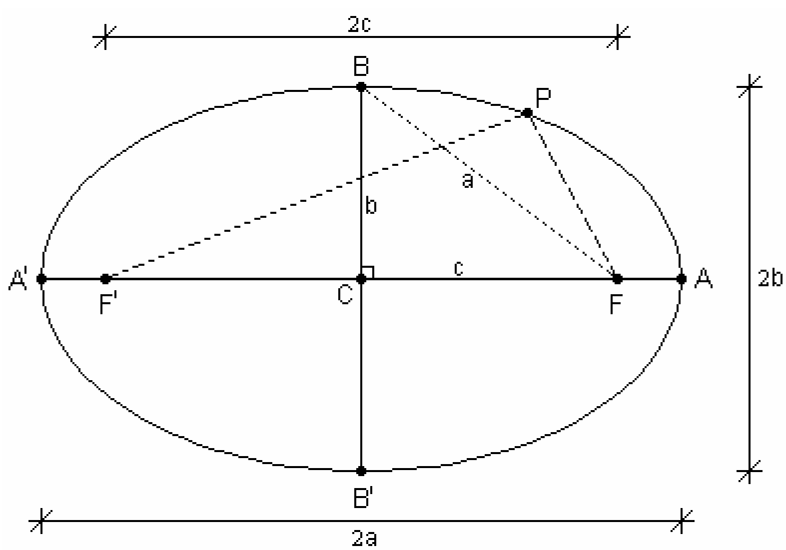
X. LA ELIPSE

10.1. DEFINICIÓN DE ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición

Se llama elipse al lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en el plano, de tal modo que la suma de las distancias del punto "P" a dos puntos fijos F' y F (llamados focos), mantienen la suma constante.



- Siendo "P" un punto arbitrario de la elipse, se conviene indicar la suma constante como $PF'+PF=2a$.

- La recta que contiene a los focos F' y F se llama EJE FOCAL o EJE MAYOR de la elipse.

- La recta que pasa por el punto medio del segmento $F'F$ y es perpendicular a el, se llama EJE MENOR de la elipse.

- El punto donde se cortan el eje mayor y el eje menor es el CENTRO "C" de la elipse.

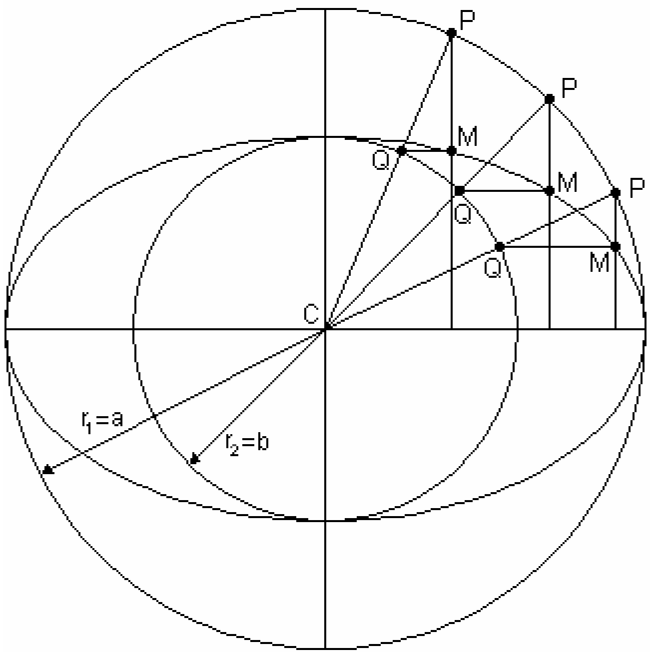
- Los puntos en los que la elipse corta a sus ejes A, A', B y B' se llaman VÉRTICES de la elipse.

- Magnitudes: Eje mayor $AA'=2a$; Eje menor $BB'=2b$; Semieje mayor $CA=a$; Semieje menor $CB=b$; Distancia focal $F'F=2c$; Por el teorema de Pitágoras en el triángulo CFB se tiene $a^2=b^2+c^2$; $b^2=a^2-c^2$ luego $a>b$.

10.2. CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CON REGLA Y COMPÁS

Una forma de construir una elipse con regla y compás puede lograrse siguiendo el siguiente procedimiento:

a) Se suponen conocidos los semiejes mayor "a" y menor "b".



b) Se trazan 2 circunferencias con centro común al de la elipse, de radios $r_1 = a$ y $r_2 = b$.

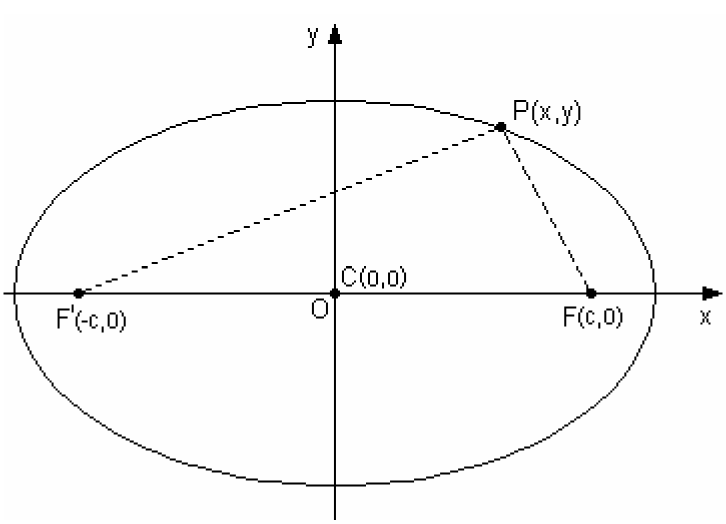
c) Por el centro de la elipse "C" se trazan varios radios que cortarán a las 2 circunferencias en los puntos P y Q.

d) Por los puntos P se trazan rectas paralelas al eje menor y por los puntos Q rectas paralelas al eje mayor, el punto de cruce "M" de estas rectas paralelas, son puntos de la elipse.

e) Repitiendo el paso anterior tantas veces como se crea conveniente, se tendrán tantos puntos de la elipse que al unirlos con línea continua se obtendrá un bosquejo bastante aceptable de la curva.

10.3. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE

10.3.1. ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS



- Eje focal coincidiendo con el eje "x". Siendo $FF' = 2c$, las coordenadas de F' y F son: $F'(-c,0)$, $F(c,0)$.

  Si el punto $P(x,y)$ es un punto arbitrario de la elipse, se debe cumplir por definición que $PF' + PF = 2a$.

  Aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \quad \ldots(1)$$

La expresión (1) representa la ecuación de la elipse con las características antes expuestas, para hallar una forma más simple de esta ecuación, se efectúan operaciones algebraicas como sigue: aislando el primer radical y elevando al cuadrado ambos miembros

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-(x+c)^2-y^2+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \;;\; a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$\left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=\left(a^2-cx\right)^2$$

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \text{ ; como } b^2=a^2-c^2$$

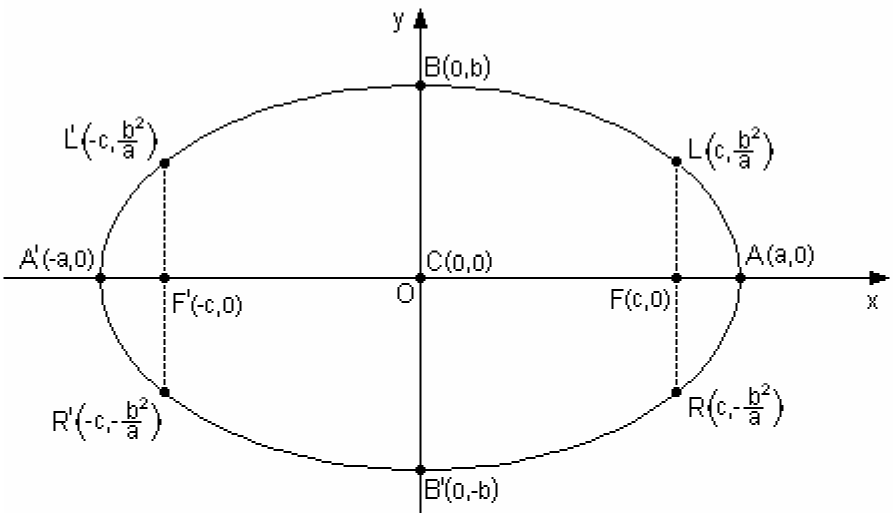
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \text{ ; dividiendo la ecuación entre } a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \;\cdots(2)$$

La ecuación (2) es la FORMA ORDINARIA de la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre el eje “x”.

Los ELEMENTOS de la elipse de ecuación (2) referidos al sistema de coordenadas x, y son:



La cuerda que pasa por cada foco y es perpendicular al eje mayor, se llama LADO RECTO (LR) de la elipse y las coordenadas de los puntos L y R los podemos calcular haciendo $x = c$ en la ecuación (2):

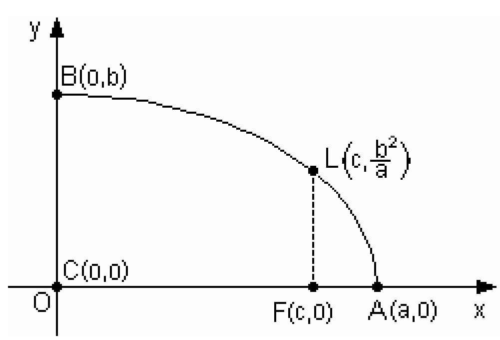
$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

despejando la "y" se tiene: $y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$; $y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$; como $b^2 = a^2 - c^2$

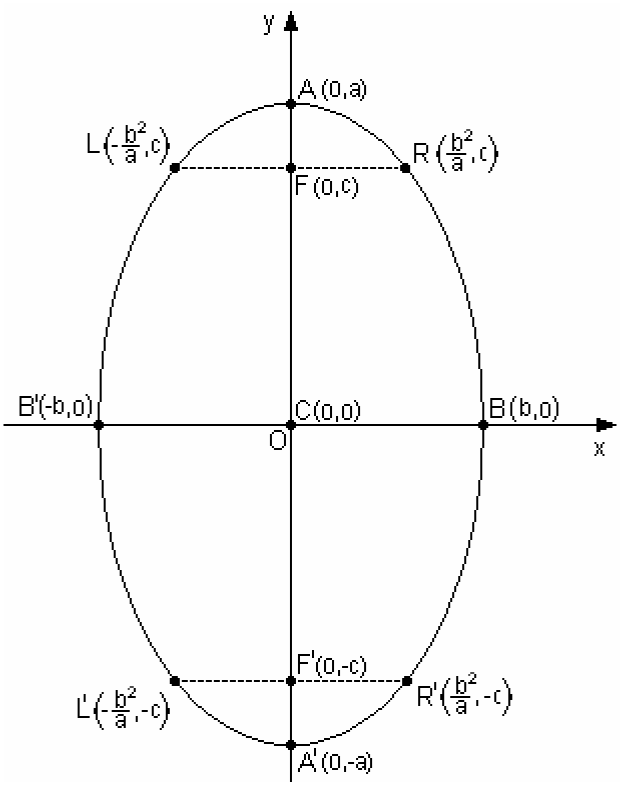
$$y^2 = \frac{b^4}{a^2} \;;\; y = \pm\sqrt{\frac{b^4}{a^2}} \;;\; y = \pm\frac{b^2}{a}$$

por lo tanto $L\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $R\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $L'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$, $R'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$

Una observación importante es la siguiente, como la ecuación (2) contiene sólo potencias pares en las variables x y y, esto indica que la elipse es SIMÉTRICA con respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen también, por lo que cuando se dibuje su gráfica, es suficiente considerar solamente la parte que está situada en el primer cuadrante coordenado donde los valores de $x \geq 0$ y aprovechando la simetría de la elipse se puede completar su gráfica.



- Si el eje focal coincide con el eje "y", la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro en el origen se obtiene en forma similar a la anterior, siendo su ecuación y sus elementos:



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1} \cdots (3)$$

Ecuación del eje focal: $x=0$
Ecuación de eje menor: $y=0$

$a=\sqrt{del\ mayor\ denominador\ de\ (3)}$

$b=\sqrt{del\ menor\ denominador\ de\ (3)}$

$a^2=b^2+c^2$; $LR=\dfrac{2b^2}{a}$

La EXCENTRICIDAD de una elipse determina la forma de esta curva, la razón constante $e=\dfrac{c}{a}$ indica que tan abierta o cerrada es la elipse. Si $e=0$ y "a" permanece constante, entonces $c=0$ y como $b^2=a^2-c^2$; $b^2=a^2$; $b=a$, esto indica que los dos focos coinciden con el centro de la elipse y la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ se convierte en la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $r=a$ o sea $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$; $x^2+y^2=a^2$. Conforme el valor de "e" crece, los focos de la elipse se separan alejándose del centro y "b" decrece, esto es, que si $e=1$ entonces $a=c$ y por lo tanto $b^2=a^2-c^2=0$ por lo que $b=0$ y la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ no se puede aplicar y la gráfica de la elipse degenera en el segmento de recta que conecta los focos. Por consiguiente, habrá elipse real si la excentricidad varía dentro del intervalo $0<e<1$.

EJEMPLOS

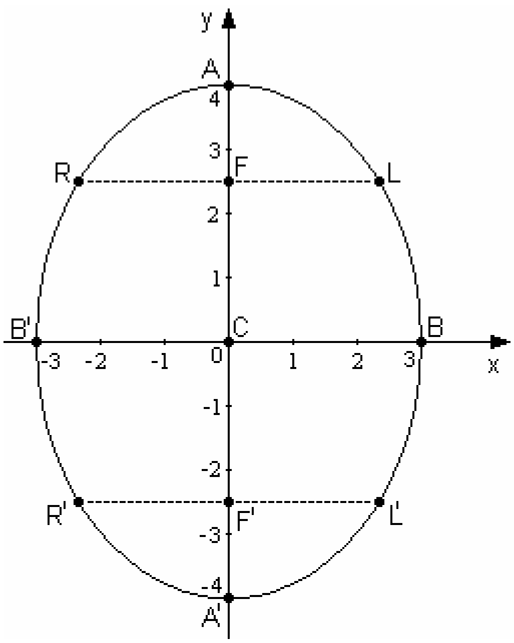
1) Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(-5,0)$, $F(5,0)$ y la magnitud del eje mayor es 12.

Solución

De acuerdo con la información dada, las coordenadas del centro son $C(0,0)$ y la ecuación de la elipse es de la forma $^{(2)}\cdots\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, la longitud del eje mayor es $2a=12$; $a=\dfrac{12}{2}$; $a=6$, la distancia focal $FF' = 2c$, si $2c = 10$; $c = \frac{10}{2}$; $c = 5$, como $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2 = (6)^2 - (5)^2$; $b^2 = 36 - 25$; $b^2 = 11$; $b = \sqrt{11} \approx 3.3$, sustituyendo los valores de a^2 y b^2 en la ecuación (2): $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ que es la ecuación pedida.

2) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

Solución

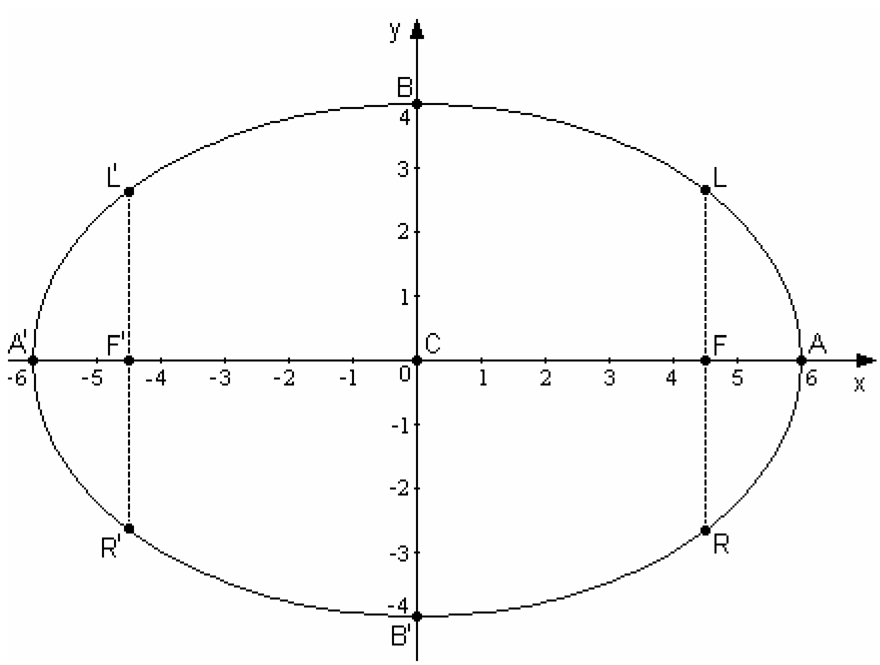


Para bosquejar la gráfica de la ecuación de la elipse dada, es necesario obtener sus elementos, sabiendo que se trata de una elipse con centro en el origen $C(0,0)$ y eje mayor coincidiendo con el eje "y", $a^2 = 16$; $a = 4$; $b^2 = 9$; $b = 3$; $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 16 - 9 = 7$; $c = \sqrt{7} \approx 2.6$; $F(0, \sqrt{7})$, $F'(0, -\sqrt{7})$; $A(0,4)$, $A'(0,-4)$; $B(3,0)$, $B'(-3,0)$, ancho focal: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$; $L\left(\frac{9}{4}, \sqrt{7}\right)$, $R\left(-\frac{9}{4}, \sqrt{7}\right)$, $L'\left(\frac{9}{4}, -\sqrt{7}\right)$, $R'\left(-\frac{9}{4}, -\sqrt{7}\right)$, excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0.66$

3) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

Solución

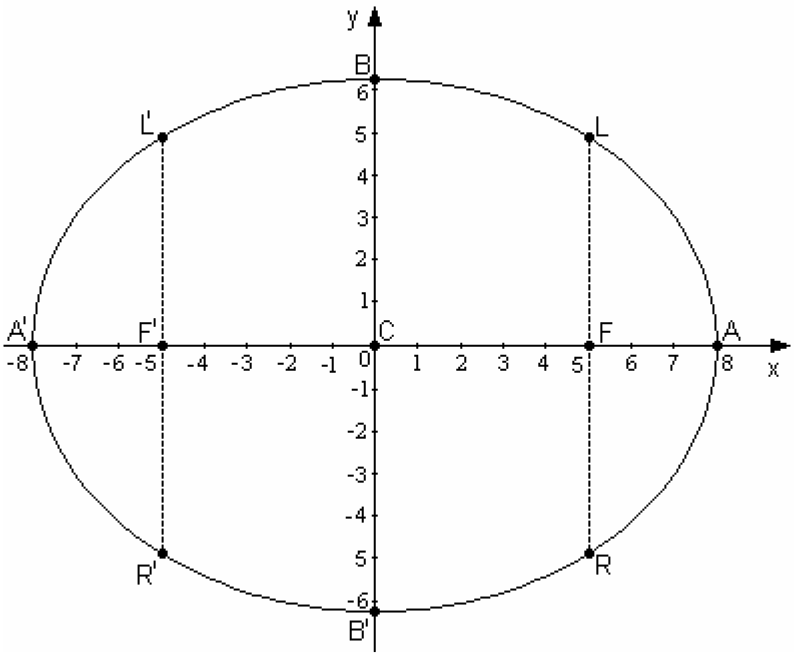
La elipse tiene centro en el origen de coordenadas $C(0,0)$, el eje mayor coincide con el eje "x", $a^2 = 36$; $a = 6$; $b^2 = 16$; $b = 4$; $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 36 - 16 = 20$; $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.5$ $F(2\sqrt{5}, 0)$, $F'(-2\sqrt{5}, 0)$; $A(6,0)$, $A'(-6,0)$; $B(0,4)$, $B'(0,-4)$, ancho focal: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{6} = \frac{16}{3} \approx 5.3$



$L\left(2\sqrt{5},\frac{8}{3}\right)$; $R\left(2\sqrt{5},-\frac{8}{3}\right)$; $L'\left(-2\sqrt{5},\frac{8}{3}\right)$; $R'\left(-2\sqrt{5},-\frac{8}{3}\right)$, excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0.75$

4) La excentricidad de una elipse con centro en el origen es $e=\frac{5}{8}$ y su eje focal coincide con el eje "x", obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

Solución



Si $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{8}$; $c=5$; $a=8$

$b^2=a^2-c^2$; $b^2=64-25$; $b^2=39$

$b=\sqrt{39}\approx 6.2$; ancho focal: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(39)}{8}=\frac{39}{4}$; $A(8,0)$ $A'(-8,0)$; $B\left(0,\sqrt{39}\right)$, $B'\left(0,-\sqrt{39}\right)$ $F(5,0)$, $F'(-5,0)$; $L\left(5,\frac{39}{8}\right)$ $R\left(5,-\frac{39}{8}\right)$; $L'\left(-5,\frac{39}{8}\right)$ $R'\left(-5,-\frac{39}{8}\right)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{8}\approx 0.63$;

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$$

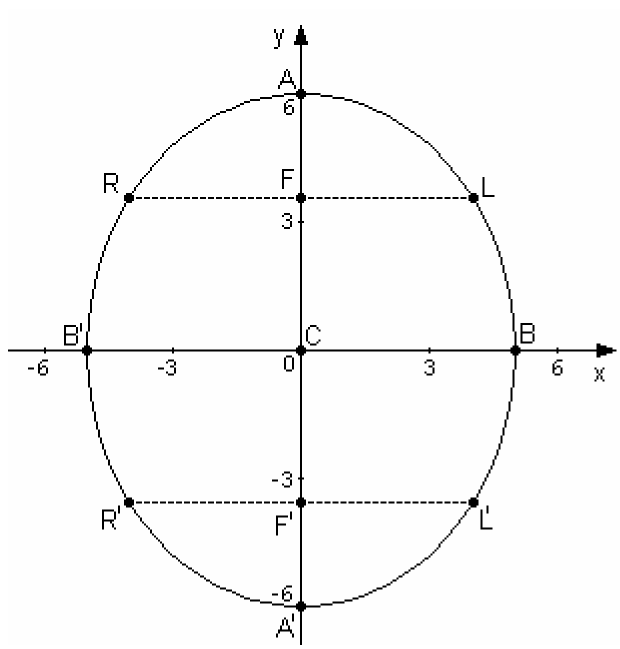
5) Una elipse con centro en el origen tiene un vértice $A(0,6)$ y la longitud de su eje menor es 10, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

Solución

De acuerdo con la información dada, la ecuación de la elipse es de la forma

(3)••• $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

Si $A(0,6)$; $a=6$, la longitud del eje menor $2b=10$; $b=5$; $c^2=a^2-b^2$; $c^2=36-25$; $c^2=11$; $c=\sqrt{11}\approx 3.3$; $A(0,-6)$; $C(0,0)$; $B(5,0)$, $B'(-5,0)$; ancho focal: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(25)}{6}=\frac{25}{3}\approx 8.3$; $F\left(0,\sqrt{11}\right)$,



$F'\left(0,-\sqrt{11}\right)$; $L\left(\frac{25}{6},\sqrt{11}\right)$, $R\left(-\frac{25}{6},\sqrt{11}\right)$, $L'\left(\frac{25}{6},-\sqrt{11}\right)$, $R'\left(-\frac{25}{6},-\sqrt{11}\right)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6}\approx 0.55$.

ecuación: $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{25}=1$

EJERCICIOS

1) Obtenga los elementos de la elipse $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1$ y bosqueje su gráfica.

2) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(-6,0)$, $F(6,0)$ y tiene vértices $B(0,4)$, $B'(0,-4)$.

3) Obtenga la ecuación de una elipse con centro en el origen, ancho focal igual a $\frac{12}{5}$, su eje mayor coincide con el eje "y", y bosquejar su gráfica.

4) Una elipse horizontal, con centro en el origen tiene longitud de los semiejes mayor y menor 6 y 5 respectivamente, obtenga su ecuación y bosqueje su gráfica.

5) Una elipse con centro en el origen tiene longitud del eje mayor sobre el eje "x" igual a 8 unidades y longitud del eje menor 4 unidades, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

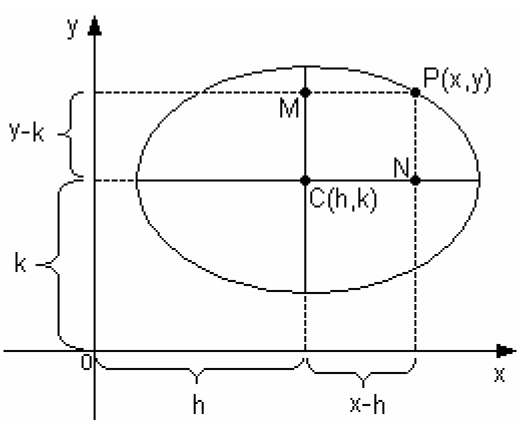
10.3.2. ELIPSE CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

Analizando la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro en el origen $C(0,0)$ y eje focal coincidiendo con el eje "x", $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se observa la siguiente propiedad esencial:

"el cociente $\frac{x^2}{a^2}$ indica que: $\frac{(Dis\tan cia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ de\ la\ elipse\ al\ semieje\ menor)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ mayor)^2}$ y

el cociente $\frac{y^2}{b^2}$ indica que: $\frac{(Dis\tan cia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ de\ la\ elipse\ al\ semieje\ mayor)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ menor)^2}$".

Aplicando esta propiedad esencial de la elipse, podemos obtener la ecuación en forma ordinaria de cualquier elipse en el plano coordenado, veamos los siguientes casos:



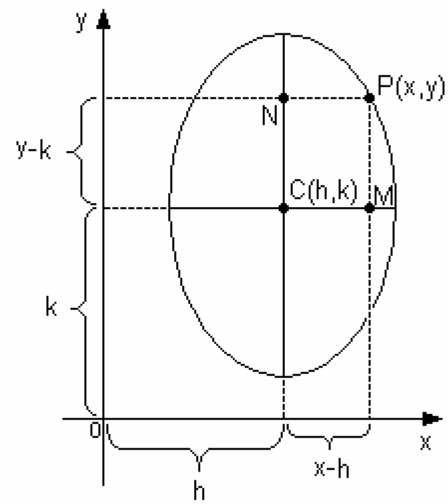
a) Coordenadas del centro de la elipse $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "x".

Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la elipse, aplicando la propiedad esencial se tiene: $\frac{(PM)^2}{a^2}+\frac{(PN)^2}{b^2}=1$, como $PM=x-h$ y $PN=y-k$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1} \quad \cdots(\text{I})$$

(I) es la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "x".

b) Coordenadas del centro de la elipse $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "y".

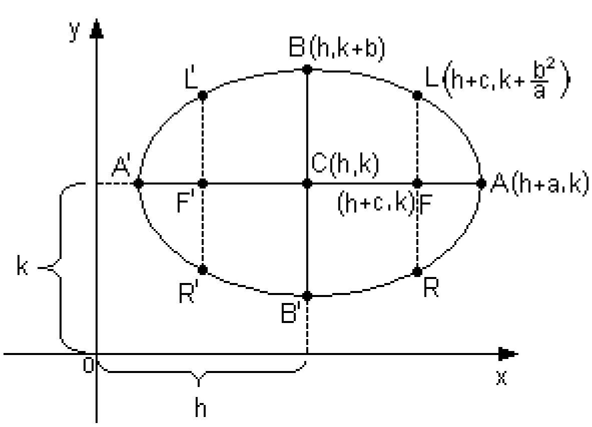


Siendo $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse, aplicando la propiedad esencial se tiene: $\frac{(PM)^2}{a^2}+\frac{(PN)^2}{b^2}=1$, como

$PM = y-k$ y $PN = x-h$; $\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$ ... (II)

(II) es la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "y".

En las ecuaciones (I) y (II), las cantidades a, b y c tienen el mismo significado que en las anteriores ecuaciones (2) y (3), por lo que para bosquejar la gráfica de cualquiera de las formas (I) o (II) no debe presentar mayor dificultad la obtención de sus elementos:

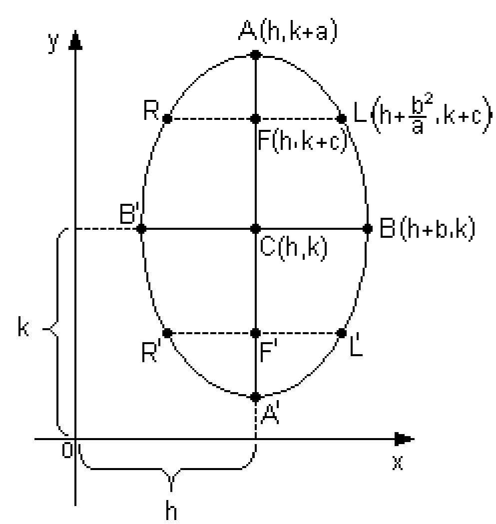


Las coordenadas A', B', L', R', F', R son fáciles de obtener aprovechando la simetría de la elipse.

(I) ... $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Las coordenadas A', B', R, R', L', F', se pueden obtener con facilidad aprovechando la simetría de la elipse.

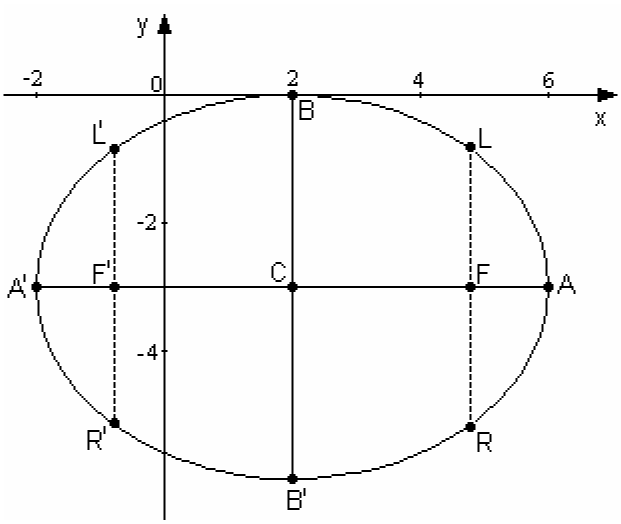
(II) ... $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$



EJEMPLOS

1) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

Solución



La ecuación dada es de la forma (I)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (elipse horizontal). Donde a partir del conocimiento de las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,-3)$ y de los valores de $a=\sqrt{16}=4$; $b=\sqrt{9}=3$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$ podemos obtener todos los elementos de la elipse. Nos concretamos a la obtención de los elementos del primer sector de la elipse y aprovechando su simetría, se obtendrán el resto de sus elementos:

$A(h+a,k)=(6,-3)$; $B(h,k+b)=(2,0)$; $F(h+c,k)=\left(2+\sqrt{7},-3\right)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(2+\sqrt{7},-\frac{3}{4}\right)$.

Por simetría: $B'(2,-6)$; $A'(-2,-3)$; $F'\left(2-\sqrt{7},-3\right)$; $R\left(2+\sqrt{7},-\frac{21}{4}\right)$; $L'\left(2-\sqrt{7},-\frac{3}{4}\right)$; $R'\left(2-\sqrt{7},-\frac{21}{4}\right)$; $e=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$; Ec. eje mayor: $y=-3$; Ec. eje menor: $x=2$

2) Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(2,4)$, $F'(2,-4)$ y uno de sus vértices $A(2,6)$, bosquejar su gráfica.

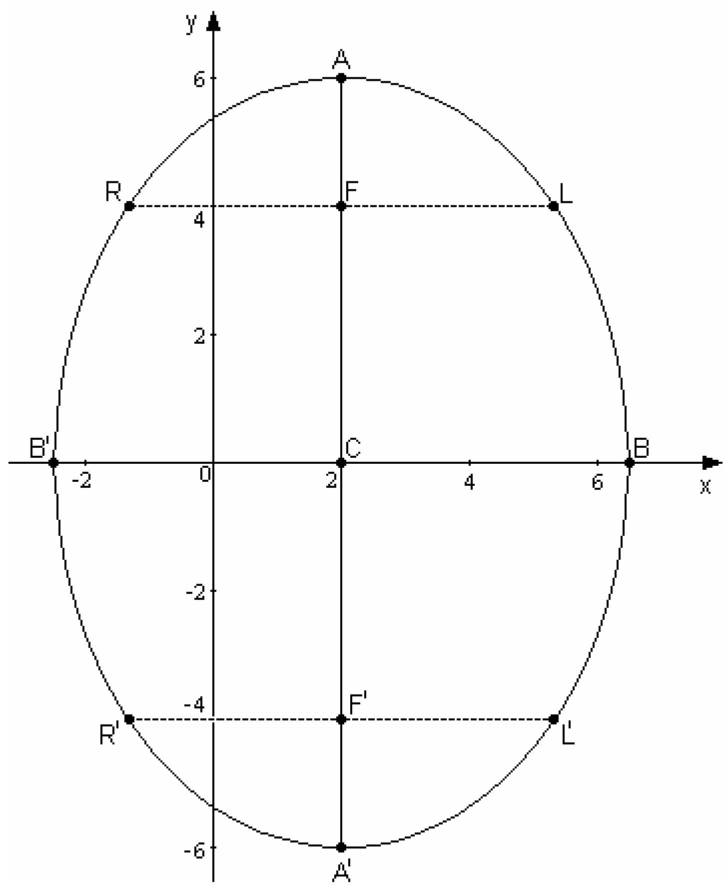
Solución

El centro de la elipse se localiza a la mitad del segmento $F'F$ o sea: $C\left(h=\frac{x_F+x_{F'}}{2},k=\frac{y_F+y_{F'}}{2}\right)=(2,0)$; $CF=c$; $c=4$; $CA=a$; $a=6$; $b=\sqrt{a^2-c^2}$; $b=2\sqrt{5}$

$A(h,k+a)=(2,6)$; $B(h+b,k)=\left(2+2\sqrt{5},0\right)$; $F(h,k+c)=(2,4)$; $L\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\frac{16}{3},4\right)$.

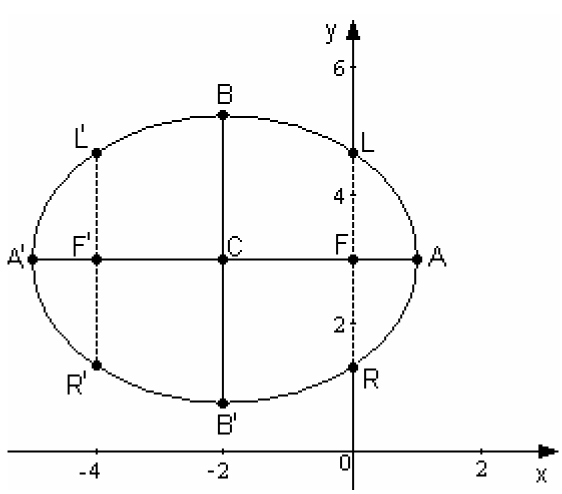
Por simetría: $B'\left(2-2\sqrt{5},0\right)$; $A'(2,-6)$; $F'(2,-4)$; $R\left(-\frac{4}{3},4\right)$; $L'\left(\frac{16}{3},-4\right)$; $R'\left(-\frac{4}{3},-4\right)$; $e=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;

Ec. eje mayor: $x=2$; Ec. eje menor: $y=0$; Ec. elipse: $\frac{y^2}{36}+\frac{(x-2)^2}{20}=1$



3) Obtener la ecuación de la elipse de vértices $A(1,3)$, $A'(-5,3)$ y excentricidad $e=\frac{2}{3}$, bosquejar su gráfica.

Solución



El centro de la elipse se localiza a la mitad del segmento AA' o sea:

$C\left(h=\frac{x_A+x_{A'}}{2}, k=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\right)=(-2,3)$; $CA=a$;

$a=3$; si $e=\frac{c}{a}$; $c=ae=3\left(\frac{2}{3}\right)=2$; $b=\sqrt{a^2-c^2}$;

$b=\sqrt{5}$; $A(h+a,k)=(1,3)$; $B(h,k+b)=\left(-2,3+\sqrt{5}\right)$;

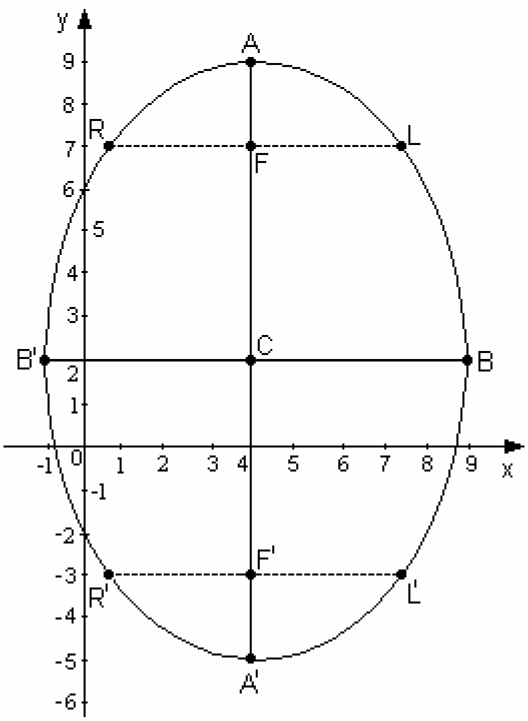
$F(h+c,k)=(0,3)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(0,\frac{14}{3}\right)$

Por simetría: $B'\left(-2,3-\sqrt{5}\right)$; $A'(-5,3)$; $F'(-4,3)$; $R\left(0,\frac{4}{3}\right)$; $L'\left(-4,\frac{14}{3}\right)$; $R'\left(-4,\frac{4}{3}\right)$; $e=\frac{2}{3}$;

Ec. eje mayor: $y=3$; Ec. eje menor: $x=-2$; Ec. elipse: $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{5}=1$

4) Obtener la ecuación de la elipse con centro $C(4,2)$, foco $F(4,7)$, vértice $A'(4,-5)$ y bosquejar su gráfica.

Solución



$CF = c$; $c = 5$; $CA = a$; $a = 7$; $b^2 = a^2 - c^2$

$b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; $A(h, k + a) = (4,9)$

$B(h + b, k) = (4 + 2\sqrt{6}, 2)$; $F(h, k + c) = (4,7)$

$L\left(h + \dfrac{b^2}{a}, k + c\right) = \left(\dfrac{52}{7}, 7\right)$. Por simetría: $B'\left(4 - 2\sqrt{6}, 2\right)$

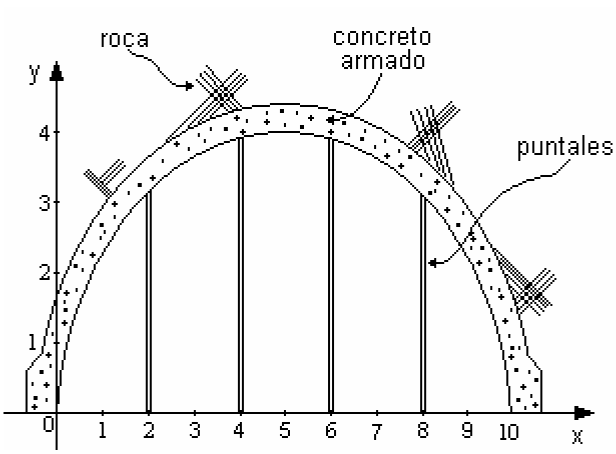
$A'(4,-5)$; $F'(4,-3)$; $R\left(\dfrac{4}{7}, 7\right)$; $L'\left(\dfrac{52}{7}, -3\right)$; $R'\left(\dfrac{4}{7}, -3\right)$

$e = \dfrac{5}{7} \approx 0.71$; Ec. eje mayor: $x = 4$

Ec. eje menor: $y = 2$; Ec. elipse: $\dfrac{(y-2)^2}{49} + \dfrac{(x-4)^2}{24} = 1$

5) Problema: Un arco semielíptico de concreto armado, tiene un claro (distancia entre los apoyos) de 10 metros y una altura máxima de 4 metros (ver figura). Para construir dicho arco, es necesario apuntalarlo a distancias cada 2 metros, se pide obtener la altura de cada puntal.

Solución



Para obtener magnitudes de la elipse y poder obtener su ecuación, ubicamos el arco semielíptico en un sistema de ejes coordenados como se muestra en la figura: su ecuación es de la forma (I)... $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Longitud del eje mayor $2a = 10$; $a = 5$; longitud del semieje menor $b = 4$; coordenadas del centro $C(5,0)$, ecuación de la elipse $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. La altura de los puntales se obtienen despejando la variable "y" de la ecuación de la elipse y considerando solo la parte positiva:

$y=\frac{4}{5}\sqrt{10x-x^2}$. Por simetría de la elipse, los puntales en 2 y 8 metros son de igual longitud, lo mismo en 4 y 6 metros:

si $x=2$; $y=\frac{4}{5}\sqrt{10(2)-(2)^2}\doteq 3.20$ metros
si $x=4$; $y=\frac{4}{5}\sqrt{10(4)-(4)^2}\doteq 3.92$ metros

EJERCICIOS

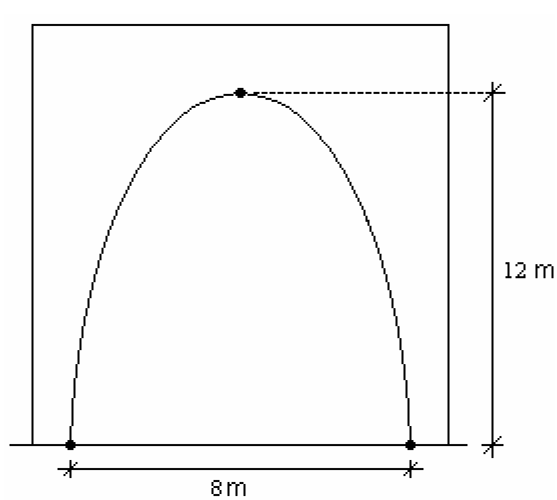
1) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{(y-6)^2}{36}+\frac{(x+3)^2}{16}=1$

2) Los focos de una elipse son $F'(2,4)$, $F(2,10)$ y uno de sus vértices $A(2,12)$, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

3) Los vértices de una elipse son $A'(-2,-3)$, $A(8,-3)$ y la magnitud de su lado recto $LR=\frac{32}{5}$, obtenga su ecuación y bosquejar su gráfica.

4) Una elipse tiene centro $C(1,-4)$, foco $F(1,6)$ y vértice $B'(-2,-4)$, obtenga su ecuación y bosqueje su gráfica.

5) Un arco de entrada a un teatro es una semielipse como se muestra en la figura, obtenga su ecuación.



10.4. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

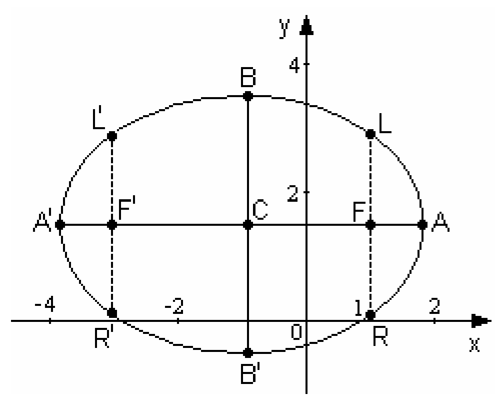
Si en las ecuaciones (I)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y (II)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, se obtiene la ecuación de la elipse en FORMA GENERAL $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuyos ejes son paralelos a los coordenados, los coeficientes A y C son distintos de cero, diferentes numéricamente y del mismo signo, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la elipse está fuera del origen, si $D=0$ el centro se localiza sobre el eje "y", si $E=0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la elipse no pasa por el origen y si $F=0$ la elipse si pasa por el origen.

Recíprocamente, cuando una elipse es dada en su forma general, puede obtenerse su forma ordinaria aplicando el método de completar cuadrados y con esto bosquejar su gráfica.

EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una elipse en forma general, se pide obtener su forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $x^2+4y^2+2x-12y+2=0$



Solución

Para aplicar el método de completar cuadrados es necesario ordenar la ecuación:

$$x^2+2x+4(y^2-3y)=-2$$

se completa el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2+2x+(1)^2+4\left[y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=-2+(1)^2+4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (x+1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=8$$

dividiendo todo entre 8: $\frac{(x+1)^2}{8}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $a^2 = 8$; $a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 4$; $b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 8 - 4 = 4$; $c = 2$; $C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$;

$A\left(-1 + 2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$; $A'\left(-1 - 2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$; $B\left(-1, \frac{7}{2}\right)$; $B'\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; $F\left(1, \frac{3}{2}\right)$; $F'\left(-3, \frac{3}{2}\right)$; $L\left(1, \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$;

$L'\left(-3, \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$; $R\left(1, \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$; $R'\left(-3, \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$; $LR = 2\sqrt{2}$; $e = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

2) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$

Solución

Agrupando términos: $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

factorizando y completando cuadrados:

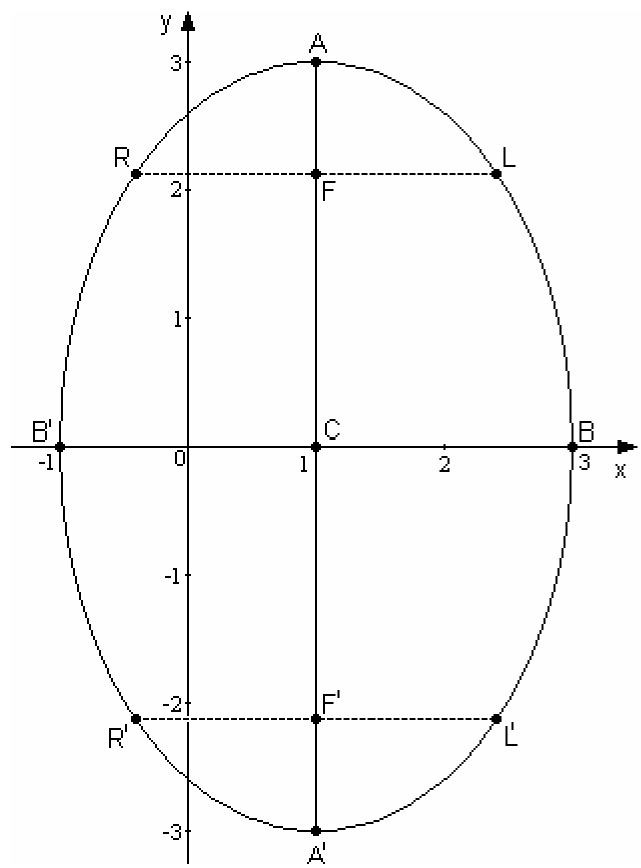
$9\left[x^2 - 2x + (1)^2\right] + 4y^2 = 27 + 9$

$9(x-1)^2 + 4y^2 = 36$

dividiendo entre 36: $\frac{9(x-1)^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{36}{9}} + \frac{y^2}{\frac{36}{4}} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$ FORMA ORDINARIA



Elementos: $C(1,0)$; $a^2 = 9$; $a = 3$; $b^2 = 4$

$b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$; $c = \sqrt{5}$ $A(1,3)$

$A'(1,-3)$; $B(3,0)$; $B'(-1,0)$; $F\left(1, \sqrt{5}\right)$

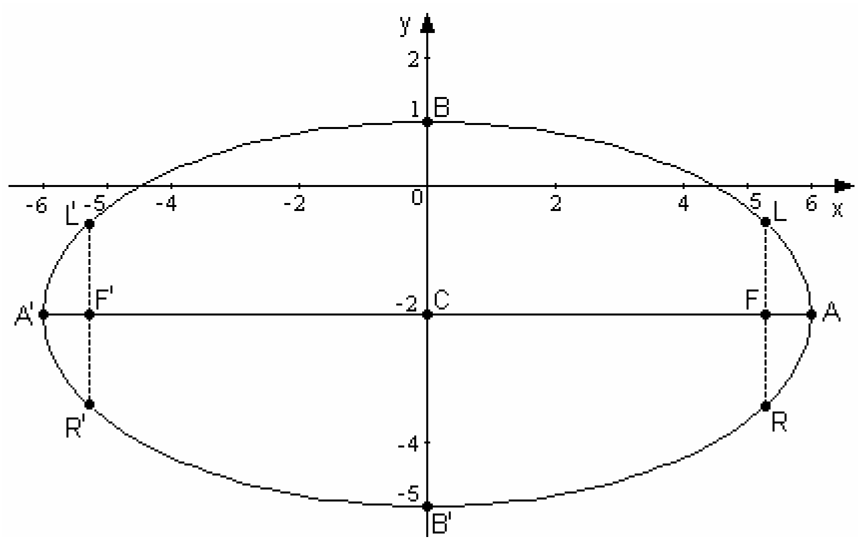
$F'\left(1, -\sqrt{5}\right)$; $\frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$; $L\left(\frac{7}{3}, \sqrt{5}\right)$; $L'\left(\frac{7}{3}, -\sqrt{5}\right)$

$R\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{5}\right)$; $LR = \frac{8}{3}$

$e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.75$

3) $x^2 + 4y^2 + 16y - 20 = 0$

Solución



Agrupando términos y factorizando:

$x^2 + 4\left(y^2 + 4y\right) = 20$

completando cuadrados:

$x^2 + 4\left[y^2 + 4y + (2)^2\right] = 20 + 16$

$x^2 + 4(y+2)^2 = 36$

dividiendo entre 36:

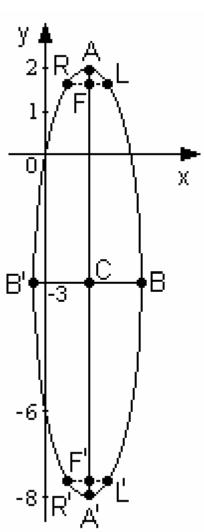
$$\frac{x^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{\frac{36}{4}} = 1$$

$\frac{x^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $C(0,-2)$; $a^2 = 36$; $a = 6$; $b^2 = 9$; $b = 3$; $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27$; $c = 3\sqrt{3}$; $A(6,-2)$ $A'(-6,-2)$; $B(0,1)$; $B'(0,-5)$; $F\left(3\sqrt{3},-2\right)$; $F'\left(-3\sqrt{3},-2\right)$; $\frac{b^2}{a} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$; $L\left(3\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$; $L'\left(-3\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$ $R\left(3\sqrt{3},-\frac{7}{2}\right)$; $R'\left(-3\sqrt{3},-\frac{7}{2}\right)$; $LR = 3$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$

4) $16x^2 + y^2 - 32x + 6y = 0$

Solución



Agrupando términos y factorizando: $16\left(x^2 - 2x\right) + y^2 + 6y = 0$

completando cuadrados: $16\left(x^2 - 2x + 1\right) + y^2 + 6y + (3)^2 = 16 + 9$

$16(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$

dividiendo entre 25: $\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{16}} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ FORMA ORDINARIA

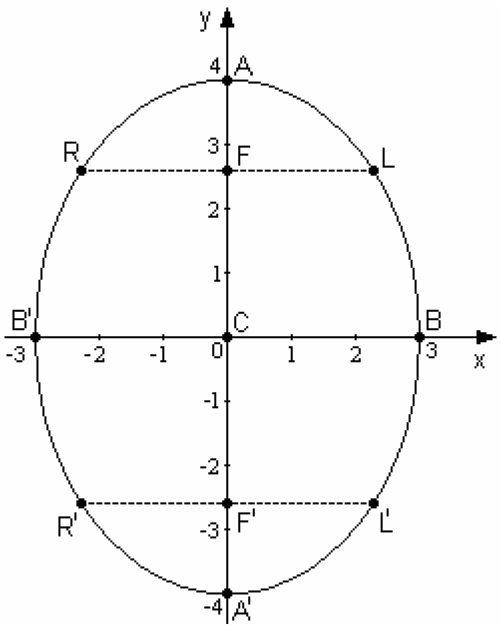
Elementos: $C(1,-3)$; $a^2 = 25$; $a = 5$; $b^2 = \frac{25}{16}$; $b = \frac{5}{4}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - \frac{25}{16} = \frac{375}{16}$; $c = \frac{\sqrt{375}}{4}$; $A(1,2)$; $A'(1,-8)$; $B\left(\frac{9}{4},-3\right)$ $B'\left(-\frac{1}{4},-3\right)$; $F\left(1,-3+\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $F'\left(1,-3-\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $\frac{b^2}{a} = \frac{5}{16}$; $L\left(\frac{21}{16},-3+\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$

$L'\left(\frac{21}{16},-3-\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $R\left(\frac{11}{16},-3+\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $R'\left(\frac{11}{16},-3-\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $LR=\frac{5}{8}$; $e=\frac{\sqrt{375}}{20}\approx 0.97$

5) $16x^2+9y^2-144=0$

Solución



Ordenando términos: $16x^2+9y^2=144$

dividiendo entre 144: $\frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $C(0,0)$; $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7$; $c=\sqrt{7}$; $A(0,4)$; $A'(0,-4)$; $B(3,0)$

$B'(-3,0)$; $F(0,\sqrt{7})$; $F'(0,-\sqrt{7})$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$; $L\left(\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$

$L'\left(\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$; $R\left(-\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$; $R'\left(-\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$; $LR=\frac{9}{2}$

$e=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una elipse en forma general, obtenga su ecuación en forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $8x^2+4y^2+16x-12y-15=0$

2) $4x^2+9y^2-8x-32=0$

3) $36x^2+9y^2+36y-288=0$

4) $16x^2+25y^2-48x+100y-264=0$

5) $4x^2+16y^2-64=0$