2x + y - 1 = 0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{2x - 3y = 5} \qquad \textbf{(2)}$$

De la ***ecuación*** **(2)**:

$$3y = 2x + 5 \quad \therefore \quad \mathbf{y = \frac{2x + 5}{3}} \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo **(3)** en **(1)**:

$$x^2 - 2x + \frac{2x + 5}{3} - 1 = 0$$

Simplificando y ***multiplicando*** por **3**.

$$3x^2 - 6x + 2x + 5 - 3 = 0$$

$$\mathbf{3x^2 - 4x + 2 = 0}$$

Resolviendo:

$$\mathbf{x} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{2}}{6} = \mathbf{\frac{2 + i\sqrt{2}}{3}}$$

La ***solución*** es:

$$\mathbf{x_1 = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}} \quad y \quad \mathbf{x_2 = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}}$$

Sustituyendo estos ***valores*** en la ***ecuación*** **(3)** se tiene: para x_1:

$$y_1 = \frac{2\left(\frac{2+i\sqrt{2}}{3}\right)+5}{3} = \frac{4+2i\sqrt{2}+15}{9} \quad \therefore \quad \mathbf{y_1} = \frac{\mathbf{19+2i\sqrt{2}}}{\mathbf{9}}$$

Para x_2, tenemos:

$$y_2 = \frac{2\left(\frac{2-i\sqrt{2}}{3}\right)+5}{3} = \frac{4-2i\sqrt{2}+15}{9} \quad \therefore \quad \mathbf{y_2} = \frac{\mathbf{19-2i\sqrt{2}}}{\mathbf{9}}$$

4.10 Sistema de dos ecuaciones cuadraticas con dos incognitas

Este tipo de ***sistemas*** de ***ecuaciones*** se ***resuelve*** por los ***métodos*** ya vistos para los ***sistemas de ecuaciones de primer grado***, siendo el método de ***suma*** ó ***resta*** el más recomendable, sin olvidar que se está trabajando con términos ***cuadráticos***.

Ejemplo. **Resolver** el ***sistema***:

$$\mathbf{x^2 - y^2 = 8} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\mathbf{x^2 + 2y^2 = 14} \qquad \textbf{(2)}$$

Restando la ***ecuación*** **(1)** de la ***ecuación*** **(2)**, se tiene:

$$3y^2 = 6$$

$$y^2 = \frac{6}{3} = 2 \quad \therefore \quad \mathbf{y = \pm\sqrt{2}}$$

Es decir que:

$$\mathbf{y_1 = \sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \mathbf{y_2 = -\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estos ***valores*** en la ***ecuación*** **(1)**. Para y_1:

$$x^2 - (\sqrt{2})^2 = 8$$

$$x^2 - 2 = 8 \quad ; \quad x^2 = 10 \quad \therefore \quad \mathbf{x = \pm\sqrt{10}}$$

$$\mathbf{x_1 = \sqrt{10}} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2 = -\sqrt{10}}$$

Para y_2:

$$x^2 - (-\sqrt{2})^2 = 8$$

$$x^2 - (+2) = 8 \quad ; \quad x^2 = 10 \quad \therefore \quad \mathbf{x = \pm 10}$$

$$\mathbf{x_3 = \sqrt{10}} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_4 = -\sqrt{10}}$$