UNIDAD VI

LA ELIPSE

OBJETIVO PARTICULAR

Al concluir la unidad, el alumno conocerá y aplicará las propiedades relacionadas con el lugar geométrico llamado elipse, determinando los distintos parámetros, su ecuación respectiva y viceversa.

6.1. ECUACIÓN EN FORMA COMÚN O CANÓNICA DE LA ELIPSE

Definición

"Es el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2a"

6.1.1 Elementos de la elipse

"F1" y "F2": a estos puntos se les denomina focos y se encuentran ubicados sobre el eje focal, designando a la distancia entre ellos como 2c

"C": Es el centro de la elipse, es el punto donde se intersecan los ejes mayor y menor, representa además el punto medio entre los focos y los vértices.

"V1" y "V2": Son los vértices de la elipse, representan los puntos donde coinciden el eje focal y la elipse, y la distancia entre ellos es 2a.

"B1" y "B2": Son los extremos del eje menor de la elipse, es decir son los puntos donde coinciden la elipse y el eje transversal (llamado también eje conjugado tomando en cuenta que el eje transversal es el segmento de recta perpendicular al eje focal en el centro del mismo).

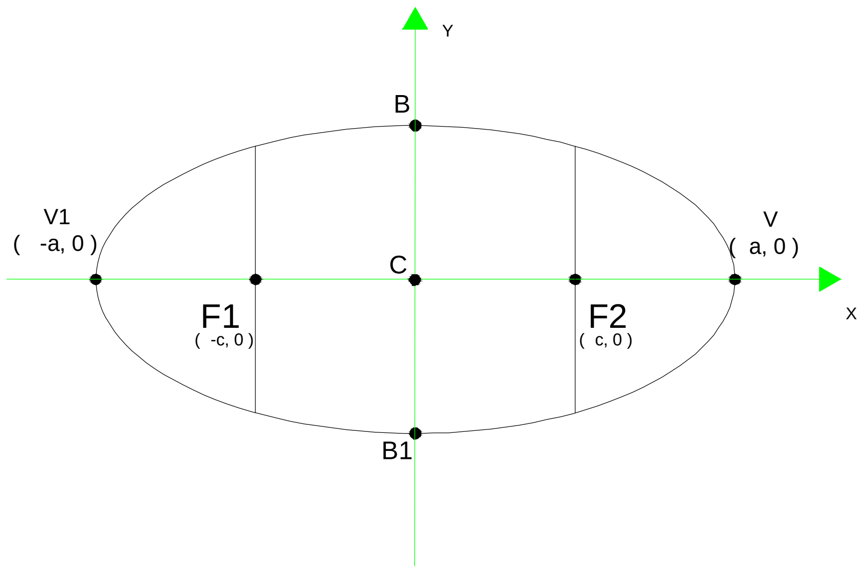

Figura 1

Eje mayor de la elipse: es la distancia entre *"V1"* y *" V2"*

Eje menor de la elipse o transversal: es la distancia entre "B1" y B2"

Distancia Focal: Es la distancia que existe entre los focos "F1" y "F2"

Lado recto: Es la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por cada foco, la elipse tiene 2 lados rectos.

$$Lado\ \mathrm{Re}cto = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad: Se representa con la letra "*e*" y es la relación que existe entre la distancia focal (2c) y la longitud del eje mayor (2a).

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

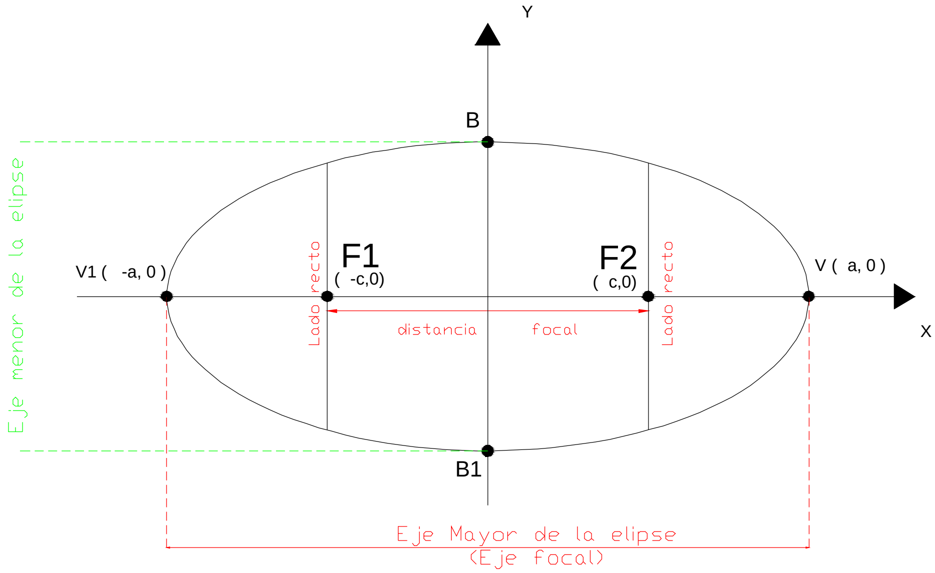
Y
B
Eje menor de la elipse
V1 (-a, 0)
Lado recto
F1
(-c,0)
F2
(c,0)
Lado recto
V (a, 0)
X
distancia
focal
B1
Eje Mayor de la elipse
(Eje focal)

Figura 2

6.1.2. ECUACIONES DE LA ELIPSE CUYO CENTRO ESTÁ EN EL ORIGEN.

Si graficamos una elipse con centro en el origen y eje mayor coincidiendo con el eje de las X, se obtiene una figura como la siguiente:

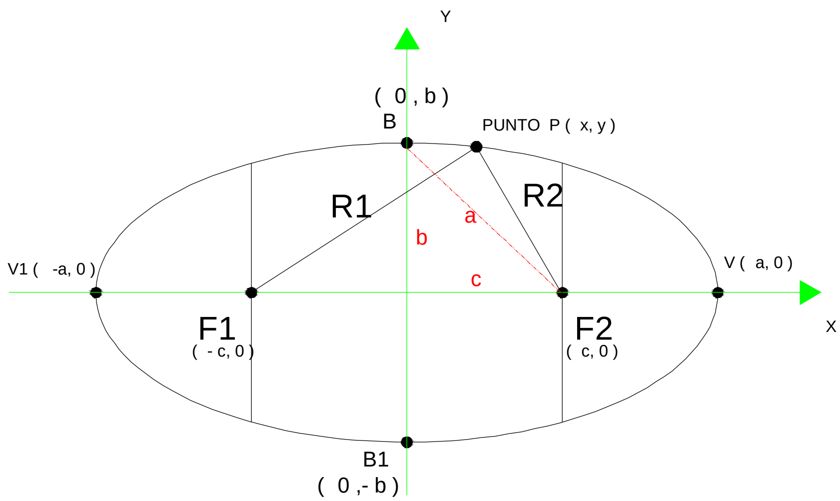

Figura 3

Como se definió previamente, para que un punto P(x,y) pertenezca a la elipse debe cumplir con R1 + R2 = 2a

Utilizando la ecuación de distancia entre dos puntos:

R1 + R2 = 2a

$$\sqrt{\left(x-(-c)^2\right)+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Despejando la primera de las raíces anteriores, para poder eliminar el radical de la izquierda, se tiene:

$$\sqrt{\left(x-(-c)^2\right)+(y-0)^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\ \}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left[\sqrt{\left(x-(-c)^2\right)+\left(y-0\right)^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{\left(x-c\right)^2+\left(y-0\right)^2}\right]^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

Simplificando términos semejantes:

$$4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dividiendo la ecuación por 4

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

Elevando nuevamente al cuadrado y agrupando términos semejantes nos queda:

$$x^2a^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

Factorizando x² de los dos primeros términos y a² en el segundo miembro:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

En el triángulo rectángulo BCF2 de la figura 3, se observa que:

$$b^2=a^2-c^2$$

Sustituyendo:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Multiplicando por $\frac{1}{a^2b^2}$ nos queda:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que es la ecuación de la elipse en su forma ordinaria con centro C(0,0).

En la cual (x,y) son las coordenadas de cualquier punto que pertenezca a la elipse.

Análogamente si la elipse tiene su eje mayor sobre el eje **Y,** se deja al alumno la obtención de su ecuación, aplicando un procedimiento similar al anterior, debiendo llegar al siguiente resultado:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Analizando las ecuaciones anteriores podemos observar que los denominadores de los términos en el primer miembro se intercambian.

Por la naturaleza geométrica de la elipse, siempre se tiene que **a>b,** debido a lo cual el mayor de los denominadores nos indicará cual de los ejes coordenados coincide con el eje focal.

Ejemplo 1.6

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos F (2,0) y F´ (-2,0), y excentricidad e= 2 / 3.

Solución:

Como la excentricidad se define mediante e= c/a =2/3por medio de la relación $a^2=b^2+c^2$ se podrá determinar el valor de b por:

Si: c= 2 entonces c^2= 4
a= 3 entonces a^2= 9

$$b=\sqrt{9-4=\sqrt{5}}$$

Por las coordenadas de los focos se determina que el eje focal es paralelo al eje x y su ecuación será de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Sustituyendo

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

Ejercicio 6.1

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos F (3,0) y F´ (-3,0), y excentricidad e= 1 / 3.

Ejercicio 6.2

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos F (6,0) y F´ (-6,0), y excentricidad e= 2 / 5.

6.1.3. ECUACIONES DE LA ELIPSE CUYO CENTRO NO ESTÁ EN EL ORIGEN.

Cuando el centro de la elipse se encuentra fuera del origen en un punto al que por convención se le asignan las coordenadas (h,k) y si además su eje focal es paralelo al eje X, entonces la ecuación que la define es la siguiente:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Sí su centro se encuentra fuera del origen pero su eje focal es paralelo al eje Y entonces la ecuación que la define es la siguiente:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Aunque la ecuación de la elipse cambia debido a su posición, el resto de los elementos se puede calcular empleando las mismas fórmulas, es decir:

$$Lado\ \mathrm{Re}cto=\frac{2b^2}{a}$$

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

Ejemplo 2.6 Determina la ecuación de la elipse que tiene por focos las coordenadas (-2,1) y (2,2) y la longitud de su eje mayor es 7

SOLUCION

Aplicando directamente la definición:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=7$$

Ordenando miembros para determinar su ecuación

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=7-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

Elevando al Cuadrado ambos miembros y desarrollando los binomios

$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=49-14-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+x^2-4x+4+y^2-4y+4$$

Simplificando

$$8x+2y-52=-14\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

Elevando una vez más al cuadrado y desarrollando los binomios

$$16x^2+y^2+676+4xy-208x-52y=49x^2-196x+196+49y^2-196y+196$$

Finalmente

$$33x^2-4xy+48y^2+12x-144y-284=0$$

Que corresponde a una elipse de ejes oblicuos o rotados respecto a los ejes coordenados (x, y)

Ejercicio 6.3 Determina la ecuación de la elipse que tiene por focos las coordenadas (-3,1) y (3,2) y la longitud de su eje mayor es 6

Ejercicio 6.4 Determina la ecuación de la elipse que tiene por focos las coordenadas (-2,3) y (2,5) y la longitud de su eje mayor es 9

6.2. **Ecuación en forma general.**

Para que la ecuación:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Represente una elipse, los coeficientes A y C deben ser diferentes y del mismo signo, ya que si A = C, entonces representaría una circunferencia.

6.3. Obtención de la ecuación.

Para ejemplificar, consideremos la ecuación de la elipse escrita en forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Desarrollando los cuadrados queda:

$$\frac{x^2-2xh+h^2}{a^2}+\frac{y^2-2yk+k^2}{b^2}=1$$

Obteniendo el común denominador

$$\frac{b^2(x^2-2xh+h^2)+a^2(y^2-2yk^2+k^2)}{a^2b^2}=1$$

Quitando el denominador:

$$b^2(x^2-2xh+h^2)+a2(y^2-2yk^2+k^2)=a^2b^2$$

Desarrollando:

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2+a^2y^2-2a^2yk^2+a^2k^2=a^2b^2$$

Reordenando:

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2k^2y+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Haciendo que:

$b^2 = A$
$a^2 = C$
$-2hb^2 = D$
$-2ka^2 = E$
$b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = F$

Obtenemos: la ecuación general de una elipse

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo 3.6 Dada la elipse $\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-5)^2}{6}=1$ determine su forma general, obteniendo todos sus elementos

Solución:

La ecuación es de la forma $\frac{(x+h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ por lo cual su eje focal es paralelo a l eje y.

Para pasar a su forma general multiplicaremos toda la expresión por 6

$$6\left(\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-5)^2}{6}=1\right)$$

$$3(x+3)^2+(y-5)^2=6$$

Desarrollamos binomios y simplificamos para obtener su forma general

$$3x^2+y+18x-10y+46=0$$

Su centro se localiza en (-3,5)

$$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$$

$$a^2=6 \Rightarrow a=\sqrt{6}$$

De la relación $a^2=b^2+c^2$

Entonces $c^2=6-2=4$

c= 2

Los Focos se localizan en $(-3{,}5\pm 2)$, los vértices en $(-3{,}5\pm\sqrt{6})$ y sus extremos en $(-3\pm\sqrt{(2{,}5})$

Su excentricidad $e=\frac{2}{\sqrt{6}}=0.81$

Sus Lados rectos $LR=\frac{2*2}{\sqrt{6}}=1.63$

Sus Directrices $y=\pm 3+5$

Ejercicio 6.5 Dada la elipse $\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-7)^2}{8}=1$ determine su forma general, obteniendo todos sus elementos

6.4 Cálculo de los parámetros de la elipse dada su ecuación.

6.5. Condiciones para que una ecuación del tipo $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ sea una elipse.

Ya se vio que la ecuación $Ax2+Cy2+Dx+Ey+F=0$ es la ecuación general de una elipse pero debe cumplir con ciertas condiciones como que A y c deben ser diferentes y de signo positivo ya que si son iguales lo que tenemos es una circunferencia y no una elipse.

De la ecuación general se tiene tres diferentes casos, si de esta ecuación se completan sus cuadrados tenemos que:

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$$

En esta última ecuación el valor del segundo miembro determina el lugar geométrico que representa como se explicara en los incisos siguientes:

6.5.1. LA ECUACIÓN REPRESENTA UNA ELIPSE REAL.

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2>0$$

En este caso el lugar geométrico que representa es una elipse.

6.5.2. LA ECUACIÓN NO TIENE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO (ELIPSE IMAGINARIA).

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=0$$

En este caso el lugar geométrico que representa es un punto.

6.5.3. LA ECUACIÓN REPRESENTA UN PUNTO.

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2<0$$

En este caso no representa ningún lugar geométrico llamado elipse.

Ejemplo 4.6 A partir de la siguiente ecuación
$9x^2+25y^2+18x-50y-191=0$ Determinar sus elementos.

Solución
Factorizando términos comunes

$$9(x^2+2x)+25(y^2-2y)=191$$

Completando cuadrados

$$9\left[x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]+25\left[y^2-2y+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]=191+9\left(\frac{2}{2}\right)^2+25\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

Simplificando

$$9(x^2+2x+1)+25(y^2-2y+1)=191+9+25$$

Factorizando

$$9(x+1)^2+25(y-1)^2=225$$

Multiplicando por $\frac{1}{225}$

Nos queda: $$\frac{(x+1)}{25}+\frac{(y-1)}{9}=1$$

La ecuación obtenida es la de una elipse con eje mayor paralelo al eje x dado que el número a se encuentra en el denominador de l binomio que contiene a x y centro fuera del origen por tanto sus elementos son:

$a^2=25 \Rightarrow a=5$
$b^2=9 \Rightarrow b=3$
.c= 4

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

Coordenadas de centro vértices y focos

$$C(h,k)=(-1,1)$$
$$V(h+a,k)=(-1+5,1)=(4,1)$$
$$V'(h-a,k)=(-1-5,1)=(-6,1)$$
$$F(h+c,k)=(-1+4,1)=(3,1)$$
$$F'(h-c,k)=(-1-4,1)=(-5,1)$$
$$E(h,k+b)=(-1,1+3)=(-1,4)$$
$$E(h,k-b)=(-1,1-3)=(-1,-2)$$

Los lados rectos son:

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2*3*3}{5}=\frac{18}{5}$$

Las rectas directrices son:

$$x = \pm\frac{a}{e} \pm h = \frac{a^2}{c} = \pm\frac{25}{4} \pm (-1)$$

X_1=5.25
X_2=-7.25

Considerando la traslación de ejes, si se toma el centro de la elipse como el nuevo origen $x = \pm 6.25$

Ejercicio 6.6 A partir de la siguiente ecuación $16x^2 + 36y^2 + 25x - 61y - 190 = 0$ Determinar sus elementos.