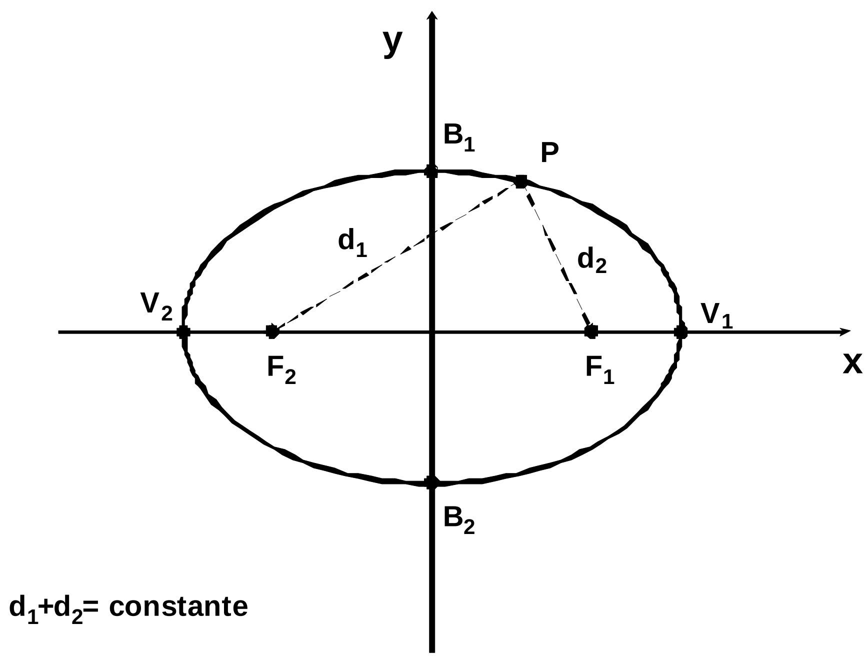
MATEMÁTICAS BÁSICAS

ELIPSE

DEFINICIÓN DE ELIPSE

Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos en el plano es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman *focos*. Gráficamente esto es:



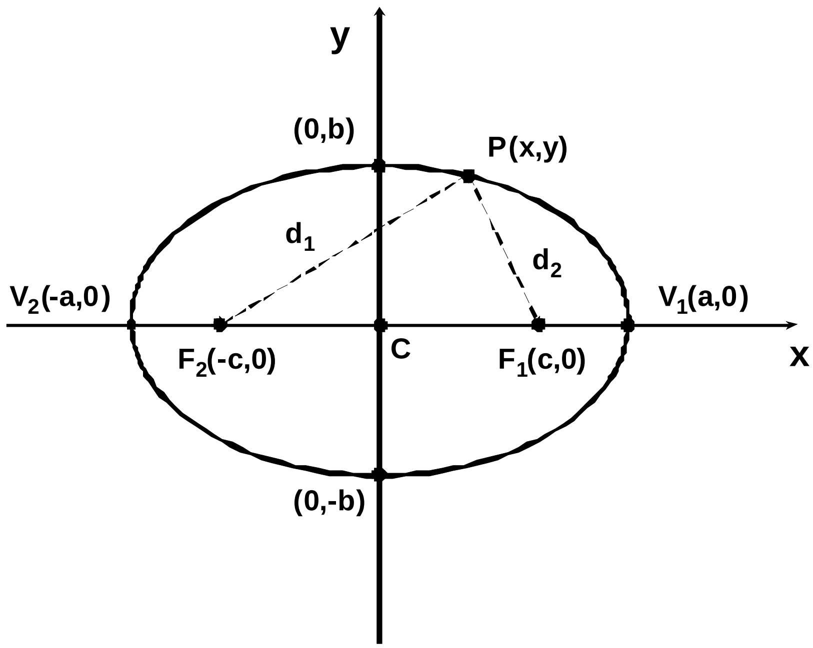
Con relación a la figura, el segmento de recta $\overline{V_2V_1}$ que pasa por los focos es el *eje mayor*. La mediatriz $\overline{B_2B_1}$ del eje mayor es el *eje menor*. Cada extremo del eje mayor V_1 y V_2 se llama vértice. El punto medio del segmento $\overline{F_2F_1}$ se llama *centro* de la elipse. La distancia del centro a cada vértice se llama *semieje mayor* y la distancia del centro a cada extremo del eje menor se conoce como *semieje menor*.

Para dibujar una elipse lo que se necesita es una cuerda, dos alfileres y un lápiz. Se colocan los dos alfileres en una hoja de papel (éstos son los focos de la elipse). Se toma un pedazo de cuerda mayor que la distancia entre los dos alfileres (ésta representa la constante de la definición) y se sujetan sus extremos a cada alfiler. Finalmente, se pone la punta del lápiz bajo la cuerda y se mueve hacia un mismo lado. La figura resultante es (por definición) una elipse. Se obtienen diferentes formas de elipses según la ubicación de los alfileres y la longitud de la cuerda que los une.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE HORIZONTAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

A partir de la definición de la elipse y de la expresión para calcular la distancia entre dos puntos, se puede deducir la ecuación de una elipse en un sistema de coordenadas rectangulares.

Si los vértices se ubican en las coordenadas $V_1(a,0)$ y $V_2(-a,0)$, los focos están en $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, el eje mayor de la elipse es coincidente al eje x, y si su centro se ubica en el origen, tiene la siguiente forma:



Si el punto P está en cualquiera de los vértices, la suma de distancias d_1+d_2 da como resultado $a-c+a+c$, por lo que la suma constante se establece en $2a, \quad a>0$.

El punto $P(x,y)$ pertenecerá a la elipse si y sólo si: $d_1+d_2=2a$,
por lo tanto:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

que equivale a:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

desarrollando:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$

eliminando términos iguales:

$2xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc$

que equivale a:

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc$

dividiendo todo por 4:

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$

elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros:

$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=(a^2-xc)^2$

$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=(a^2-xc)^2$

$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=(a^2-xc)^2$

$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$

reduciendo términos semejantes:

$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$

acomodando convenientemente:

$x^2a^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$

factorizando x^2 en el primer miembro y a^2 en el segundo miembro:

$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$

si se denota como b^2 a la expresión a^2-c^2 y se sustituye se tiene:

$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

dividiendo por a^2b^2 toda la expresión:

$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

finalmente queda como:

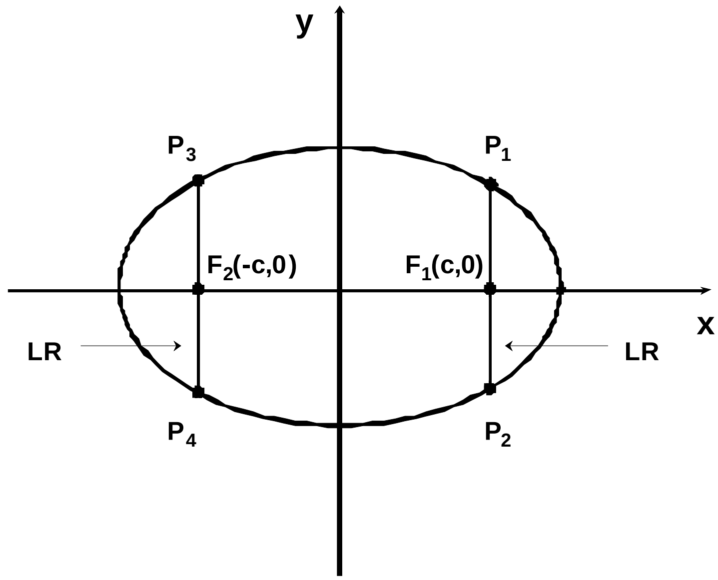
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ecuación conocida como *ecuación ordinaria* o *canónica de la elipse horizontal con centro en el origen*, de semieje mayor a y de semieje menor b.

LONGITUD DE LOS LADOS RECTOS DE UNA ELIPSE HORIZONTAL

Para cualquier elipse, los segmentos perpendiculares al eje mayor que pasan por sus focos de la elipse con extremos sobre la curva se denominan *lados rectos* (LR).

Gráficamente es:



Para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto, que pasa por el foco F_1, se sustituye el valor de x por c en la ecuación despejada para y:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$$

pero como $b^2=a^2-c^2$, se tiene:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b}{a}b=\pm\frac{b^2}{a}$$

por lo cual, las coordenadas de los extremos P_1 y P_2 del lado recto asociado a F_1 son:

$$P_1\left(c,\frac{b^2}{a}\right) \text{ y } P_2\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$$

Similarmente, para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto que pasa por el foco F_2, el procedimiento es idéntico al tomar en cuenta que los puntos P_3 y P_4 son simétricos a los puntos P_1 y P_2 con respecto al eje x, con lo que se tienen la mismas ordenadas respectivas, por lo que las coordenadas de los extremos P_3 y P_4 del lado recto asociado a F_2 son:

$$P_3\left(-c,\frac{b^2}{a}\right) \text{ y } P_4\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$$

La longitud, medida en unidades lineales (u), de cada lado recto viene dado por la diferencia de sus ordenadas. Por lo tanto:

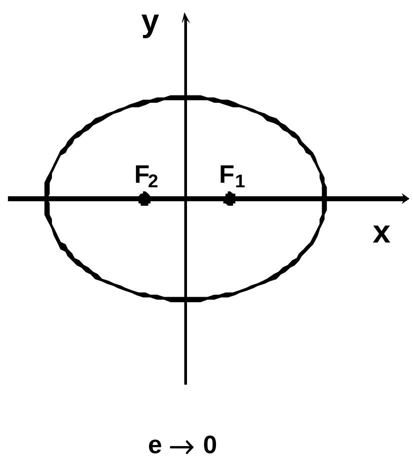
$$LR=\frac{2b^2}{a}.$$

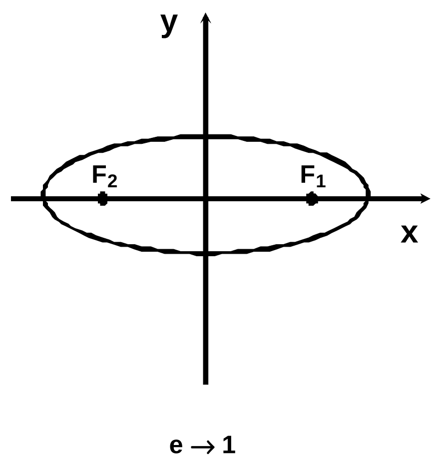
EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE

Para cualquier elipse, a la relación que existe entre c y a, se le conoce como excentricidad de una elipse y se denota con la letra e:

$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad indica el grado de *achatamiento* que posea. Nótese como siempre se cumple que $0 < e < 1$. Esto se explica de la siguiente manera: si a se mantiene constante y el valor de c se hace muy pequeño, el cociente tiende a cero, entonces la elipse tiende a una redondez debido a que la distancia interfocal es muy corta. Por el contrario, si a se sigue manteniendo constante pero c se hace muy grande, el cociente tiende a uno y la elipse toma una forma muy achatada. Gráficamente, esto se observa en las siguientes figuras:





Ejemplo.
Calcular las longitudes de los semiejes mayor y menor, las coordenadas de los vértices, focos, extremos del eje menor, la longitud del lado recto y la excentricidad de la siguiente elipse: $9x^2 + 16y^2 = 144$

Solución.
Dividiendo toda la ecuación entre 144:

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 4, \quad b = 3.$$

por lo tanto:

$V_1(4,0)$ y $V_2(-4,0)$, $B_1(0,3)$ y $B_2(0,-3)$

por otra parte, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

los focos se ubican en:

$F_1\left(\sqrt{7},0\right)$ y $F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$.

La excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$. La longitud del lado recto es: $LR=\frac{2(3)^2}{4}=\frac{2(9)}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}\,u.$

Ejemplo.
Obtener la ecuación de la elipse y sus características si se sabe que un extremo del eje menor está en $(0,-3)$ y un foco en $(2,0)$.

Solución.
De los datos se deduce que: $b=3$ y $c=2$
Obteniendo a:

$$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

así que la ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{13}\right)^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

Los vértices se ubican en: $V_1\left(\sqrt{13},0\right)$ y $V_2\left(-\sqrt{13},0\right)$
El otro foco está en: $F_2(-2,0)$.

La excentricidad es: $e=\frac{2}{\sqrt{13}}$. La longitud del lado recto es: $LR=\frac{2(3)^2}{\sqrt{13}}=\frac{2(9)}{\sqrt{13}}=\frac{18}{\sqrt{13}}\;u.$

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE VERTICAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

El procedimiento para obtener la ecuación de la elipse vertical es muy similar al que se hizo con la elipse horizontal.

En este caso, los vértices y focos están sobre el eje y en las coordenadas $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$, $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$, respectivamente, y aplicando la expresión de distancia entre dos puntos se tiene que:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-(-c))^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$$

que equivale a:

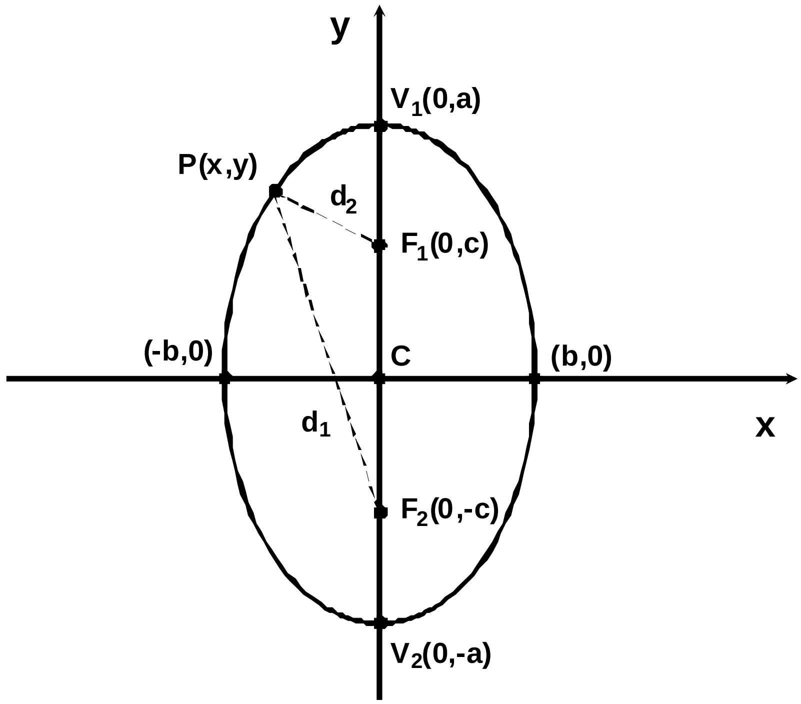
$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

después de desarrollar, eliminar radicales y simplificar, se llega a:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

ecuación conocida como ecuación ordinaria o canónica de la elipse vertical con centro en el origen, de semieje mayor a y de semieje menor b.

La elipse en este caso tendría la siguiente forma:



LONGITUD DE LOS LADOS RECTOS DE UNA ELIPSE VERTICAL

Para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto de una elipse vertical, que pasa por el foco F_1, se sustituye el valor de y por c en la ecuación despejada para x:

$$x = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

pero como $b^2 = a^2 - c^2$, se tiene:

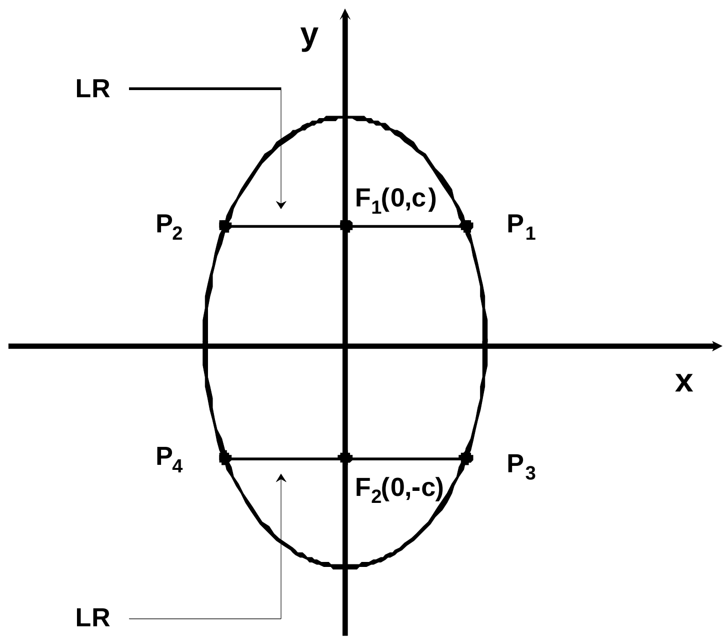
$$x = \pm \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \pm \frac{b}{a} b = \pm \frac{b^2}{a}$$

por lo cual, las coordenadas de los extremos P_1 y P_2 del lado recto asociado a F_1 son:

$$P_1\left(\frac{b^2}{a}, c\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{b^2}{a}, c\right)$$

Similarmente, para encontrar las coordenadas de los extremos del lado recto que pasa por el foco F_2, el procedimiento es idéntico al tomar en cuenta que los puntos P_3 y P_4 son simétricos a los puntos P_1 y P_2 con respecto al eje y, con lo que se tienen la mismas ordenadas respectivas, por lo que las coordenadas de los extremos P_3 y P_4 del lado recto asociado a F_2 son:

$$P_1\left(\frac{b^2}{a}, -c\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{b^2}{a}, -c\right)$$



La longitud, medida en unidades lineales (u), de cada lado recto viene dado por la diferencia de sus abscisas. Por lo tanto:

$$LR = \frac{2b^2}{a}.$$

Ejemplo.
Obtener todas las características de la elipse vertical con centro en el origen, que tenga un vértice en $(0,-6)$ y excentricidad $e = \frac{2}{3}$.

Solución:
Del vértice se deduce que $a = 6$, por tanto:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{c}{6} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{12}{3} = 4$$

por otra parte se sabe que:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

por lo tanto el otro vértice se ubica en: $V_1(0,6)$

las coordenadas de los extremos del eje mayor son: $B(2\sqrt{5},0)$, $B'(-2\sqrt{5},0)$

los focos se ubican en $F_1(0,4)$ y $F_2(0,-4)$

La longitud del lado recto es: $LR = \frac{2(\sqrt{20})^2}{6} = \frac{2(20)}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}\, u.$

Ejemplo.
Obtener la ecuación de la elipse y sus características si se sabe que un vértice está en $(0,-10)$ y posee $LR = 5 \ \ u$.

Solución.
De los datos se deduce que: $a = 10$ y que:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{2b^2}{10} = 5 \quad \therefore \quad b = \sqrt{\frac{5(10)}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

por lo tanto:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

así que la ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$$

por lo tanto el otro vértice se ubica en: $V_1(0,10)$

Los focos se ubican en: $F_1\left(0,5\sqrt{3}\right)$ y $F_2\left(0,-5\sqrt{3}\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE HORIZONTAL CUANDO SU CENTRO ES CUALQUIER PUNTO DEL PLANO

Si el centro de la elipse horizontal es el punto $C(h,k)$, que es el origen del sistema coordenado $x'-y'$, su ecuación ordinaria viene dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

pero teniendo en cuenta las fórmulas de traslación:

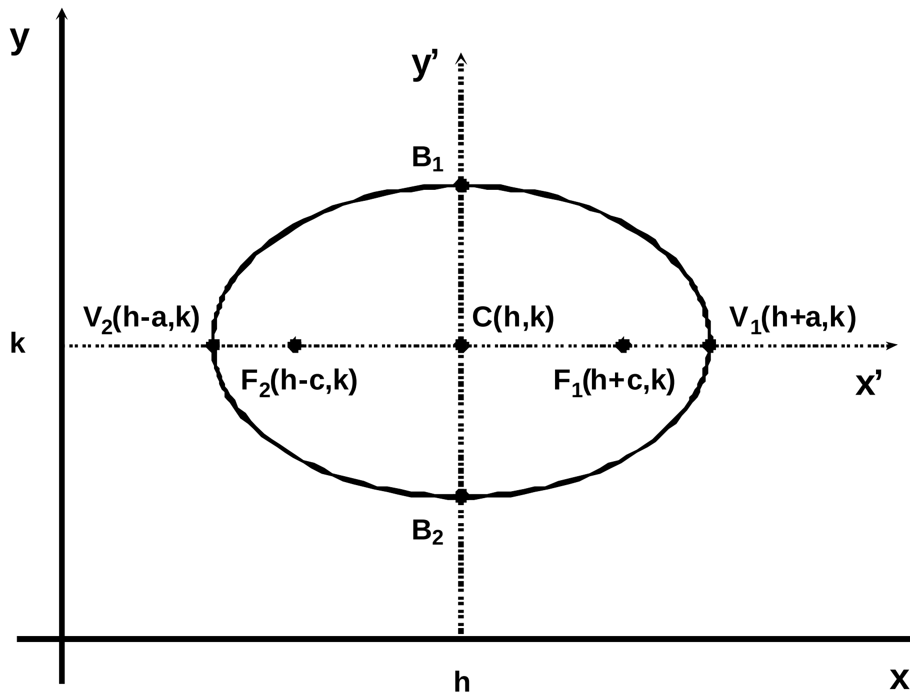
$x' = x - h$ y $y' = y - k$

y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

que es la *ecuación ordinaria de la elipse horizontal con centro en* $C(h,k)$, de semieje mayor a y de semieje menor b.

La siguiente figura muestra este caso:



De la figura se puede apreciar que los vértices están en: $V_1(h+a,k)$ y $V_2(h-a,k)$, los extremos del eje menor están en: $B_1(h,k+b)$ y $B_2(h,k-b)$, por su parte, los focos se ubican en $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$. La longitud del lado recto sigue siendo $LR=\frac{2b^2}{a}$, y los extremos de los lados rectos son: $\left(h\pm c,k\pm\frac{b^2}{a}\right)$.

Ejemplo.

Encontrar todos los elementos de la elipse cuya ecuación es: $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$.

Solución.

De la ecuación se aprecia que $h=3$ y $k=-1$ por lo que el centro se ubica en $C(3,-1)$ y que $a^2=4,\quad b^2=1\quad\Rightarrow\quad a=2,\quad b=1$.

los vértices se ubican en: $V_1(3+2,-1)$ y $V_2(3-2,-1)$ que equivale a $V_1(5,-1)$ y $V_2(1,-1)$

Obteniendo c:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

los focos están en: $F_1\left(3+\sqrt{3},-1\right)$ y $F_2\left(3-\sqrt{3},-1\right)$

la excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la longitud del lado recto es: $LR=\frac{2(1)^2}{2}=\frac{2(1)}{2}=1\,u$.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE VERTICAL CUANDO SU CENTRO ES CUALQUIER PUNTO DEL PLANO

Si el centro de la elipse vertical es el punto $C(h,k)$, que es el origen del sistema coordenado $x'-y'$, su ecuación ordinaria viene dada por:

$$\frac{(x')^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1$$

pero teniendo en cuenta las fórmulas de traslación:

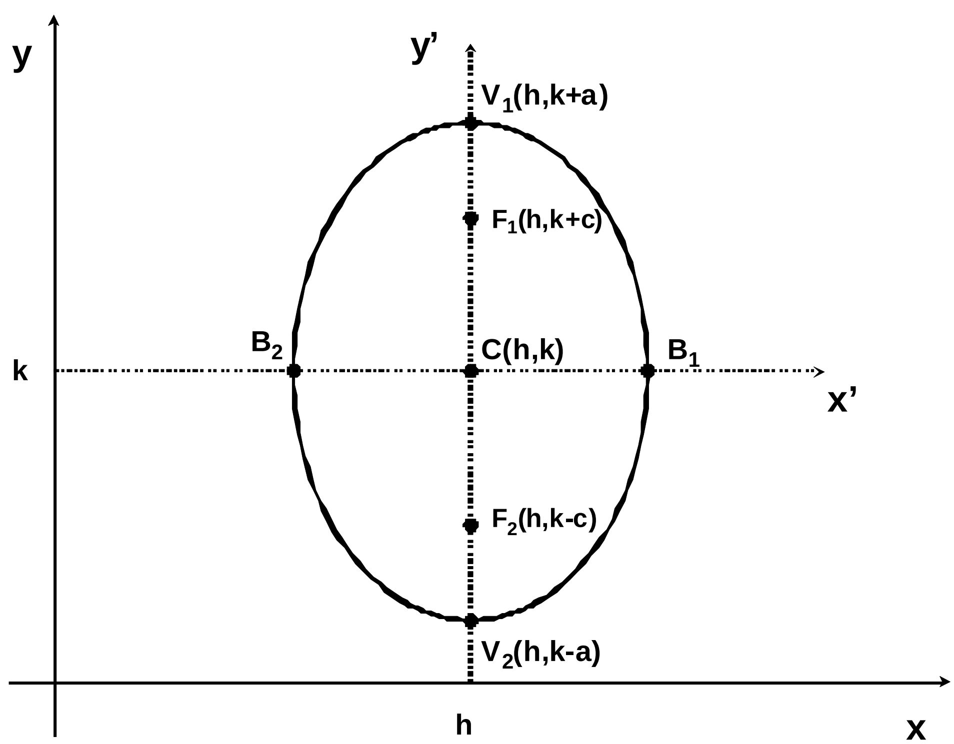
$x'=x-h$ y $y'=y-k$

y sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

que es la *ecuación ordinaria de la elipse vertical con centro en* $C(h,k)$, de semieje mayor a y de semieje menor b.

La siguiente figura muestra este caso:



De la figura se puede apreciar que los vértices están en: $V_1(h, k+a)$ y $V_2(h, k-a)$, los extremos del eje menor están en: $B_1(h+b, k)$ y $B_2(h-b, k)$, por su parte, los focos se ubican en $F_1(h, k+c)$ y $F_2(h, k-c)$. La longitud del lado recto sigue siendo $LR = \frac{2b^2}{a}$, y los extremos de los lados rectos son: $\left(h \pm \frac{b^2}{a}, k \pm c\right)$.

Ejemplo.
Encontrar la ecuación de la elipse cuyos vértices son: $V_1(-2,1)$ y $V_2(-2,9)$ y que tiene excentricidad $e = \frac{1}{2}$.

Solución.
Como las abscisas de los vértices no cambian, se trata de una elipse vertical. El centro se ubica en $C\left(-2, \frac{9+1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C(-2,5)$, esto es: $h = -2, \quad k = 5$
obteniendo a:
$a = 9 - 5 = 4$
de la ecuación de la excentricidad, se despeja c:
$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = \frac{c}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{2} = 2$.
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$
por tanto, la ecuación es: $\frac{(x+2)^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2} + \frac{(y-5)^2}{4^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE HORIZONTAL

Sea la ecuación ordinaria trasladada de la elipse horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

desarrollando se tiene:

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

multiplicando por a^2b^2:

$$\frac{a^2b^2\left(x^2 - 2xh + h^2\right)}{a^2} + \frac{a^2b^2\left(y^2 - 2yk + k^2\right)}{b^2} = a^2b^2(1)$$

$$\Rightarrow \quad b^2\left(x^2 - 2xh + h^2\right) + a^2\left(y^2 - 2yk + k^2\right) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2x^2 - 2b^2xh + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 = a^2b^2$$

acomodando:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

realizando los siguientes cambios de variable:
$A=b^2,\quad C=a^2,\quad D=-2b^2h,\quad E=-2a^2k,\quad F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$
la expresión queda como:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

que es la *ecuación general de la elipse horizontal*. $A\neq C$, pero del mismo signo.

Ejemplo.
Obtener la ecuación general de la elipse con vértices en $V_1(2,5)$ y $V_2(10,5)$ y que pase por el punto $(6,7)$.

Solución.
Como las ordenadas no cambian, se trata de una elipse horizontal con centro en:
$C\left(\frac{2+10}{2},5\right)\quad\Rightarrow\quad C(6,5)$
obteniendo a:
$a=10-6=4$
sustituyendo el punto $(6,7)$ en la ecuación ordinaria trasladada queda:
$\frac{(6-6)^2}{4^2}+\frac{(7-5)^2}{b^2}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{2^2}{b^2}=1\quad\Rightarrow\quad b^2=4\quad\Rightarrow\quad b=2$
la ecuación ordinaria es:
$\frac{(x-6)^2}{4^2}+\frac{(y-5)^2}{2^2}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$
multiplicando por 64:
$\frac{64(x-6)^2}{16}+\frac{64(y-5)^2}{4}=64\quad\Rightarrow\quad 4(x-6)^2+16(y-5)^2=64$
$4\left(x^2-12x+36\right)+16\left(y^2-10y+25\right)=64\quad\Rightarrow\quad 4x^2-48x+144+16y^2-160y+400=64$
acomodando se llega a la ecuación general pedida:
$4x^2+16y^2-48x-160y+480=0$

ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE VERTICAL

Sea la ecuación ordinaria trasladada de la elipse vertical
$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
desarrollando se tiene:
$\frac{x^2-2xh+h^2}{b^2}+\frac{y^2-2yk+k^2}{a^2}=1$
multiplicando por a^2b^2:

$$\frac{a^2b^2\left(x^2-2xh+h^2\right)}{b^2}+\frac{a^2b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)}{a^2}=a^2b^2(1)$$
$$\Rightarrow \quad a^2\left(x^2-2xh+h^2\right)+b^2\left(y^2-2yk+k^2\right)=a^2b^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2x^2-2a^2xh+a^2h^2+b^2y^2-2b^2yk+b^2k^2=a^2b^2$$
acomodando:
$$a^2x^2+b^2y^2-2a^2hx-2b^2ky+a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2=0$$
realizando los siguientes cambios de variable:
$$A=a^2,\quad C=b^2,\quad D=-2a^2h,\quad E=-2b^2k,\quad F=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$$
la expresión queda como:
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

que es la *ecuación general de la elipse vertical*. $A\neq C$, pero del mismo signo.

Ejemplo.

Obtener la ecuación general de la elipse con focos en $F_1(3,8)$ y $F_2(3,2)$ y con excentricidad $e=\frac{3}{4}$

Solución.
Al no cambiar las abscisas de los focos, se trata de una elipse vertical con centro en:
$$C\left(3,\frac{8+2}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad C(3,5)$$
Obteniendo c:
$$c=8-5=3$$
de la expresión de la excentricidad, se despeja a:
$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{4c}{3}=\frac{4(3)}{3}=4$$
obteniendo b:
$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{(x-3)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1\quad\Rightarrow\quad \frac{(x-3)^2}{7}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$
multiplicando por 112:
$$\frac{112(x-3)^2}{7}+\frac{112(y-5)^2}{16}=112\quad\Rightarrow\quad 16(x-3)^2+7(y-5)^2=112$$
$$16\left(x^2-6x+9\right)+7\left(y^2-10y+25\right)=112\quad\Rightarrow\quad 16x^2-96x+144+7y^2-70y+175=112$$
acomodando se llega a la ecuación general pedida:
$$16x^2+7y^2-96x-70y+207=0$$

CARACTERÍSTICAS DE LA ELIPSE A PARTIR DE SU ECUACIÓN GENERAL

Sea la ecuación general de la elipse:
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
acomodando convenientemente:

$$Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F$$

tomando a A como factor común a los primeros dos términos y a C como a los dos siguientes:

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F$$

completando los trinomios cuadrados perfectos:

$$A\left[x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{\frac{D}{A}}{2}\right)^2\right] + C\left[y^2 + \frac{E}{C}y + \left(\frac{\frac{E}{C}}{2}\right)^2\right] = -F + A\left(\frac{\frac{D}{A}}{2}\right)^2 + C\left(\frac{\frac{E}{C}}{2}\right)^2$$

factorizando los trinomios:

$$A\left(x + \frac{\frac{D}{A}}{2}\right)^2 + C\left(y + \frac{\frac{E}{C}}{2}\right)^2 = \frac{\frac{D^2}{A}}{4} + \frac{\frac{E^2}{C}}{4} - F \quad \Rightarrow$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

si se hace el cambio de variable:

$$M = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

la ecuación toma la forma:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = M$$

dividiendo todo entre M, si $M \neq 0$:

$$\frac{A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{M} + \frac{C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{M} = \frac{M}{M}$$

esto equivale a:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{A}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{C}} = 1$$

que es una ecuación de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{si} \quad \frac{M}{A} > \frac{M}{C}$$

o de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{si} \quad \frac{M}{A} < \frac{M}{C}\ .$$

en ambos casos se aprecia que:

$$h = -\frac{D}{2A} \quad \text{y} \quad k = -\frac{E}{2C}$$

lo implica que el centro se ubica en:

$$C\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$$

Por lo tanto:
Si $M>0$ la elipse es real en cualquiera de sus dos versiones

Si $M=0$ la ecuación es un punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$

Si $M<0$ no hay gráfica posible.

Ejemplos.
Determinar si la gráfica de las siguientes ecuaciones corresponde a una elipse, un punto o si no hay gráfica alguna. De existir la elipse, obtener su ecuación ordinaria, las coordenadas de su centro, sus vértices y focos; las longitudes de sus lados rectos, su excentricidad y trazar su gráfica.

1) $4x^2+9y^2-8x-18y-23=0$
Solución.

$$A=4,\quad C=9,\quad D=-8,\quad E=-18,\quad F=-23$$

el centro tiene coordenadas:

$$C\left(-\frac{(-8)}{2(4)},-\frac{(-18)}{2(9)}\right)\quad\Rightarrow\quad C(1,1)$$

$$M=\frac{(-8)^2}{4(4)}+\frac{(-18)^2}{4(9)}-(-23)=4+9+23=36\ ,$$

$$\frac{M}{A}=\frac{36}{4}=9\ \text{ y }\ \frac{M}{C}=\frac{36}{9}=4$$

Como $\frac{M}{A}>\frac{M}{C}$ se tiene una elipse horizontal con ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$$

por tanto:

$$a=3,\quad b=2$$

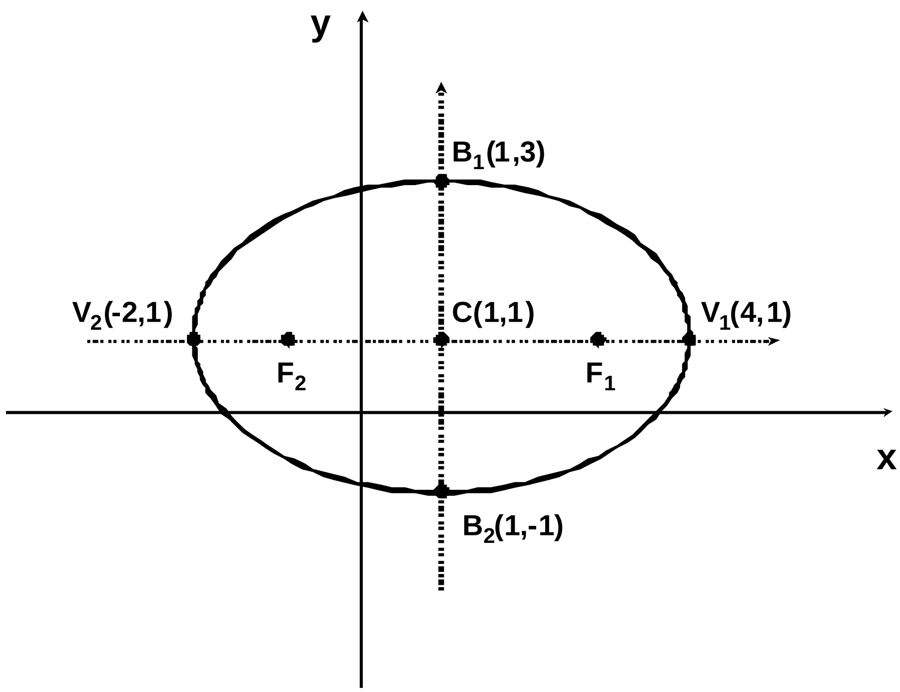
obteniendo c:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

los vértices se ubican en:
$V_1(1+3,1)$ y $V_2(1-3,1)$, que equivalen a: $V_1(4,1)$ y $V_2(-2,1)$
los focos están en:
$F_1\left(1+\sqrt{5},1\right)$ y $F_2\left(1-\sqrt{5},1\right)$

la excentricidad es: $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ y la longitud del lado recto es: $LR=\frac{2(2)^2}{3}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}\ u.$

su gráfica es:



2) $2x^2 + 8y^2 + 12x - 16y + 26 = 0$
Solución.
$A = 2, \quad C = 8, \quad D = 12, \quad E = -16, \quad F = 26$
el centro tiene coordenadas:

$$C\left(\frac{-(12)}{2(2)}, \frac{-(-16)}{2(8)}\right) \quad \Rightarrow \quad C(-3,1)$$

$$M = \frac{(12)^2}{4(2)} + \frac{(-16)^2}{4(8)} - (26) = 18 + 8 - 26 = 0$$

Como $M = 0$, la ecuación representa al punto $(-3,1)$.

3) $9x^2 + 12y^2 + 36x - 96y + 552 = 0$
Solución.
$A = 9, \quad C = 12, \quad D = 36, \quad E = -96, \quad F = 552$
el centro tiene coordenadas:

$$C\left(\frac{-(36)}{2(9)}, \frac{-(-96)}{2(12)}\right) \quad \Rightarrow \quad C(-2,4)$$

$$M = \frac{(36)^2}{4(9)} + \frac{(-96)^2}{4(12)} - (552) = 36 + 192 - 552 = -324$$

Como $M < 0$, no existe lugar geométrico que corresponda a esta ecuación.

APLICACIONES

Las aplicaciones que posee esta cónica son muy diversas en muchos de los ámbitos de la ciencia. Entre las más relevantes, se pueden citar las siguientes:

- La característica de la elipse en un espejo de forma elipsoidal permite que un haz de luz que se origina en uno de sus focos y se impacte contra el espejo, se refleja en dirección del otro foco.
- En la construcción, algunos puentes se diseñan con arcos semielípticos. Un arco con la forma de una elipse de la parte superior se usa para soportar la estructura del puente.
- La propiedad acústica de la elipse se aplica en algunas construcciones. Por ejemplo, existe un famoso inmueble conocido como *la galería de los murmullos* localizado en el Ex Convento del Desierto de los Leones[1], en la que una persona ubicada en uno de sus focos y que murmura, su voz puede escucharse por otra persona que se localice en el otro foco, a pesar que sea imperceptible para otras personas que estén en dicha galería.
- Existen algunos hornos construidos en forma de elipsoides. La fuente de calor se ubica en uno de sus focos y los elementos por calentar se colocan en el otro foco, aprovechando que la transferencia térmica se concentra ahí.
- Una de las leyes de Kepler acerca del movimiento de los planetas del sistema solar plantea que los planetas describen trayectorias elípticas y que en uno de sus focos se localiza el Sol.
- Los cuerpos que giran alrededor de otros, también describen trayectorias elípticas, tal es el caso de algunos asteroides, los cometas que giran alrededor del Sol, y las lunas girando alrededor de sus respectivos planetas.

[1] Este lugar se ubica en la delegación Cuajimalpa, al poniente de la Ciudad de México.